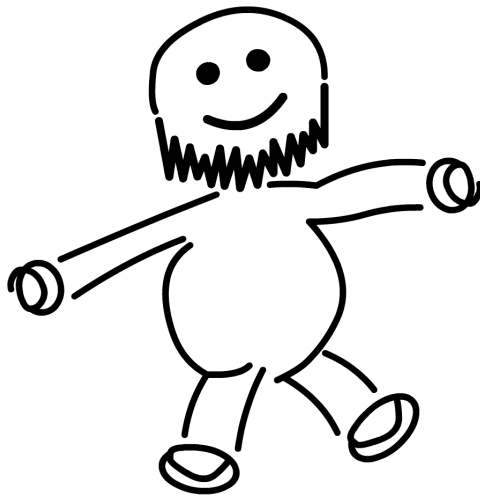


Protokolle zum Physikalischen Grundpraktikum



Daniel Scholz und Hauke Rohmeyer im Frühjahr 2006

Überarbeitete Version vom 26. April 2006.

Inhaltsverzeichnis

V	Vorwort	7
1	Der Pohlsche Resonator	9
1.1	Einleitung	9
1.2	Theorie	9
1.3	Versuchsdurchführung	15
1.4	Auswertung	16
1.5	Diskussion	22
2	Die Gravitationswaage	23
2.1	Einleitung	23
2.2	Theorie	23
2.3	Versuchsdurchführung	27
2.4	Auswertung	28
2.5	Diskussion	32
3	Das Trägheitsmoment	33
3.1	Einleitung	33
3.2	Theorie	33
3.3	Versuchsdurchführung	40
3.4	Auswertung	40
3.5	Diskussion	45
4	Kreiselpräzession	47
4.1	Einleitung	47
4.2	Theorie	47
4.3	Versuchsdurchführung	51
4.4	Auswertung	51
4.5	Diskussion	57
5	Kapillarität und Viskosität	59
5.1	Einleitung	59
5.2	Theorie	59
5.3	Versuchsdurchführung	67
5.4	Auswertung	68
5.5	Diskussion	71

6	Spezifische Wärme der Luft und Gasthermometer	73
6.1	Einleitung	73
6.2	Theorie	73
6.3	Versuchsdurchführung	78
6.4	Auswertung	79
6.5	Diskussion	83
7	Der Adiabatenexponent	85
7.1	Einleitung	85
7.2	Theorie	85
7.3	Versuchsdurchführung	90
7.4	Auswertung	91
7.5	Diskussion	93
8	Dampfdruck von Wasser	95
8.1	Einleitung	95
8.2	Theorie	95
8.3	Aufgaben	102
8.4	Versuchsdurchführung	103
8.5	Auswertung	103
8.6	Diskussion	107
9	Diffusion	108
9.1	Einleitung	108
9.2	Theorie	108
9.3	Versuchsdurchführung	111
9.4	Auswertung	112
9.5	Diskussion	118
10	Die Potentialwaage	120
10.1	Einleitung	120
10.2	Theorie	120
10.3	Versuchsdurchführung	123
10.4	Auswertung	123
10.5	Diskussion	126
11	Das Drehspul Galvanometer	127
11.1	Einleitung	127
11.2	Theorie	127
11.3	Versuchsdurchführung	133
11.4	Auswertung	134
11.5	Diskussion	142
12	Messung großer Widerstände	144
12.1	Einleitung	144
12.2	Theorie	144
12.3	Versuchsdurchführung	149
12.4	Auswertung	150
12.5	Diskussion	158

13 Die spezifische Elektronenladung	160
13.1 Einleitung	160
13.2 Theorie	160
13.3 Versuchsdurchführung	165
13.4 Auswertung	165
13.5 Fehlerdiskussion	167
14 Magnetfeld von Spulen	169
14.1 Einleitung	169
14.2 Theorie	169
14.3 Versuchsdurchführung	175
14.4 Auswertung	176
14.5 Diskussion	180
15 Wechselstromwiderstände	182
15.1 Einleitung	182
15.2 Theorie	182
15.3 Versuchsdurchführung	188
15.4 Auswertung	189
15.5 Diskussion	195
16 Das Magnetometer	196
16.1 Einleitung	196
16.2 Theorie	196
16.3 Versuchsdurchführung	201
16.4 Auswertung	203
16.5 Diskussion	206
17 Ferromagnetismus	207
17.1 Einleitung	207
17.2 Theorie	207
17.3 Versuchsdurchführung	211
17.4 Auswertung	211
17.5 Diskussion	214
18 Der Transformator	216
18.1 Einleitung	216
18.2 Theorie	216
18.3 Versuchsdurchführung	219
18.4 Auswertung	220
18.5 Diskussion	227
19 Dia- und Paramagnetismus	228
19.1 Einleitung	228
19.2 Theorie	228
19.3 Versuchsdurchführung	230
19.4 Auswertung	231
19.5 Diskussion	237

20 Kennlinie der Vakuum-Diode	239
20.1 Einleitung	239
20.2 Theorie	239
20.3 Versuchsdurchführung	241
20.4 Auswertung	242
20.5 Diskussion	246
21 Der Transistor	248
21.1 Einleitung	248
21.2 Theorie	248
21.3 Durchführung	253
21.4 Auswertung	254
21.5 Diskussion	257
22 Das Mikroskop	259
22.1 Einleitung	259
22.2 Theorie	259
22.3 Versuchsdurchführung	264
22.4 Auswertung	265
22.5 Diskussion	269
23 Das Prismen- und Gitterspektrometer	270
23.1 Einleitung	270
23.2 Theorie	270
23.3 Gitterspektrometer	275
23.4 Durchführung	276
23.5 Auswertung	277
23.6 Diskussion	285
24 Das Gasinterferometer	286
24.1 Einleitung	286
24.2 Theorie	286
24.3 Versuchsdurchführung	289
24.4 Auswertung	290
24.5 Diskussion	291
25 Fresnelsche Formeln und Polarisation	292
25.1 Einleitung	292
25.2 Theorie	292
25.3 Durchführung	297
25.4 Auswertung	298
25.5 Diskussion	301
26 Beugung und Interferenz von Laserlicht	302
26.1 Einleitung	302
26.2 Theorie	302
26.3 Durchführung	311
26.4 Auswertung	312
26.5 Diskussion	315
26.6 Anhang	317

27 Der Franck-Hertz-Versuch	322
27.1 Einleitung	322
27.2 Theorie	322
27.3 Versuchsdurchführung	326
27.4 Auswertung	326
27.5 Diskussion	330
28 Röntgenstrahlung	331
28.1 Einleitung	331
28.2 Theorie	331
28.3 Versuchsdurchführung	336
28.4 Auswertung	337
28.5 Diskussion	344
29 Radioaktivität	345
29.1 Einleitung	345
29.2 Theorie	345
29.3 Versuchsdurchführung	348
29.4 Auswertung	349
29.5 Diskussion	359
30 Die spezifische Wärme	360
30.1 Einleitung	360
30.2 Theorie	360
30.3 Versuchsdurchführung	363
30.4 Auswertung	363
30.5 Diskussion	370
L Literaturverzeichnis	371
S Stichwortverzeichnis	372

Vorwort

In dieser kleinen Broschüre haben wir unsere Protokollen zum Physikalischen Grundpraktikum an der Universität Göttingen unter der Leitung von PD Dr. Peter Schaaf zusammengestellt. Die Theorie zu den Protokollen 11 bis 30 entstand teilweise in Zusammenarbeit mit unseren Praktikumsbegleitern Nathan, Christof, Philipp und Maria, Danke dafür. Mehrere Protokolle orientieren sich mehr oder weniger stark an Vorgängerprotokollen, auch dafür unbekannterweise Dankeschön.

An dieser Stelle wollen wir uns auch bei unseren Assistenten bedanken, die alle Protokolle gründliche korrigieren und verbessert haben. Auch wenn dadurch teilweise viel Arbeit auf uns zu kam verstehen wir natürlich, dass unsere Fehler überarbeitet werden mussten.

Wir haben die Versuche dabei nicht in chronologischer Reihenfolge durchgeführt, so haben wir zum Beispiel Versuch 1 erst als vierten Versuch durchgeführt, nicht als Ersten. Dadurch bauen die Theorieteile teilweise keineswegs aufeinander auf. Einige Erkenntnisse werden auch mehrmals wiederholt.

In der Tabelle auf der folgenden Seite haben zum einen den hauptsächlichen Autor des jeweiligen Protokolls angegeben und zum anderen eine eigene Einschätzung über die Qualität des Theorie- sowie des Auswertungsteils zusammengetragen. Ein Punkt steht für einen vergleichsweise schlechten, zwei Punkte für einen guten durchschnittlichen und drei Punkte für einen sehr guten Theorie- bzw. Auswertungsteil. Gerade bei Protokollen mit wenigen Punkten besteht keinerlei Garantie für die Richtigkeit der Angaben. Tippfehler werden in allen Protokollen noch einige zu finden sein. Alle Abbildungen wurden eigenständig angefertigt.

Ja, so ist dies hier alles entstanden. Und nun viel Spaß beim Lernen.

Göttingen im März 2006

Daniel Scholz und Hauke Rohmeyer

	Versuch	Autor	Theorie	Auswertung
1	Pohlscher Resonator	Daniel	• • •	• • •
2	Gravitationswaage	Hauke	• • •	• •
3	Trägheitsmoment	Daniel	• • •	• •
4	Kreiselpräzession	Hauke	• •	•
5	Kapillarität und Viskosität	Daniel	• • •	• •
6	Spezifische Wärme der Luft ...	Hauke	• •	• •
7	Adiabatexponent	Hauke	• •	• •
8	Dampfdruck von Wasser	Daniel	• • •	• •
9	Diffusion	Hauke	• • •	• • •
10	Potentialwaage	Daniel	• •	• •
11	Drehspuhl Galvanometer	Daniel	•	• •
12	Große Widerstände	Daniel	• •	• • •
13	Elektronenladung	Hauke	• • •	• • •
14	Magnetfeld von Spulen	Daniel	• • •	• • •
15	Wechselstromwiderstände	Hauke	• •	• •
16	Magnetometer	Hauke	• •	• •
17	Ferromagnetismus	Daniel	• •	• •
18	Transformator	Hauke	•	• • •
19	Dia- und Paramagnetismus	Daniel	• •	• •
20	Vakuumdiode	Hauke	• •	• •
21	Transistor	Hauke	• • •	• •
22	Mikroskop	Daniel	• • •	• • •
23	Prismen- und Gitterspektrometer	Hauke	• •	• •
24	Gasinterferometer	Daniel	• •	• • •
25	Fresnelsche Formel und ...	Hauke	• • •	• •
26	Laserlicht	Hauke	• • •	• • •
27	Franck-Hertz-Versuch	Daniel	• • •	• • •
28	Röntgenstrahlung	Daniel	• • •	• • •
29	Radioaktivität	Hauke	• •	• • •
30	Spezifische Wärme	Daniel	•	• • •

1 Der Pohlsche Resonator

Versuch durchgeführt am 19. Mai 2005, Protokoll erarbeitet von Daniel Scholz.

1.1 Einleitung

In diesem Versuch soll das Phänomen der Resonanz untersucht werden. Hierbei handelt es sich um eine Erscheinung, die bei erzwungenen Schwingungen eines Systems auftritt. Dabei wird ein harmonischer Oszillator durch eine äußere Erregerfrequenz angetrieben. Die zur Beschreibung notwendigen Differentialgleichungen finden sich in vielen anderen Bereichen der Physik wieder, von der Elektrodynamik bis hin zur Kernphysik. Daher sind sie von geradezu essentieller Bedeutung. Sie lassen sich auf relativ einfache Weise aus den Gleichungen der harmonischen [unbeeinflussten] Schwingung gewinnen, indem diese um die äußere einwirkende Kraft erweitert werden. Es zeigt sich, dass das System zunächst einem sogenannten Einschwingvorgang unterworfen ist und nach einiger Zeit mit der Erregerfrequenz schwingt. Sowohl Amplitude als auch Phasenlage des Oszillators sind stark von Dämpfung und anregender Frequenz abhängig. Dies sind die Größen, die im Versuch variiert werden.

1.2 Theorie

Die zentrale Fragestellung bei diesem Versuch besteht darin, wie die Amplitude und die Phase des Resonators von der Frequenz des Erregers und der Dämpfung des Resonators abhängen.

Mathematisch wird die erzwungene, gedämpfte Schwingung durch eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben, deren Herleitung und Lösung nun erklärt werden soll:

1.2.1 Herleitung der Differentialgleichung

Auf die Drehscheibe mit dem Trägheitsmoment J wirkt durch die Spiralfeder ein zum Auslenkungswinkel φ proportionales Rückstellmoment $D\varphi$, dabei ist D die Winkelrichtgröße der Feder. Wir erhalten somit

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi.$$

Durch Reibung und später vor allem durch die Wirbelstrombremse [Erklärung dazu siehe unten] wirkt zusätzlich auch noch ein bremsendes Moment $\rho\dot{\varphi}$, das

proportional zur Winkelgeschwindigkeit angenommen wird. Zusammen erhalten wir somit die Gleichung

$$J\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + D\varphi = 0.$$

Mit einem äußeren periodischen Anregungsmoment $M \cos \omega t$ [dabei ist ω die Anregerfrequenz] ergibt sich nun die Bewegungsgleichung für eine erzwungene gedämpfte Schwingung des Pohlschen Rades, nämlich

$$J\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + D\varphi = M \cos \omega t.$$

Diese Bewegungsgleichung soll nun auf Normalform gebracht werden. Dabei werden einige Größen ersetzt:

$$2\beta := \rho/J, \quad \omega_0^2 := D/J \quad \text{und} \quad N := M/J.$$

Die Größe $\omega_0 = \sqrt{D/J}$ wurde dabei gerade so gewählt, dass sie nun gerade die Eigenfrequenz des ungedämpften harmonischen Oszillators beschreibt.

Wir erhalten somit die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = N \cos \omega t.$$

1.2.2 Lösung der homogenen Differentialgleichung

Gesucht ist eine Gleichung $\varphi(t)$, die den zeitlichen Verlauf der Auslenkung des Drehpendels unter der Wirkung der äußeren Anregung für alle Zeiten beschreibt.

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung lässt sich als Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung schreiben.

Daher soll hier zunächst die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0.$$

beschrieben werden.

Durch den Ansatz $\varphi = e^{\lambda t}$ erhalten wird die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

welche durch die pq -Formel oder durch quadratische Ergänzung gelöst werden kann. Wir erhalten

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Es müssen nun drei Fälle unterschieden werden:

(1) $\omega_0^2 < \beta^2$ – starke Dämpfung

Die beiden Lösungen $\lambda_{1,2}$ sind reell, somit ergibt sich die Gesamtlösung der homogenen Differentialgleichung zu

$$\varphi(t) = e^{-\beta t} \cdot \left(A e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

mit reellen Zahlen A und B .

(2) $\omega_0^2 = \beta^2$ – kritische Dämpfung

Es gilt nun $\lambda_{1,2} = -\beta$, somit erhalten wir

$$\varphi(t) = Ae^{-\beta t} + Ate^{-\beta t}.$$

Dieser Fall wird auch **aperiodischer Grenzfall** genannt.

(3) $\omega_0^2 > \beta^2$ – schwache Dämpfung

Dieser Fall ist besonders für unseren Versuch von Bedeutung. Die beiden Lösungen $\lambda_{1,2}$ sind komplex, da unter der Wurzel eine negative Zahl steht. Wir erhalten durch

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} =: -\beta \pm i\omega_e$$

die Gesamtlösung der homogenen Differentialgleichung, nämlich

$$\varphi(t) = e^{-\beta t} \cdot (Ae^{i\omega_e t} + Be^{-i\omega_e t})$$

mit reellen Zahlen A und B . Dabei ist

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

nun gerade die Eigenfrequenz des gedämpften Oszillators.

Für die Beschreibung des Schwingungsvorganges ist jedoch nur der Realteil dieser Gleichung relevant, jedoch muss eine zweite Konstante ϕ berücksichtigt werden, bei der es sich um eine beliebige Anfangsphase der Schwingung handelt. Daher setzen wir nun $A = \varphi_0/2 \cdot e^{i\phi}$ sowie $B = \bar{A}$ und erhalten

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_e t + \phi).$$

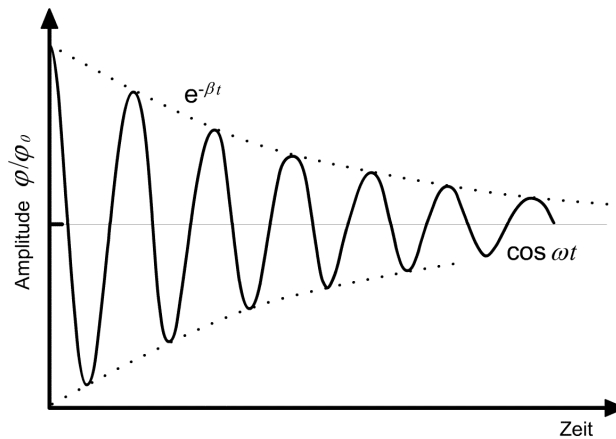


Abbildung 1: Verlauf einer freien schwach gedämpften Schwingung

Logarithmisches Dekrement

Das Verhältnis von zwei aufeinander folgenden Maxima bei schwacher Dämpfung zum Zeitpunkt t wird gegeben durch $\varphi(t)/\varphi(t+T)$, dabei ist T die Periodendauer. Man definiert nun

$$\Lambda := \log \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T)} = \log e^{\beta T} = \beta T$$

als logarithmisches Dekrement. Es ist bemerkenswert, dass Λ nicht von der Zeit t abhängt.

1.2.3 Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Aus der Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_e t + \phi)$$

der homogenen Differentialgleichung soll nun die inhomogene Gleichung

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = N \cos \omega t$$

gelöst werden. Dazu verwenden wir den Ansatz

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos(\omega t - \phi)$$

und erhalten

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos(\omega t - \phi) - 2\beta \cdot \cos(\omega t - \phi) \cdot \sin(\omega t - \phi) = N \cos \omega t.$$

Es müssen nun $\varphi_0/2$ sowie ϕ bestimmt werden, so dass diese Gleichung für alle Zeiten t gilt.

Durch das Anwenden der Additionstheoremen ergibt sich eine Gleichung, die gerade für alle Zeiten t erfüllt sein soll. Man erhält aus dieser Bedingung nun zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_0}{2} \cdot ((\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \cos \phi + 2\beta \cdot \omega \cdot \sin \phi) &= N, \\ (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \sin \phi &= 2\beta \cdot \omega \cos \phi \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man nun gerade die Phasenverschiebung ϕ , nämlich

$$\phi = \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

Aus der anderen Gleichung berechnet man

$$\frac{\varphi_0}{2} = \frac{N}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \cos \phi + 2\beta \cdot \omega \cdot \sin \phi}.$$

Nutz man nun die Beziehungen

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} \quad \text{und} \quad \sin \phi = \frac{\tan \phi}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}},$$

so erhält man gerade

$$\frac{\varphi_0}{2} = \frac{N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \cdot \omega^2}}.$$

Setzt man nun die gewonnenen Ergebnisse in den Ansatz ein, so ergibt sich eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\varphi(t) = \frac{N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \cdot \omega^2}} \cdot \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)$$

Dies ist also die Bewegungsgleichung für eine erzwungene gedämpfte Schwingung.

1.2.4 Einschwingzeit

Es wurde gezeigt, dass die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung aus einer Exponentialfunktion mit negativem Exponenten zusammengesetzt ist. Das heißt, dass bei nicht verschwindender Dämpfung stets

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$$

gilt. Im Experiment ist somit der homogene Teil von $\varphi(t)$ für große Zeiten vernachlässigbar klein. Dieser Zeitraum des Abklingens wird als **Einschwingzeit** bezeichnet.

Das Ende der Einschwingzeit ist daran erkennbar, dass die Phasenraumprojektion der Winkelgeschwindigkeit des Resonators eine geschlossene Ellipse bildet [dies ist im Programm "kPohl" während der Einschwingphase zu beobachten]. Das System schwingt nach der Einschwingzeit folglich mit der Kreisfrequenz ω des Erregers und der Phasenverschiebung ϕ . Somit wird die Schwingung nur noch durch die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung beschrieben. Damit stellt die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung auch den physikalisch relevanten Teil des Versuches da.

1.2.5 Diskussion der Amplitudengleichung

Es werden nun die Amplituden

$$A(\omega) := \frac{N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \cdot \omega^2}}.$$

einer erzwungenen gedämpften Schwingung gegen die Erregerfrequenz ω diskutiert.

Eine besonders wichtige Stelle im Funktionsverlauf der Amplitude stellt jene des Amplitudenmaximums dar. Hierzu leitet man die Amplitude $A(\omega)$ ab und erhält

$$\frac{\partial A}{\partial \omega}(\omega) = -2 \cdot \frac{N \cdot \omega \cdot (\omega_0^2 + \omega^2 + 2\beta^2)}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \cdot \omega^2)^{3/2}}.$$

Die Nullstellen dieser Funktion sind

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad \text{oder} \quad \omega = 0.$$

Im Fall verschwindender Dämpfung des Systems [$\beta = 0$] wird das Maximum somit an der Stelle $\omega = \omega_0$ erreicht. Mit $\omega \rightarrow \omega_0$ wächst die Amplitude zunehmend an, es tritt **Resonanz** ein, welche zur **Resonanzkatastrophe** führen kann.

Im Fall einer Dämpfung [$\beta > 0$] wird das Amplitudenmaximum nicht an der Stelle $\omega = \omega_0$ erreicht. Die Resonanzfrequenz liegt bei endlicher Dämpfung folglich unterhalb der Erregerfrequenz.

Den prinzipiellen Amplitudenverlauf des Resonators gegenüber dem Verhältnis der Erreger- zur Kennfrequenz gibt die folgende Abbildung wieder:

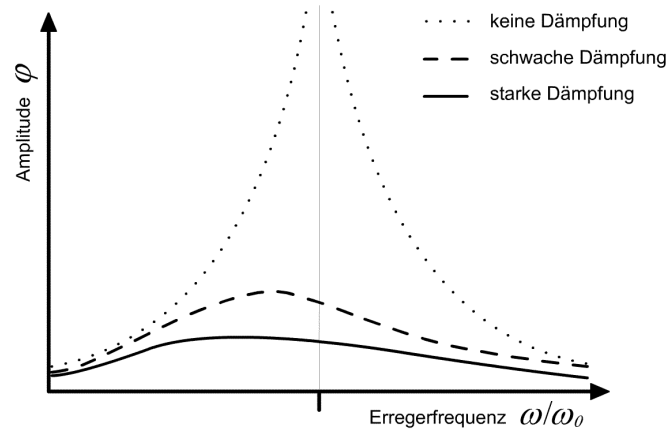


Abbildung 2: Amplitude einer erzwungenen gedämpften Schwingung

Es zeigt sich, dass der Amplitudenverlauf im gedämpften Fall eine schiefsymmetrische Glockenkurve, bei verschwindender Dämpfung hingegen zwei Hyperbeläste beschreibt.

Die Resonanzkurven können mit den Quadraten der Amplituden aufgetragen werden, um für die Berechnung des logarithmischen Dekrements das Ablesen des Abzissenwertes ω/ω_0 an der Stelle des Resonanzmaximums zu erleichtern.

1.2.6 Diskussion der Phasenverschiebung

Desweiteren werden die Phasenverschiebungen

$$\phi(\omega) := \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

einer erzwungenen gedämpften Schwingung gegen die Erregerfrequenz ω diskutiert.

Im Fall verschwindender Dämpfung [$\beta = 0$] hat die Phasenfunktion $\phi(\omega)$ bei $\omega = \omega_0$ eine Sprungstelle von $\phi = 0$ nach $\phi = \pi$.

Im Fall einer Dämpfung [$\beta > 0$] gibt es drei markante Stellen:

$$\begin{aligned} \text{für } \omega = 0 & \quad \text{folgt} \quad \phi = 0, \\ \text{für } \omega = \omega_0 & \quad \text{folgt} \quad \phi = \pi/2, \\ \text{für } \omega \rightarrow \infty & \quad \text{folgt} \quad \phi = \pi. \end{aligned}$$

Eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ bedeutet gerade, dass die Feder durch den Erreger auf dem gesamten Weg des Drehpendels so gespannt wird, dass sie das Pendel zusätzlich beschleunigt. Damit eilt der Resonator der Anregung stets hinterher.

Die erwarteten Verläufe der Phasenverschiebung für verschiedene Dämpfungen gegenüber dem Verhältnis der Erreger- zur Kennfrequenz gibt die folgende Abbildung wieder:

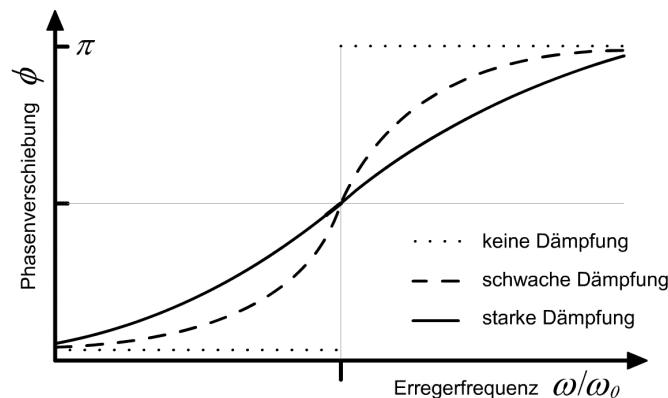


Abbildung 3: Phasenverschiebung einer erzwungenen gedämpften Schwingung

1.2.7 Wirbelstrombremse

Bewegt sich ein Metallstück durch ein Magnetfeld, so ändert sich der magnetische Fluß im Metall. Dadurch wird eine Spannung induziert, die wiederum Wirbelströme hervorruft. Das durch diese Wirbelströme bewirkte Magnetfeld ist dem Ausgangsfeld entgegengerichtet. Nach der Lenz'sche Regel behindert also die Lorentzkraft die weitere Bewegung des Metallstücks. Die **Wirbelstrombremse** ist daher ideal geeignet zur Realisierung einer linearen Dämpfung, wie sie in diesem Versuch benötigt wird. Durch das Variieren der vom Magnetfeld durchsetzten Fläche, lässt sich die Bremswirkung beeinflussen, daher wird im folgenden von einer Bremswirkung bei 4 bis 10 Millimetern die Rede sein. Dieses Maß gibt an, wie weit das Magnetfeld bei konstanter Breite in das Metall "hineinreicht".

1.3 Versuchsdurchführung

Ein Drehpendel ist in seiner horizontalen Symmetrieachse schwingungsfähig aufgehängt. An der Drehachse greift zudem eine Spiralfeder an, deren oberes Ende an einem Hebel befestigt ist. Mit Hilfe einer Schubstange, die mit einem Schrittmotor gesteuerten Exzenter verbunden ist, kann das Drehpendel angetrieben werden.

Auf diese Art und Weise ist es möglich auf das Drehpendel sinusförmige äußere Drehmomente zu übertragen. Die Ausschläge des Drehpendels werden dabei von einem Computer in gewissen Zeitabständen aufgezeichnet und gespeichert.

Die Dämpfung des Drehpendels wird mit einer Wirbelstrombremse realisiert. Diese besteht aus zwei, vor und hinter dem Rad angeordneten Magneten, die mit Hilfe eines Millimetertriebes beliebig weit über das Drehpendel geschoben werden können.

1.3.1 Freie Schwingung

Bei der freien Schwingung wird die Drehscheibe auf 120° ausgelenkt und für jede der Dämpfungen 0 mm, 4 mm, 8 mm sowie 10 mm wird eine Messung gestartet.

1.3.2 Erzwungene Schwingung

Bei der erzwungenen Schwingung wird die Drehscheibe mit Frequenzen zwischen 100 mHz und 600 mHz angetrieben und der Einschwingvorgang wird abgewartet. Danach wird eine Messung gestartet und ausreichend viele Perioden aufgezeichnet. Auch diese Messungen sind für jede der Dämpfungen 0 mm , 4 mm , 8 mm sowie 10 mm durchzuführen.

Bei schwacher Dämpfung ist stets darauf zu achten, dass das Drehpendel nicht zu weit ausschlägt, um eine Resonanzkatastrophe zu verhindern.

1.4 Auswertung

1.4.1 Freie Schwingung

Zunächst werden die Abklingkurven der einzelnen freien [nicht angetriebenen] Schwingungen aufgetragen:

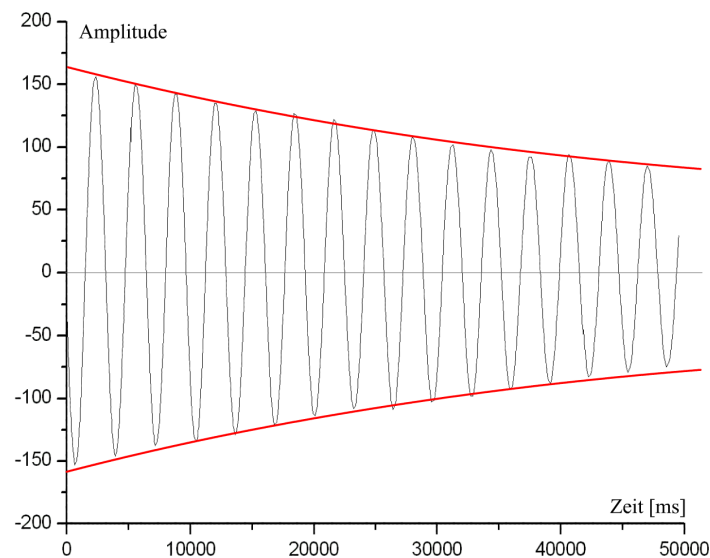


Abbildung 4: Freie Schwingung, gedämpft mit 0 mm .

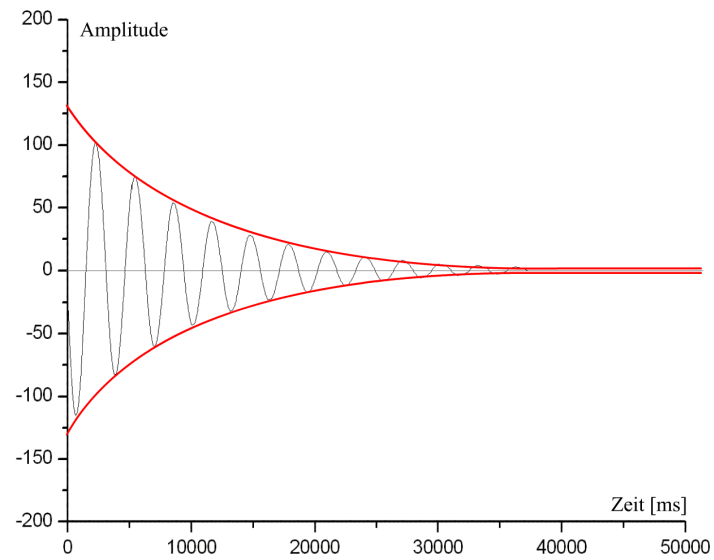


Abbildung 5: Freie Schwingung, gedämpft mit 4 mm.

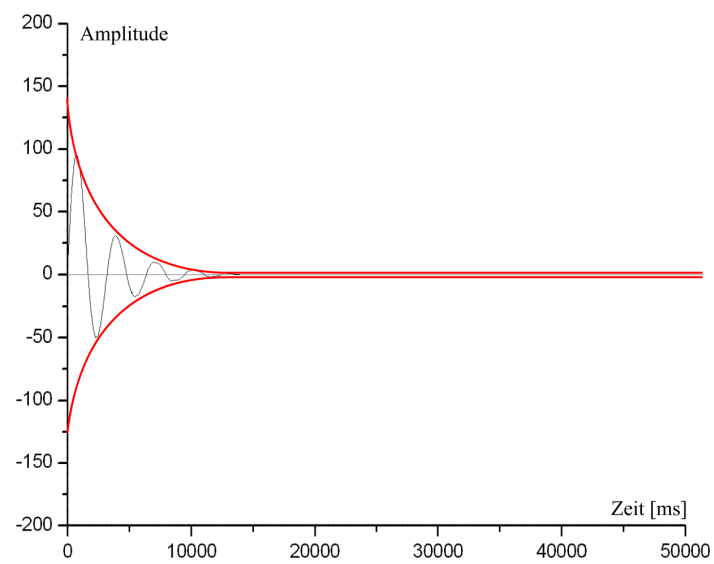


Abbildung 6: Freie Schwingung, gedämpft mit 8 mm.

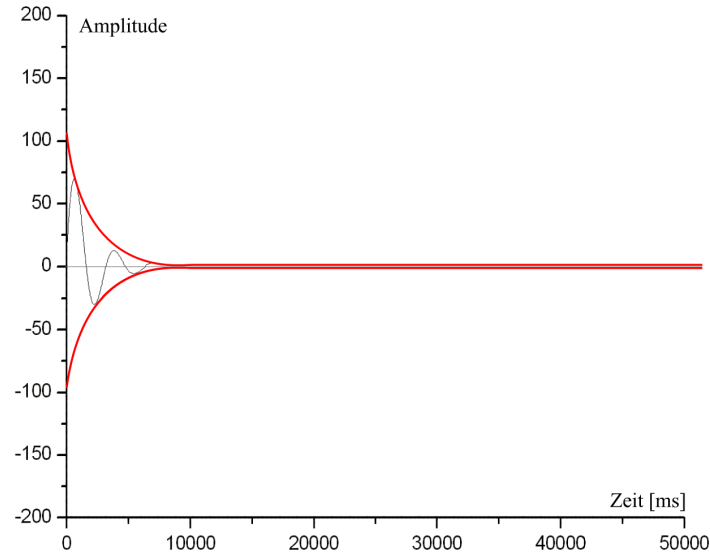


Abbildung 7: Freie Schwingung, gedämpft mit 10 mm.

Aus dem Mittelwert unseren Messdaten erhält man die Eigenfrequenz ω_e des Resonator, indem man $\omega_e = 2\pi/T$ berechnet:

	Eigenfrequenz ω_e
0 mm Dämpfung	$1.993 \pm 0.006 \text{ s}^{-1}$
4 mm Dämpfung	$2.056 \pm 0.024 \text{ s}^{-1}$
8 mm Dämpfung	$2.043 \pm 0.037 \text{ s}^{-1}$
10 mm Dämpfung	1.955 s^{-1}

Das logarithmische Dekrement Λ und damit auch der Dämpfungsfaktor β berechnet sich nun aus

$$\Lambda = \log \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T)} = \beta T.$$

Die Schwingungsdauer T wird dabei durch die zeitlichen Abstände der einzelnen Maxima der Abklingkurven gegeben und damit kann sofort Λ bestimmt werden. Der Dämpfungsfaktor β berechnet sich dann einfach aus $\beta = \Lambda/T$. Auch hierzu haben wir verschiedene Messdaten gemittelt:

	logarithmisches Dekrement Λ	Dämpfungsfaktor β
0 mm Dämpfung	$0.0455 \pm 0,0033$	0.0144 ± 0.0011
4 mm Dämpfung	0.3649 ± 0.0298	0.1210 ± 0.0121
8 mm Dämpfung	1.0729 ± 0.0888	0.3499 ± 0.0351
10 mm Dämpfung	1.6094	0.5007

Dabei werden die Werte mit zunehmender Dämpfung immer ungenauer, da aufgrund des schnellen Abklingens der Kurven weniger Messdaten zum Mitteln

aufgezeichnet wurden.

Wir setzen nun $\omega_0^* = \omega_e$, wobei wir ω_e aus der Messung mit 0 mm Dämpfung verwenden. Aus der Beziehung

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_e^2 + \beta^2}$$

können wir nun für jeden Dämpfung aus ω_e und β also auch ω_0 bestimmen. Wir verwenden dabei einen Fehler σ_{ω_0} von

$$\sigma_{\omega_0} = \sqrt{\left(\frac{\omega_e^2 \sigma_{\omega_e}^2}{\omega_e^2 + \beta^2}\right) + \left(\frac{\beta^2 \sigma_{\beta}^2}{\omega_e^2 + \beta^2}\right)}$$

und erhalten folgendes Ergebnis:

	Eigenfrequenz ω_0
0 mm Dämpfung	$1.993 \pm 0.006\text{ s}^{-1}$
4 mm Dämpfung	$2.059 \pm 0.024\text{ s}^{-1}$
8 mm Dämpfung	$2.073 \pm 0.037\text{ s}^{-1}$
10 mm Dämpfung	2.018 s^{-1}

Die Werte liegen also leicht über dem Wert von ω_0^* , sind aber alle recht erfreulich.

1.4.2 Erzwungene Schwingung

Resonanzkurven

Zunächst sollen die Resonanzkurven der einzelnen Dämpfungen bestimmt werden. Dazu werden die Verhältnisse der Frequenzen ω/ω_0 auf der Abszisse und die Verhältnisse der Amplituden $\varphi(\omega)/\varphi(0)$ auf der Ordinate aufgetragen. Es wurde dabei die Eigenfrequenz als $\omega_0 = 1.99\text{ Hz}$ angenommen und es wurde $\varphi(0) = 20$ gesetzt.

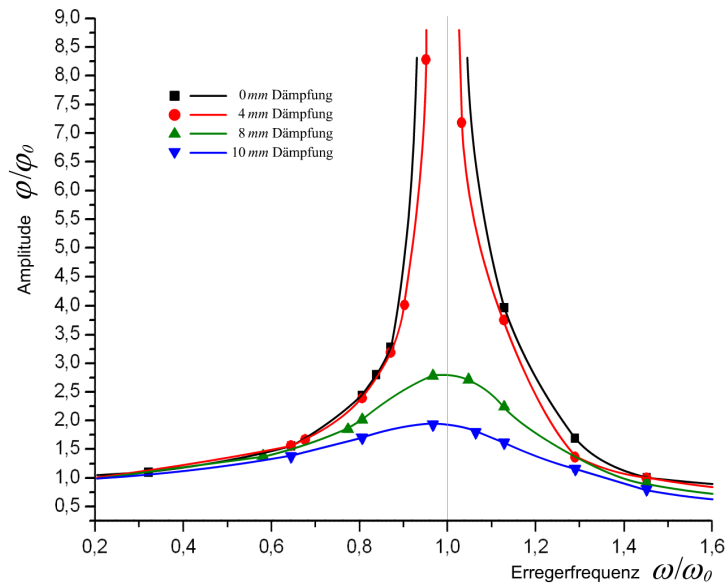


Abbildung 8: Resonanzkurven der einzelnen Dämpfungen.

Deutlich werden die Eigenschaften der Resonanzkurven wenn man die Quadrate der Amplitudenverhältnisse betrachtet, womit man insbesondere die zum Maximum gehörende Erregerfrequenz besser bestimmen kann.

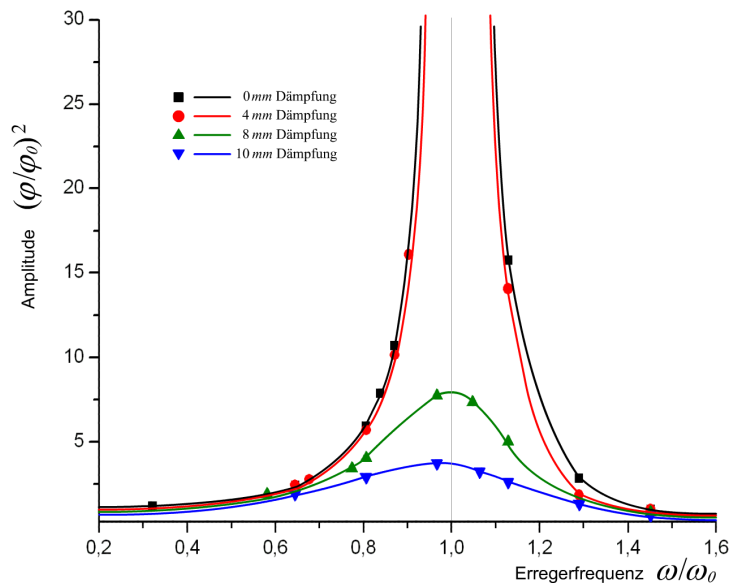


Abbildung 9: Resonanzkurven mit quadrierten Amplitudenverhältnissen.

Wie in der Diskussion der Amplitudengleichung gezeigt, wird die Amplitude maximal für

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$$

[siehe Seite 13]. Die Werte für ω_r/ω_0 lassen sich nun aus den Maxima der Resonanzkurven ablesen, allerdings nur für die Dämpfungen von 8 mm und 10 mm.

Wir nehmen dabei einen Ablesefehler von 0.005 an. Das logarithmische Dekrement berechnet sich nun aus

$$\Lambda = \beta T = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - \omega_r^2}{2}} \cdot T.$$

Wir erhalten dabei folgende Ergebnisse:

	ω_r/ω_0	T	logarithmisches Dekrement
8 mm Dämpfung	0.998 ± 0.005	3.077 s	0.9631 ± 0.0016
10 mm Dämpfung	0.980 ± 0.005	3.038 s	1.4332 ± 0.0011

Vergleich der Ergebnisse für das logarithmische Dekrement Λ

Für die Dämpfungen von 0 mm und 4 mm konnten keine Maxima bestimmt werden, da es im Versuch zur Resonanzkatastrophe kam und keine weiteren Daten aufgenommen werden konnten.

Der Wert für 8 mm unterscheidet sich mit dem Wert der freien Schwingung geringer als sich die Werte für 10 mm Dämpfung voneinander unterscheiden. Dies kann wieder daran liegen, dass mit zunehmender Dämpfung immer weniger Messdaten aufgezeichnet wurden.

Vergleich der gemessenen und theoretischen Resonanzfrequenz ω_r

Durch die Beziehung

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

mit ω_0 und β aus der freien Schwingung können nun theoretische Werte für die Resonanzfrequenz ω_r bestimmt und mit den oben abgelesenen experimentellen Werten verglichen werden.

Wir erhalten:

	ω_r experimentell	ω_r theoretisch
8 mm Dämpfung	$1.986 \pm 0.010 \text{ Hz}$	$2.052 \pm 0.006 \text{ Hz}$
10 mm Dämpfung	$1.950 \pm 0.010 \text{ Hz}$	$2.013 \pm 0.010 \text{ Hz}$

Die theoretischen Werte sind also etwas größer als die experimentellen Werte.

Phasenverschiebung

Es soll nun die Phasenverschiebung der einzelnen Dämpfungen verdeutlicht werden. Dazu werden die Verhältnisse der Frequenzen ω/ω_0 auf der Abszisse gegen die Phasenverschiebung ϕ/π auf der Ordinate aufgetragen. Es wurde dabei wieder die Eigenfrequenz als $\omega_0 = 1.99 \text{ Hz}$ angenommen und ϕ berechnet sich aus der oben hergeleiteten Formel

$$\phi = \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

Eine Phasenverschiebung von $-\pi$ ist identisch zu $+\pi$. Dieses Erkenntnis muss angewendet werden, um das Ergebnis übersichtlich darstellen zu können [ansonsten erhält man gerade eine Verschiebung von π].

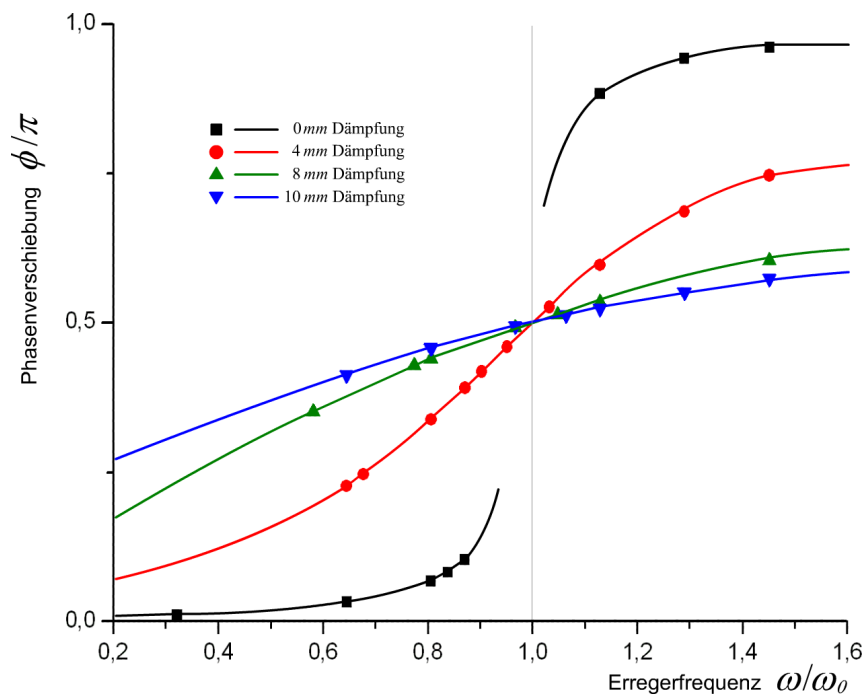


Abbildung 10: Phasenverschiebung der einzelnen Dämpfungen.

1.5 Diskussion

Da uns keine systematischen Fehler der computergesteuerten Anlage bekannt waren, haben wir alle Messdaten als exakt vorausgesetzt.

Wie schon erwähnt, konnten bei der freien Schwingung mit zunehmender Dämpfung immer weniger Messdaten aufgezeichnet werden. Dadurch werden natürlich auch die Ergebnisse zunehmend ungenauer.

Die Tatsache, dass wir den Einschwingvorgang bei der erzwungenen Schwingung vielleicht nicht immer lange genug abgewartet haben, kann die Ergebnisse auch hier etwas verfälscht haben.

Eigene Kommentare

[Nicht nur das der Versuch mächtig Spass gemacht hat, nein auch die Auswertung war eine reine Freude. Selbst für Studenten ohne PC-Kenntnisse dürfte die Auswertung ein Kinderspiel sein und auch das Protokoll schreibt sich fast wie von selbst.]_{Daniel}

[Und Differentialgleichungen wurden uns auch so gut beigebracht, dass die Theorie richtig gerockt hat!]_{Hauke}

2 Die Gravitationswaage

Versuch durchgeführt am 26. Mai 2005, Protokoll erarbeitet von Hauke Rohmeyer.

2.1 Einleitung

Die **Gravitationskonstante** γ gehört zu den wichtigsten Naturkonstanten: Mit ihrer Hilfe lässt sich z.B. die Masse der Erde bestimmen. Seit Issac Newton 1667 das **Gravitationsgesetz** aufstellte, ist die experimentelle Bestimmung von γ eine besondere Herausforderung. Denn aufgrund der vergleichsweise schwachen Wirkung der Gravitationskraft und der Tatsache, dass diese nicht abgeschirmt werden kann, ist die Gravitationskonstante bis heute eine der am wenigsten exakt bestimmten Größen. In diesem Versuch soll γ mit Hilfe der **Gravitationswaage** von Cavendish und Eötvös bestimmt werden.

2.2 Theorie

2.2.1 Gravitationsgesetz

Das Gravitationsgesetz besagt, dass zwei Körper sich gegenseitig anziehen, mit einer Kraft die proportional zu dem Produkt ihrer Massen und antiproportional zu ihrem Abstand ist. Als Newton das Gravitationsgesetz aufstellte, war eine Erklärung gefunden warum Gegenstände von der Erde angezogen werden, wie der Apfel, der vom Baum fällt. Man konnte nun auch erklären, warum der Mond um die Erde, und die Erde um die Sonne kreist. Die Bewegung der Planeten war schon vor Newton bekannt, und wurde durch die **Keplerschen Gesetze** beschrieben. Diese beruhten allerdings nur auf astronomischen Beobachtungen, und erst Newtons Gravitationsgesetz beschrieb die Kraft, die die Planeten auf ihrer Bahn hält.

Newton entwickelte das Gesetz aus den folgenden Beobachtungen:

- (1) Körper, egal welcher Masse, fallen auf der Erdoberfläche gleich schnell, abgesehen von denen, die wegen ihrer Form Luftwiderstand haben. Die Fallbeschleunigung ist demnach für alle Körper gleich groß und daher muss die wirkende Kraft proportional zur fallenden Masse sein.

$$\vec{F} \sim m_1$$

- (2) Aus dem dritten Newtonschen Axiom [actio = reactio] folgt, dass es sich um eine beidseitige Anziehung handeln muß. Der Apfel zieht die Erde also

mit der gleichen Kraft an, wie die Erde den Apfel. Also ist die zweite Masse auch proportional zur Kraft.

$$\vec{F} \sim m_2$$

- (3) Weiterhin ist die Stärke der Kraft aus dem Abstand zwischen den beiden Massen gegeben. Die Beziehung $\vec{F} \sim r^{-2}$ erkannte Newton durch Beobachtungen der Mondbahn. Die Zentripetalbeschleunigung, die auf den Mond wirkt, konnte Newton aus dem Abstand des Mondes von der Erde und dessen Umlaufzeit berechnen. Nun setzte er die Zentripetalbeschleunigung mit der Schwerebeschleunigung, die durch die Erde verursacht wird, gleich. Die Schwerebeschleunigung im Abstand des Mondes verglichen mit der Schwerebeschleunigung auf der Erdoberfläche ergab eine Abstandsabhängigkeit von r^{-2} .

Aus diesen Beobachtungen formulierte Newton folgendes Gesetz:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Dabei ist γ eine Proportionalitätskonstante. Sie legt die Größe der Kraft zwischen zwei Einheitsmassen im Einheitsabstand fest.

2.2.2 Die Keplerschen Gesetze

Johannes Kepler leitete aus den bis dahin bekannten astronomischen Beobachtungen die drei folgenden Gesetze über Planetenbewegung her:

- (1) Die Umlaufbahnen aller Planeten haben die Form einer Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
- (2) Die Verbindungslinie zwischen der Sonne und einem Planeten überstreicht in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächen.
- (3) Das Quadrat der Umlaufzeit eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz der Hauptachse von seiner Umlaufbahn.

Erst nachdem Newton das Gravitationsgesetz aufstellte, konnten die Keplerschen Gesetze bewiesen werden.

Das erste Keplersche Gesetz

Newton konnte zeigen, dass Körper, die sich in einem Kraftfeld bewegen welches mit r^{-2} abfällt, sich auf Kegelschnitten bewegen. Dadurch kann es nur drei verschiedene Bahntypen geben: Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln. Auf Hyperbel- oder Parabelbahnen bewegen sich Körper, die einmal an der Sonne vorbeifliegen, und niemals wiederkehren. Die einzige geschlossene Bahn die Ellipse, demzufolge müssen sich Planeten auf Ellipsen bewegen.

Das zweite Keplersche Gesetz

Das zweite Keplersche Gesetz ergibt sich daraus, dass die Kraft, die die Sonne auf einen Planeten ausübt, zur Sonne gerichtet ist, also eine Zentralkraft ist. Also ist $\vec{r} \times \vec{F} = 0$. Das heißt, dass der Drehimpuls erhalten bleibt.

In einem Zeitintervall dt bewegt sich ein Planet um die Strecke $\vec{v} dt$ weiter. Sein Radiusvektor \vec{r} überstreicht dabei eine Fläche, die halb so groß ist, wie das durch \vec{r} und $\vec{v} dt$ gebildete Parallelogramm. Deshalb gilt für die Fläche dA , die vom Radiusvektor im Zeitintervall dt überstrichen wird

$$dA = \frac{1}{2} r \times v dt = \frac{1}{2} \frac{1}{m} r \times mv dt.$$

Mit $L = \vec{r} \times m\vec{v}$ folgt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} L.$$

Der Drehimpuls ist erhalten, also zeitlich konstant. Für den Flächenabschnitt dA folgt daraus, dass dieser für gleiche Zeitintervalle auch gleich groß sein muß.

Das dritte Keplersche Gesetz

Wir zeigen hier nur das dritte Keplersche Gesetz für den Spezialfall, dass die Umlaufbahn des Planeten ein Kreis ist. Betrachtet man einen Planeten, der sich mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit dem Radius r um die Sonne bewegt, dann besitzt er die Zentripetalbeschleunigung $\frac{v^2}{r}$. Diese Beschleunigung kommt nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz durch die Anziehung zwischen der Sonne und dem Planeten zustande. Es gilt:

$$F = ma \Rightarrow \gamma \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r},$$

wobei M die Masse der Sonne und m die Masse des Planeten ist. Da beide Seiten der Gleichung m enthalten, lässt sich dieses herauskürzen. Nun gilt $v = \frac{2\pi}{T} r$.

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} r^3$$

Da in dieser Gleichung kein m mehr vorkommt, gilt sie für alle Planeten. Dies ist aber gerade das 3. Keplersche Gesetz, welches besagt, dass das Quadrat der Umlaufzeit eines Planeten proportional zur dritten Potenz seiner Umlaufbahn ist.

2.2.3 Versuchsaufbau

Da für die Herleitung der Formel zur Bestimmung von γ der Aufbau der Gravitationswaage von entscheidender Bedeutung ist, wird dieser hier schon vorweggenommen.

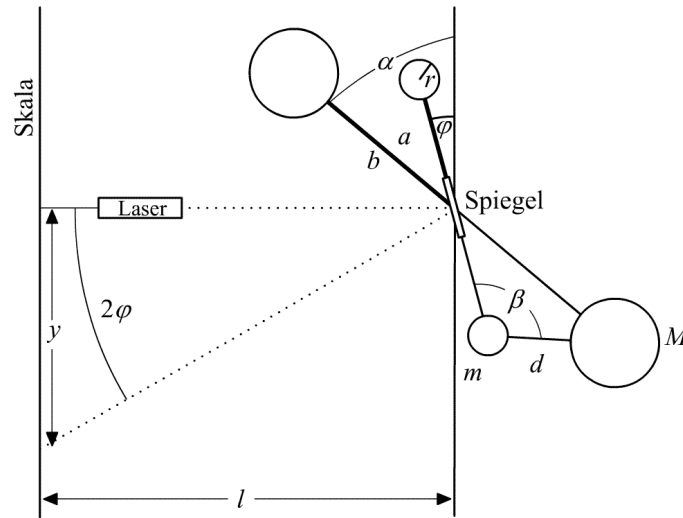


Abbildung 11: Versuchsaufbau

An einem dünnen Torsionsfaden sind ein Spiegel und am Ende zwei kleine Kugeln angebracht. Über einen Lichtzeiger, der an dem Spiegel reflektiert und auf eine Skala projiziert wird, lässt sich die Drehung des Torsionsfadens messen. Die kleinen Kugeln befinden sich in einem evakuierten Glaszylinder um dessen Innenseite ein Kupfergitter befestigt ist. Das Kupfergitter hat den Sinn, dass sich die Kugeln und der Faden nicht statisch aufladen können, da sie sonst aufgrund der wirkenden Coulombkraft die Messung verfälschen würden. Um den Glaszylinder herum sind zwei große Bleikugeln drehbar befestigt. Die Kugelpaare [eine große und eine kleine Kugel] liegen nicht in einer Ebene sondern vertikal versetzt. Somit wirkt die Gravitation des einen Kugelpaares weniger auf das andere Kugelpaar. Durch Drehung der großen Kugeln wirkt die Gravitationskraft auf die kleinen Kugeln. Dadurch wird ein Drehmoment auf den Torsionsfaden ausgeübt und das System beginnt zu schwingen. Die neue Ruhelage ist genau die, wo sich die wirkende Gravitationskraft und das Drehmoment vom Torsionsfaden aufheben.

2.2.4 Bestimmung der Gravitationskonstante

Auf die kleinen Kugeln wirkt die Gravitationskraft:

$$F = \gamma \frac{Mm}{d^2}$$

wobei d der Abstand zwischen einer kleinen und der näherliegenden großen Kugel ist. Somit wirkt auf die kleinen Kugeln ein Drehmoment

$$|\vec{M}_{\text{Grav}}| = 2 |a \times F| = 2 |a| |F| \sin \beta = 2 a \gamma \frac{Mm}{d^2} \sin \beta$$

Nun gilt $\sin \beta = \frac{b \sin(\alpha - \varphi)}{d}$

$$\Rightarrow M_{\text{Grav}} = 2a\gamma \frac{Mm b \sin(\alpha - \varphi)}{d^3}$$

und nach dem Kosinussatz gilt $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha - \varphi)$, womit sich M_{Grav} vereinfacht zu

$$M_{Grav} = \frac{2a\gamma Mmb \sin(\alpha - \varphi)}{(a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha - \varphi))^{\frac{3}{2}}}$$

Durch die Torsion des Fadens wirkt ein entgegengesetztes Drehmoment $M_T = D\varphi$ auf die kleinen Kugeln, das in der Ruhelage vom Betrag her genauso groß ist wie M_{Grav} . Dabei ist D die Winkelrichtgröße des Torsionsmomentes, die sich experimentell aus der Schwingungsdauer T bestimmen lässt. Es gilt

$$D = \frac{4\pi^2}{T^2} J$$

wobei J das Trägheitsmoment der Torsionshantel ist. Das Trägheitsmoment einer Kugel mit der Drehachse durch den Schwerpunkt ist $J_s = \frac{2}{5}mr^2$. Der Schwerpunkt der Kugeln ist im Abstand a zu dem Torsionsfaden. Nun lässt sich mit Hilfe des Steinerschen Satzes das Trägheitsmoment der Kugeln ausrechnen:

$$J = 2(J_s + ma^2) = 2m\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right)$$

Durch einsetzen ergibt sich das rücktreibende Drehmoment M_T

$$M_T = D\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} J \varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} 2m\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right)\varphi = \frac{8\pi^2 m\varphi}{T^2} \left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right)$$

In der Gleichgewichtslage gilt $M_T = M_{Grav}$:

$$\frac{8\pi^2 m\varphi}{T^2} \left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right) = \frac{2a\gamma Mmb \sin(\alpha - \varphi)}{(a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha - \varphi))^{\frac{3}{2}}}$$

Da $\varphi \ll \alpha$ gilt $\sin(\alpha - \varphi) \approx \sin \alpha$ und $\cos(\alpha - \varphi) \approx \cos \alpha$. Löst man die Gleichung nach γ auf, erhält man

$$\gamma \approx 4\pi^2 \varphi \frac{\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right)(a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}{abMT^2 \sin \alpha}$$

Da beide Drehmomente m [die Masse der kleinen Kugeln] enthalten, kürzen sich diese beim Gleichsetzen heraus.

2.3 Versuchsdurchführung

2.3.1 Versuchsdurchführung

Für die Messung befindet sich das System anfänglich in Ruhelage. Das heißt, dass die großen Kugeln so gedreht sind, dass kein Drehmoment auf den Torsionsfaden wirkt. In dieser Lage wird der Lichtzeiger an der Skala abgelesen. Danach werden die großen Kugeln in einem Winkel von 54° um die kleinen Kugeln gedreht. Bei diesem Winkel wirkt das maximale Drehmoment auf den Torsionsfaden. Die kleinen Kugeln beginnen zu schwingen und man misst nun den Ausschlag auf der Skala alle 15 s über 5 Perioden. Danach werden die großen Kugeln in einen Winkel von -54° gebracht und die Messung wird wiederholt.

2.4 Auswertung

Wir arbeiteten an der Drehwaage II. Hier sind noch einmal die Parameter unserer Apparatur aufgelistet:

Senkrechte Lichtzeigerlänge	l [m]	2.71
Masse der großen Kugeln	M [kg]	9.993
Masse der kleinen Kugeln	m [kg]	0.02
Radius der kleinen Kugeln	r [m]	0.0075
Abstand Schwerpunkt - Drehachse kl. Kugeln	a [m]	0.024
Abstand Schwerpunkt - Drehachse gr. Kugeln	b [m]	0.102

2.4.1 Messreihe 1

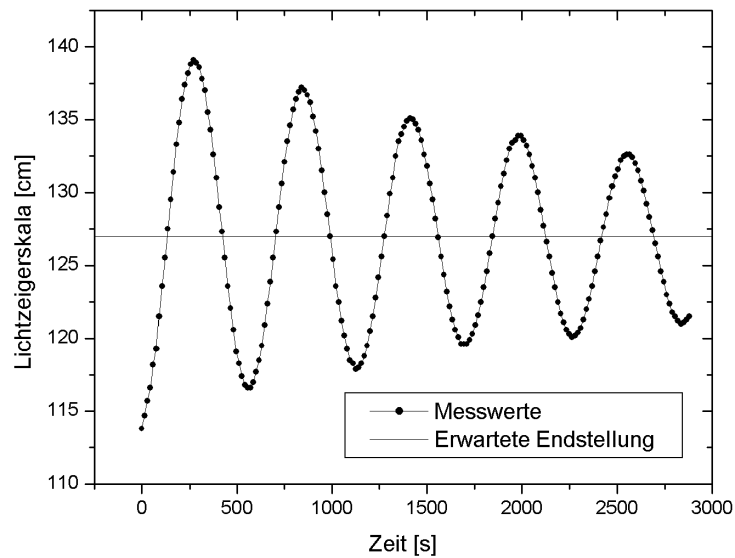


Abbildung 12: Messreihe 1

Die Nullauslenkung lag bei 113,8 cm.

Aus je drei aufeinanderfolgenden Maximalausschlägen y_i wurde nun die erwartete Endstellung $\bar{y} = \frac{y_1 + 2y_2 + y_3}{4}$ berechnet. $T/2$ ist die Zeit zwischen den Maximalausschlägen.

y_i [cm]	\bar{y} [cm]	$T/2$ [s]
139.1	-	270
116.6	-	285
137.2	127.38	285
117.9	127.23	285
135.1	127.03	285
119.6	126.93	285
133.9	127.05	300
120.1	126.88	270
132.6	126.68	300
121	126.58	270

Für \bar{y} ergibt sich der Mittelwert 126,97 cm. Die mittlere Auslenkung ergibt sich, wenn von diesem Wert noch die Nullauslenkung abgezogen wird. Es ergibt sich eine mittlere Auslenkung von $y = 0,132$ m mit dem Fehler $\sigma_y = 0,002$ m. Dieser errechnet sich durch eine Abschätzung der Geschwindigkeit der Pendelbewegung nahe beim Maximalausschlag.

Nun lässt sich daraus der Winkel φ aus der Geometrie der Gravitationswaage bestimmen [siehe Abbildung 1]. Es gilt

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y}{l}\right) = 0,0243 \text{ rad}$$

mit dem Fehler

$$\sigma_\varphi = \sqrt{\sigma_y^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \sigma_l^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right)^2} = 0,0004 \text{ rad}$$

Hier bei wurde $\sigma_l = 0,005$ m angenommen.

Da die Skala nur alle 15 s abgelesen wurde ist der Fehler für eine halbe Periode $\sigma_{y_i} = 7,5$ s. Für die Periode ergibt sich der gewichtete Mittelwert $T = 567$ s mit dem Fehler $\sigma_T = 2 \cdot (2,4 \text{ s} + \Delta T_{sys}) = 2 \cdot (2,4 \text{ s} + 0,01 \text{ s} + 0,005 \cdot 283,5 \text{ s}) = 7,66$ s.

Da der Drehteller am Anfang des Versuches nicht auf 0, sondern auf $3,5^\circ$ gedreht war, haben wir den Drehteller auf 50° gedreht, und es gilt

$$\alpha = \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \cdot (50^\circ - 3,5^\circ) = 0,8116 \text{ rad}$$

Nun können wir die Gravitationskonstante berechnen:

$$\gamma = 4\pi^2 \varphi \frac{\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right)(a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}{abMT^2 \sin \alpha} = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Der Fehler berechnet sich nach der Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_\gamma = \sqrt{\sigma_\varphi^2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \right)^2 + \sigma_T^2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right)^2} = 0,207 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \ s^2}$$

Der Literaturwert [Quelle: Praktikumsskript] liegt bei

$$\gamma = 6,67259(85) \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \ s^2}$$

2.4.2 Messreihe 2

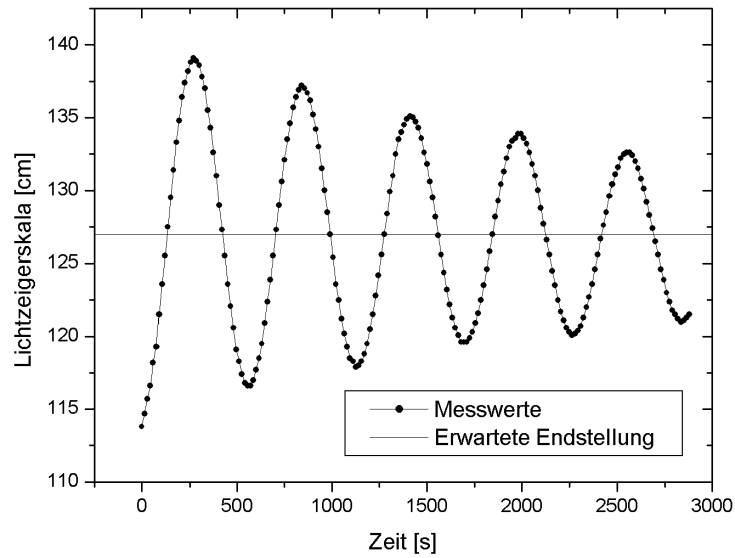


Abbildung 13: Messreihe 2

y_i [cm]	\bar{y} [cm]	$T/2$ [s]
69.5	-	225
125.4	-	285
73.5	98.45	285
121.1	98.38	285
77	98.18	300
117.3	98.1	285
80	97.9	285
114	97.83	285
82.6	97.65	285
111.2	97.6	285

Für \bar{y} ergibt sich der Mittelwert 98,01 cm. Es ergibt sich eine mittlere Auslenkung von $y = 0,158$ m mit dem Fehler $\sigma_y = 0,005$ m.

Nun ist $\varphi = 0,0291$ rad mit dem Fehler $\sigma_\varphi = 0,0010$ rad.

Für die Periode ergibt sich der gewichtete Mittelwert $T = 561$ s mit dem Fehler $\sigma_T = 2,4$ s + $\Delta T_{sys} = 7,57$ s.

Diesesmal haben wir den Drehteller auf -50° gedreht, und es ist

$$\alpha = \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \cdot (-50^\circ) = -0,873 \text{ rad}$$

Nun können wir die Gravitationskonstante berechnen:

$$\gamma = 8,082 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Der Fehler berechnet sich nach der Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_\gamma = 0,337 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Und noch mal zur Erinnerung: Der Literaturwert [Quelle: Praktikumsskript] liegt bei

$$\gamma = 6,67259(85) \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

2.5 Diskussion

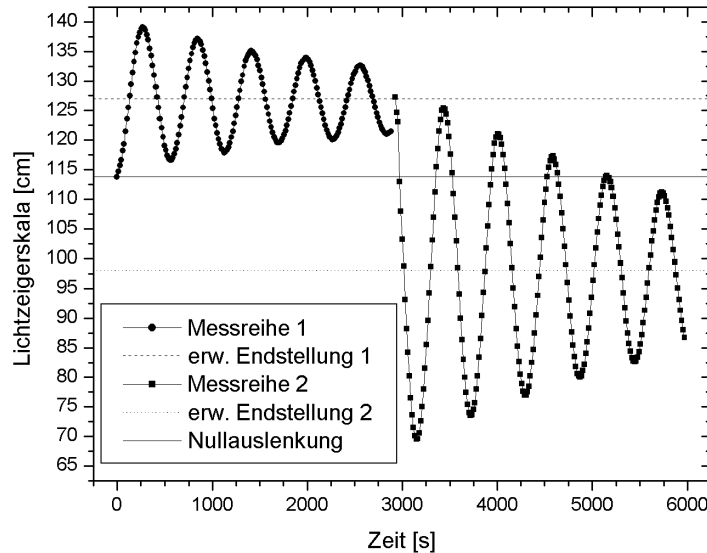


Abbildung 14: Vergleich

Bei Messreihe 1 liegt der Fehlerbalken in dem Bereich des zur Zeit anerkannten Wertes von γ . Unser Ergebnis stimmt mit γ sogar in der Größenordnung 10^{-13} überein. Hier ist es denkbar, ob wir unseren Fehler überschätzt haben.

Der errechnete Wert für γ ist bei Messreihe 2 zu klein. Das liegt wahrscheinlich daran, dass die kleinen Kugeln nach dem Drehen der großen Kugeln sehr stark beschleunigt wurden, so dass die Amplitude der Schwingung sehr groß wurde. Hieran kann man erkennen, dass es wichtig ist, dass der Versuch begonnen wird, wenn der Aufbau in vollkommener Ruhe ist.

Es ist erfreulich, dass wir trotz des vergleichsweise geringem Messaufwandes einigermaßen sinnvolle Ergebnisse erzielt haben.

Wir glauben, dass der Zeitpunkt des Beginns der 2. Messreihe von entscheidender Bedeutung ist. Wie man in Abbildung 4 erkennen kann, haben wir die großen Kugeln gedreht, als die Schwingung gerade „nach oben“ ging, der Winkel φ also größer wurde. Hätte man die großen Kugeln schon vorher gedreht, wären die kleinen Kugeln noch stärker beschleunigt worden, und die Amplitude der 2. Messreihe wäre noch größer geworden. Wahrscheinlich wäre dann auch der errechnete Wert für γ noch größer geworden.

Eigene Kommentare

[Langweiliger gehts nicht oder?]_{Daniel}

[Versuch nervig, dafür Auswertung toll und Theorie faszinierend.]_{Hauke}

3 Das Trägheitsmoment

Versuch durchgeführt am 21. April 2005, Protokoll erarbeitet von Daniel Scholz.

3.1 Einleitung

Die Physik hat das Bestreben sämtliche Formen von Bewegung durch Gleichungen fassbar zu machen. Dazu unterscheidet man zwischen zwei Typen in der Dynamik: ***Translations- und Rotationsbewegungen***. Durch den vorliegenden Versuch soll die Rotationsbewegungen studiert und analysiert werden. Zu diesem Zweck wird insbesondere die Rolle des Trägheitsmomentes betrachtet. Es schließt sich dann die Berechnung dieser Größe für verschiedene Körper an.

3.2 Theorie

3.2.1 Definition des Trägheitsmomentes

Es sollen starre Körper betrachtet werden, die sich um eine feste Achse drehen. Die Vorstellung, solch ein Körper sei aus infinitesimal kleinen Massenelementen dm_i mit festem Abstand r_i von der Drehachse zusammengesetzt, erleichtert die Berechnungen der entscheidenden Größen. Jedes dieser Massenelemente besitzt eine Geschwindigkeit v_i und hat daher die ***kinetische Energie***

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_i dm_i v_i^2.$$

Für die Beschreibung von Rotationsbewegungen ist die so genannte Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ mit

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

von entscheidender Bedeutung. Sie beschreibt den Winkel, den ein Massenelement in einer Zeiteinheit überstreicht und ist für jedes Element m_i , das an der Bewegung um die Drehachse beteiligt ist, gleich. Es folgt dann

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_i dm_i r_i^2 \omega^2.$$

Für den gesamten Körper erhält man somit die ***Rotationsenergie***

$$E_{rot} = \lim_{dm \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_i dm_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V r^2 \varrho dV,$$

dabei ist ϱ die Dichte und V das Volumen des Körpers.

Da dieser Ausdruck bei Rotationsbewegungen ausserordentlich wichtig ist, definiert man nun

$$J = \int_V r^2 \varrho \, dV = \int_V r^2 \, dm$$

als das **Trägheitsmoment**.

3.2.2 Analogien zwischen Translation und Rotation

Anhand dieser Definition werden die Analogie zur kinetischen Energie der Translationsbewegung besonders deutlich, denn es gilt nun gerade

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2.$$

Die folgende Tabelle zeigt weitere Analogien zwischen Translation und Rotation:

	Translation	Rotation
	Masse m	Trägheitsmoment J
Ort	\vec{r}	$\vec{\varphi}$
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\dot{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}$
Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	$E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$
	Kraft \vec{F}	Drehmoment \vec{M}
	Impuls \vec{p}	Drehimpuls \vec{L}
Bewegungsgleichung	$\vec{F} = m \vec{a}$	$\vec{M} = J \vec{\dot{\omega}}$
	Impulserhaltung	Drehimpulserhaltung

3.2.3 Satz von Steiner

Es ist einzusehen, dass das Trägheitsmoment von der betrachteten Drehachse abhängt. Im folgenden sei A die Drehachse, die durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft. Wenn sich ein Körper um eine Achse A' dreht, die parallel zu A ist, so lässt sich das Trägheitsmoment bezüglich der Achse A' leicht aus demjenigen bezüglich der Schwerpunktachse berechnen.

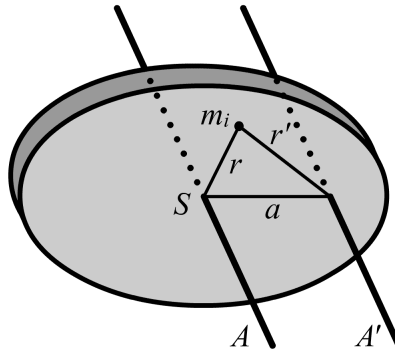


Abbildung 15: Satz von Steiner

Sei nun a der Abstand zwischen A und A' . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 J_{A'} &= \int_V r'^2 dm = \lim_{dm \rightarrow 0} \sum_i dm_i r_i'^2 \\
 &= \lim_{dm \rightarrow 0} \sum_i dm_i (r_i^2 + 2ar_i + a^2) \\
 &= \lim_{dm \rightarrow 0} \left(\sum_i dm_i r_i^2 + \sum_i dm_i 2ar_i + \sum_i dm_i a^2 \right) \\
 &= \lim_{dm \rightarrow 0} \left(\sum_i dm_i r_i^2 + \sum_i dm_i a^2 \right) \\
 &= \lim_{dm \rightarrow 0} \left(\sum_i dm_i r_i^2 + a^2 \sum_i dm_i \right) \\
 &= \int_V r^2 dm + a^2 \int_V dm = J_A + Ma^2.
 \end{aligned}$$

Die mittlere Summe verwindet, da A die Achse durch den Schwerpunkt ist. Die nun erhaltende Gleichung

$$J_{A'} = J_A + Ma^2$$

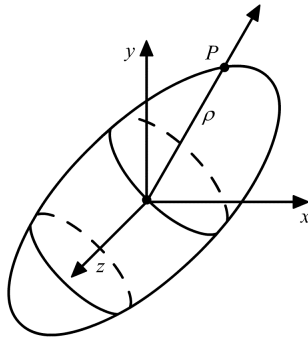
beschreibt den **Satz von Steiner**.

3.2.4 Trägheitsellipsoid

Wie bereits erklärt, besitzt ein Körper, der um eine beliebige Achse durch den Schwerpunkt rotiert, ein Trägheitsmoment J_A und im Allgemeinen verschiedene Trägheitsmomente bezüglich dazu senkrechter Achsen B und C .

Spielt man auf diese Weise alle möglichen Kombinationen zueinander orthogonaler Achsen durch, so zeichnen sich zwei von ihnen besonders aus, da das Trägheitsmoment für eine Rotation um diese Achsen maximal bzw. minimal ist. Bezüglich der zu den beiden genannten senkrechten Achse nimmt das Trägheitsmoment einen Sattelpunkt an. Diese drei Achsen heißen **Hauptträgheitsachsen** des Körpers. Bei homogenen geometrischen Körpern sind die Hauptträgheitsachsen immer zugleich Symmetrieachsen. Ein Körper rotiert immer um die Hauptträgheitsachsen, wenn die Drehachse nicht im Raum fixiert ist.

Das Finden der Hauptträgheitsmomente ist äquivalent zum Diagonalisieren des Trägheitstensors, denn letzterer ist ein symmetrischer reeller Tensor der positiven Eigenwerte. Damit beschreibt die zugehörige Matrix eine quadratische Form. Aufgrund der ausschließlich positiven Eigenwerte hat diese Form die Gestalt eines Ellipsoids. Führt man eine Hauptachsentransformation durch, so liefert dies die Eigenwerte, die zugleich die Hauptträgheitsmomente sind. Der entsprechende Ellipsoid wird **Trägheitsellipsoid** genannt. Zeichnet man den Trägheitsellipsoiden auf, so lässt sich mit seiner Hilfe das Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen anderen Achse bestimmen, indem man den Abstand des Durchstoßpunktes der Achse durch den Ellipsoiden berechnet.

Abbildung 16: Trägheitsellipsoid mit ρ

Denn für diesen gilt die Beziehung

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{J}}.$$

Damit entspricht die größte Ellipsoidachse dem kleinsten und die kleinste Ellipsoidachse dem größten Trägheitsmoment.

3.2.5 Physikalisches Pendel

Ein physikalisches Pendel unterscheidet sich von dem mathematischen Pendel dadurch, dass hier ein ganzer Körper, also ein Kontinuum von Massenpunkten, außerhalb des Schwerpunktes an einer Drehachse aufgehängt ist und um diese schwingen kann. Bei einem mathematischen Pendel dagegen ist der Körper als Massepunkt idealisiert.

Sei nun m die Masse des pendelnden Körpers und r der Abstand des Massmittelpunktes zur Drehachse. Die Schwerkraft $F = mg$ wirkt auf das Pendel, womit für das rücktreibende Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad M = -rF \sin \varphi = -rmg \sin \varphi$$

gilt. Für kleine Winkel φ gilt $\sin \varphi \approx \varphi$ und somit vereinfacht sich M bei kleinen Auslenkungen zu

$$M \approx -rmg\varphi$$

Durch $M = J\ddot{\varphi}$ erhält man somit die Schwingungsgleichung

$$J\ddot{\varphi} + rmg\varphi = 0.$$

Nun lässt sich das physikalische Pendel wie ein mathematisches betrachten, dessen Fadenlänge durch

$$l = \frac{J}{mr}$$

gegeben wird. Da für ein mathematisches Pendel gerade

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \Rightarrow \quad T_s = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

gilt, ergibt sich daraus die Frequenz der Schwingung eines physikalischen Pendels:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{J}}.$$

Stellt man diese Formel nun nach J um, so erhält man mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ das Trägheitsmoment des Pendels:

$$J = \frac{mgr}{\omega^2} = \frac{mgrT^2}{4\pi^2}.$$

In diesem Versuch wird nun an dem großen Rad der Masse M noch ein Zusatzgewicht der Masse m_z im Abstand z zur Drehachse befestigt. Somit ist die Gesamtmasse des Pendels $M_{\text{gesamt}} = M + m_z$. Nach dem Hebelgesetz gilt nun für den Schwerpunkt des Rades

$$s = \frac{0 \cdot M + z \cdot m_z}{M + m_z} = \frac{zm_z}{M + m_z}.$$

Also gilt für das Trägheitsmoment des Pendels

$$J = \frac{(M + m_z)gsT^2}{4\pi^2} = \frac{(M + m_z)g(\frac{zm_z}{M + m_z})T^2}{4\pi^2} = \frac{gzm_zT^2}{4\pi^2}.$$

Dieses Trägheitsmoment umfasst allerdings noch die Masse des Zusatzgewichtes m_z , durch die die Pendelbewegung ausgelöst wird. Um J_{Rad} zu erhalten, muss das berechnete J noch um das Trägheitsmoment dieser Schwungsmasse reduziert werden, welches sich zu $J_m = m_z z^2$ berechnet. Somit folgt

$$J_{\text{Rad}} = J - m_z z^2 = \frac{m_z g z T^2}{4\pi^2} - m_z z^2.$$

3.2.6 Trägheitsmoment aus dem Drehmoment

Zur experimentellen Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Körpers kann dieser mit einer Feder in eine Drehschwingung versetzt werden. Aus der Periodendauer der Schwingung kann man nun das Trägheitsmoment berechnen.

Wenn eine Feder um einen Winkel φ ausgelenkt wird, so erzeugt dies ein rücktreibendes Drehmoment M , welches in vollkommener Analogie zum Federkraftgesetz

$$F = -Dx$$

durch die so genannte **Winkelrichtgröße** D beschrieben wird:

$$M = -D\varphi.$$

Andererseits gilt für das Drehmoment

$$M = J\dot{\omega} = J\ddot{\varphi}.$$

Durch Gleichsetzen erhält man eine Differentialgleichung, die die Schwingung beschreibt. Für diese lässt sich ein harmonischer Ansatz wählen, aus dem eine Beziehung für die Periodendauer T_s gewonnen werden kann:

$$J = D \cdot \left(\frac{T_s}{2\pi} \right)^2.$$

Dabei ist natürlich zu beachten, dass das Trägheitsmoment der verbindenden Achse sowie der Feder selbst vernachlässigt wurde.

3.2.7 Trägheitsmoment aus der Winkelrichtungsgröße

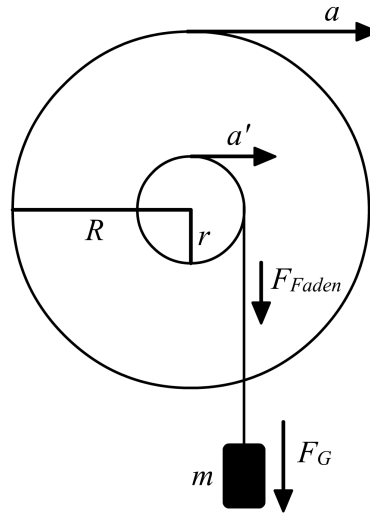


Abbildung 17: Skizze des Rades mit Schwungrad

Auf das Gewicht der Masse m wirkt die Schwerkraft $F_G = mg$. Wenn sich das Schwungrad in Bewegung setzt, so übt der Faden weniger Kraft auf das Schwungrad aus. Es gilt

$$F_{Faden} = mg - ma' = m(g - a').$$

Für das am Schwungrad angreifende Drehmoment gilt also

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \Rightarrow M = F_{Faden} \cdot r.$$

Mit dem Trägheitsmoment des Rades J und dessen Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \alpha$ gilt nun für das angreifende Drehmoment die Bewegungsgleichung

$$M = J\alpha.$$

Stellt man dies nach J um, so ergibt sich

$$J = \frac{M}{\alpha} = \frac{F_{Faden} \cdot r}{\alpha} = \frac{m(g - a')r}{\alpha}.$$

Bildet man nun die zeitliche Ableitung der für die Kreisfrequenz ω geltende Formel $\omega R = v$, ergibt sich

$$\dot{\omega} R = \dot{v} \quad \text{oder anders} \quad \alpha R = a.$$

Daraus folgt

$$\alpha = \frac{a}{R}.$$

Analog gilt $\alpha r = a'$, woraus

$$a' = \frac{a}{R} r$$

folgt. Setzt man α und a' nun in J ein, ergibt sich für das Trägheitsmoment des Rades

$$\begin{aligned} J &= \frac{m(g - a')r}{\alpha} \\ &= \frac{m(g - \frac{a}{R}r)rR}{a} \\ &= \frac{(mg - \frac{mar}{R})rR}{a} \\ &= \frac{mgrR}{a} - mr^2. \end{aligned}$$

3.2.8 Trägheitsmoment verschiedener Körper

Im Folgenden wurden die Trägheitsmomente verschiedener Körper zusammengetragen.

- (1) Kreisscheibe mit Radius R . Achse ist Symmetrieachse.

$$J = \frac{1}{2}MR^2$$

- (2) Kugel mit Radius R . Achse durch Mittelpunkt.

$$J = \frac{2}{5}MR^2$$

- (3) Stab mit Länge L . Achse durch das Stabende und senkrecht zur Stabrichtung.

$$J = \frac{1}{3}ML^2$$

- (4) Stab mit Länge L . Achse durch die Stabmitte und senkrecht zur Stabrichtung.

$$J = \frac{1}{12}ML^2$$

- (5) Würfel der Kantenlänge A . Achse durch Flächenmitte oder Achse diagonal.

$$J = \frac{1}{6}MA^2$$

- (6) Hohlzylinder mit Radien R und r . Achse ist Symmetrieachse.

$$J = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2)$$

- (7) Hantelkörper mit Stabmasse M , Hantelkopfmassen M_1 und M_2 , Stablänge $2L$. Achse senkrecht zum Stab.

$$J = \frac{1}{3}ML^2 + M_1L^2 + M_2L^2$$

3.3 Versuchsdurchführung

3.3.1 Versuchsteil A

Der Aufbau besteht aus einer Spiralfeder, an deren Mittelpunkt verschiedene Probekörper fixiert und in Schwingung gebracht werden können. Aus ihrer Schwingungsdauer lässt sich auf die oben beschriebene Weise ihr Trägheitsmoment berechnen. Zunächst wird die Drehachse der Spiralfeder parallel zur Tischebene gekippt und durch Anhängen verschiedener Gewichte die Winkelrichtgröße bestimmt, wobei zu beiden Seiten hin ausgelenkt wird. Zur Berechnung des Trägheitsmomentes aus den geometrischen Größen müssen diese zuvor natürlich auch notiert werden. Nach Kippen der Spiralfeder orthogonal zur Tischebene, lassen sich die Probekörper anbringen und ihre Periodendauern für mehrere Schwingungen messen. Dabei ist darauf zu achten, dass die Schwingung möglichst frei verläuft [ein Anschlagen der Feder an die Gestellwand ist zu vermeiden]. Für ein "Tischchen" werden die Schwingungsdauern unter verschiedenen Winkeln notiert.

3.3.2 Versuchsteil B

Ein Rad ist mit einem kleineren Rad über eine feste Drehachse verbunden. Durch Anhängen verschiedener Gewichte [100g, 200g, 500g und 1000g] an das kleinere Rad wird mit Hilfe eines Fadens die Erdbeschleunigung in eine Winkelbeschleunigung umgewandelt. Auf das Rad wird zuvor ein Papierstreifen befestigt, auf den durch einen Zeitmarkengeber alle 0.1sec eine Markierung gebracht wird. Daraus ergibt sich die Beschleunigung und damit das Trägheitsmoment.

In einem zweiten Teil wird das Rad durch ein Zusatzgewicht zu einem physikalischen Pendel umgestaltet, aus dessen Schwingung dann ebenfalls das Trägheitsmoment berechnet werden kann.

3.4 Auswertung

3.4.1 Trägheitsmomente der Körper

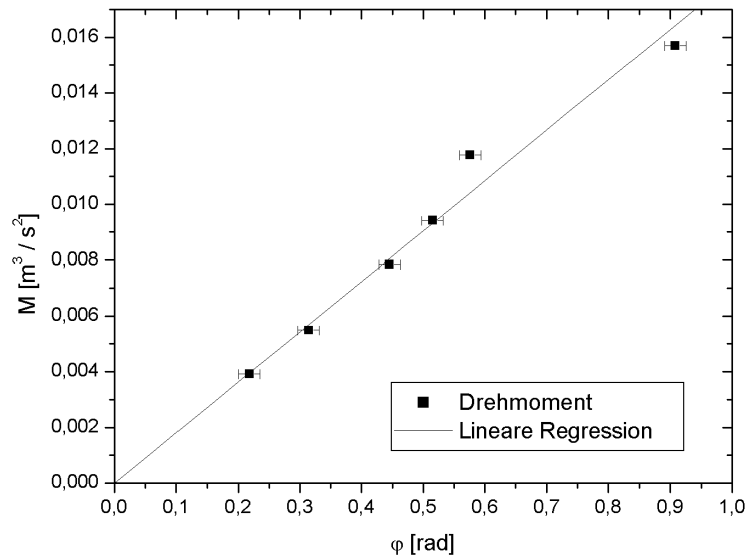
Das Drehmoment M berechnet sich durch

$$M = |\vec{M}| = |\vec{F} \times \vec{r}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| = gmr,$$

wobei r der Radius der Scheibe und m die Masse des angehängten Gewichtes ist.

Für φ wurde der Mittelwert der Ausschläge links und rechts verwendet. Der Fehler wurde auf $\sigma_\varphi = 1^\circ$ geschätzt. Die Unterschiede zwischen der mathematisch positiven und der negativen Auslenkung lassen sich dadurch erklären, dass die Spiralfeder, die dem Drehmoment entgegenwirkt, in die eine Richtung gedehnt und in die andere gestaucht wird.

m [kg]	φ [°]	φ [rad]	M
0.0	0.0	0.0	0.0
0.005	12.5	0.2181	0.003925
0.007	18.0	0.3141	0.005494
0.010	25.5	0.4451	0.007848
0.012	29.5	0.5149	0.009418
0.015	38.0	0.6632	0.011772
0.020	52.0	0.9076	0.015696


Abbildung 18: Bestimmung von D

Durch lineare Regression ergibt sich

$$D = \frac{M}{\varphi} = 0,0181 \text{ Nm}$$

mit dem Fehler

$$\sigma_D = 0,0006 \text{ Nm.}$$

Jetzt lässt sich das Trägheitsmoment der Körper mit der Gleichung

$$J = D \cdot \left(\frac{T_s}{2\pi} \right)^2$$

mit dem Fehler

$$\sigma_J = \sqrt{\sigma_D^2 \left(\frac{\partial J}{\partial D} \right)^2 + \sigma_{T_s}^2 \left(\frac{\partial J}{\partial T_s} \right)^2}$$

berechnen.

Es berechneten sich somit folgende Trägheitsmomente in $kg\,m^2$:

Körper	$J \cdot 10^{-4}$ theor.	$J \cdot 10^{-4}$ exp.	$\sigma_{J_{ex.}} \cdot 10^{-4}$
Kugel	4.13	4.22	0.19
Vollzylinder	2.87	2.81	0.14
Scheibe	13.52	12.63	0.15
Hohlzylinder	22.56	4.88	0.21
Hantel	41.98	48.37	0.46
Würfel [Mitt.pkt.]	4.98	4.73	0.21
Würfel [Ecke]	4.98	4.92	0.21
Stab [Schwerpkt.]	21.88	23.40	0.25
Stab [n. Schwerpkt.]	28.60	30.49	0.31

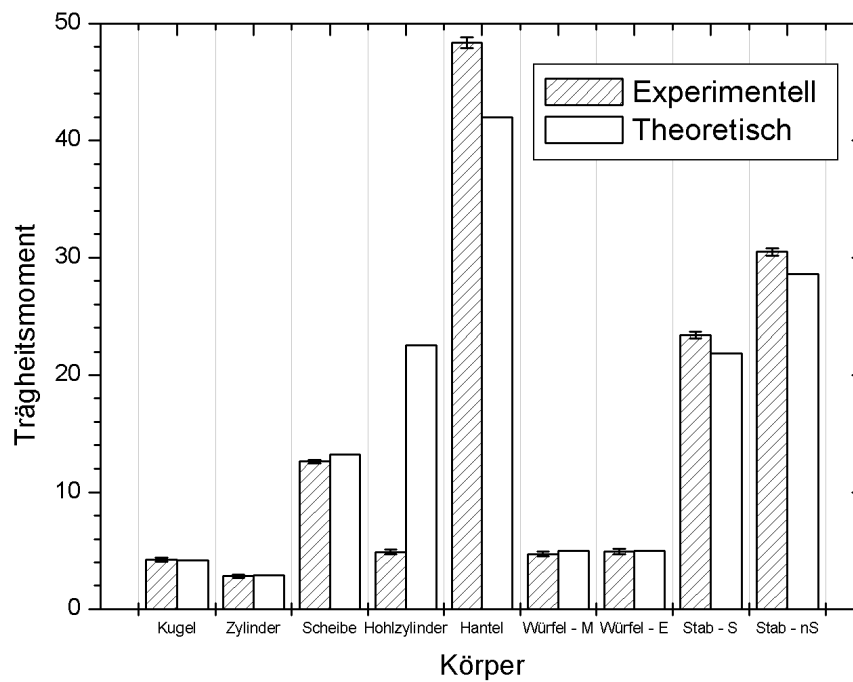


Abbildung 19: Trägheitsmomente der Probekörper

3.4.2 Trägheitsmoment des Tischchens

φ [°]	J	\sqrt{J}
0	$3.1137 \cdot 10^{-4}$	0.017646
30	$2.9962 \cdot 10^{-4}$	0.017310
60	$3.7026 \cdot 10^{-4}$	0.019242
90	$4.4749 \cdot 10^{-4}$	0.021154
120	$4.6363 \cdot 10^{-4}$	0.021532
150	$3.9158 \cdot 10^{-4}$	0.019788
180	$3.1211 \cdot 10^{-4}$	0.017667
210	$2.9817 \cdot 10^{-4}$	0.017267
240	$3.6223 \cdot 10^{-4}$	0.019032
270	$4.4747 \cdot 10^{-4}$	0.021154
300	$4.6001 \cdot 10^{-4}$	0.021448
330	$3.8414 \cdot 10^{-4}$	0.019599

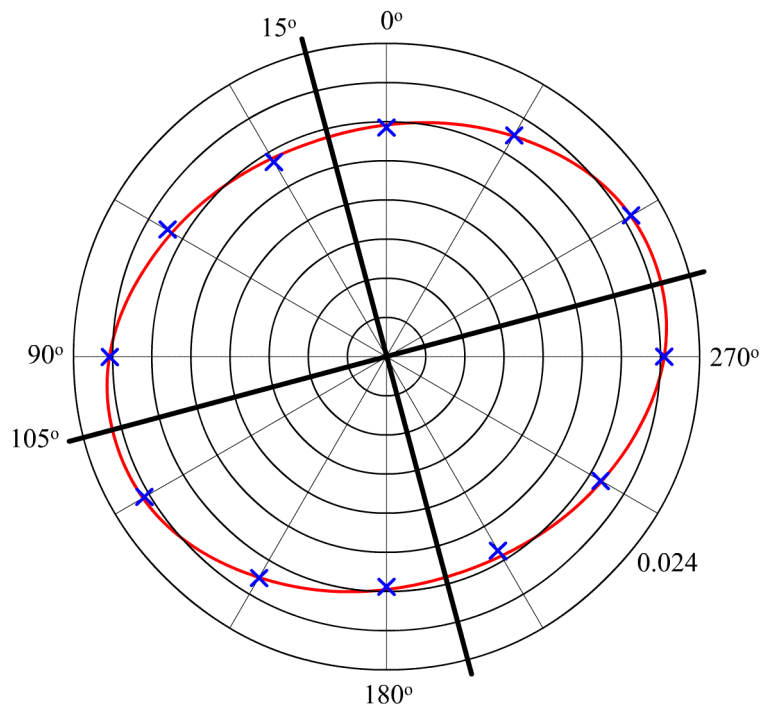


Abbildung 20: Trägheitsellipsoid

Das Trägheitsellipsoid wurde in diesem Versuch nur in zwei Dimensionen betrachtet, somit zeigt die Grafik eine Ellipse. Die Hauptträgheitsachsen des Tischchens wurden bei

15° und 105°

ermittelt.

3.4.3 Trägheitsmoment des Rades

Die Auswertung des Papierstreifens ergab folgende Werte [Abstände in mm]:

Zeit [s]	1.0 kg	0.5 kg	0.2 kg	0.1 kg
0.0	0	0	0	0
0.1	10	11	9	5
0.2	26	11	10	6
0.3	45	14	14	7
0.4	61	23	16	11
0.5	78	30	20	11
0.6	95	41	25	12
0.7	113	49	27	15
0.8	129	56	31	17
0.9	148	66	34	18
1.0	165	74	38	19
1.1	175	82	41	21
1.2	195	91	45	23
1.3	-	98	47	25
1.4	-	108	51	27
1.5	-	117	54	28
1.6	-	123	56	30
1.7	-	131	61	33
1.8	-	135	63	35
1.9	-	-	67	34
2.0	-	-	69	38

Die entsprechenden Winkelbeschleunigung ergeben sich aus einer linearen Regression:

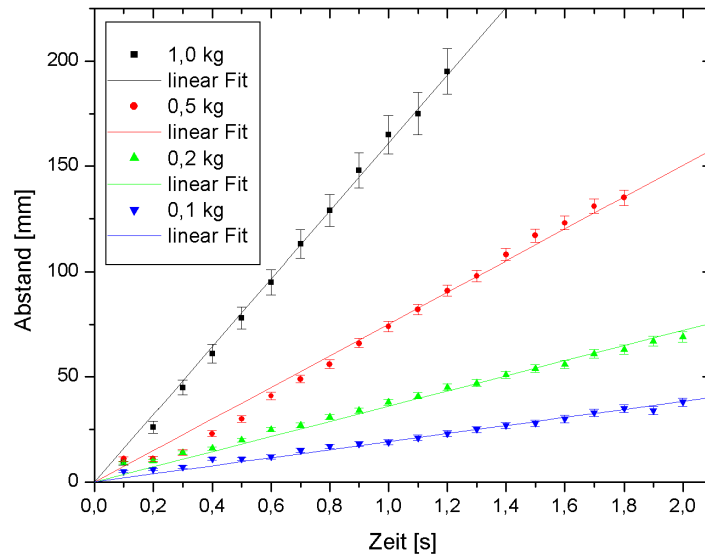


Abbildung 21: Bestimmung von $\ddot{\omega}$

Nun können die Trägheitsmomente mit der Formel

$$J = \frac{rmgR}{\ddot{\omega}} - r^2m$$

berechnet werden. Der Fehler ergibt sich durch das Gesetz der Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_J = \sqrt{\sigma_r^2 \left(\frac{\partial J}{\partial r} \right)^2 + \sigma_R^2 \left(\frac{\partial J}{\partial R} \right)^2 + \sigma_{\ddot{\omega}}^2 \left(\frac{\partial J}{\partial \ddot{\omega}} \right)^2},$$

wobei $\sigma_r = 0,0016 \text{ m}$ und $\sigma_R = 0,0032 \text{ m}$ geschätzt wurde.

m [kg]	$\ddot{\omega} [m s^{-1}]$	$\sigma_{\ddot{\omega}} [m s^{-1}]$	$J [kg m^2]$	$\sigma_J [kg m^2]$
1.0	1.6654	0.0408	0.0878	0.0024
0.5	0.7909	0.0255	0.0926	0.0028
0.2	0.3226	0.0119	0.0909	0.0024
0.1	0.1662	0.0051	0.0884	0.0023

3.4.4 Physikalisches Pendel

Aus unseren Messungen ergibt sich der Mittelwert der Schwingungsdauern $T_s = 2,70 \text{ s}$ mit dem Fehler $\sigma_T = 0,01 \text{ s} + 0,005 \cdot 2,7 \text{ s} \approx 0,03 \text{ s}$.

Nun lässt sich das Trägheitsmoment des Rades nach der Gleichung

$$J = \frac{zmgT_s^2}{4\pi^2} - z^2m$$

berechnen. Der Fehler ergibt sich mittels der Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_J = \sqrt{\sigma_z^2 \left(\frac{\partial J}{\partial z} \right)^2 + \sigma_T^2 \left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)^2}.$$

Es ergibt sich das Trägheitsmoment

$$J = 0.0731 \text{ kg m}^2$$

mit dem Fehler

$$\sigma_J = 0,0049 \text{ kg m}^2.$$

3.5 Diskussion

Versuchsteil A

Die Fehler entstanden vor allem durch Messungenauigkeiten bei der Schwingung und durch die Idealisierung, das Pendel sei reibungslos.

Eine weitere Fehlerquelle ist sicherlich, dass das Trägheitsmoment der verbindenden Achse sowie der Feder vernachlässigt wurde.

Die so sehr große Differenz beim Hohlzylinder ist uns nicht erklärbar. Entweder haben wir uns verzählt oder die Stoppuhr nicht richtig betätigt. Auch wiederholte Prüfungen ergaben keine Aufklärung der Fehlerquelle.

Versuchsteil B

Die Messungen bei den Winkelbeschleunigungen waren sehr gut, die Endergebnisse liegen alle innerhalb der errechneten Fehlerbalken. Das Trägheitsmoment aus den Schwingungsdauern des Pendels unterscheidet sich von den vorherigen Messungen, da das Pendel als reibungslos betrachtet wurde.

Eigene Kommentare

[Erster Versuch, war ganz nett, aber wir werden noch viel lernen.]_{Daniel}

[Der Versuch war eigentlich recht spannend, die Auswertung war für den ersten Versuch nicht unbedingt gnädig, aber irgendwann muss man es ja lernen.]_{Hauke}

4 Kreiselpräzession

Versuch durchgeführt am 28. April 2005, Protokoll erarbeitet von Hauke Rohmeyer.

4.1 Einleitung

In diesem Versuch sollen, nach der Besprechung des Trägheitsmomentes, nochmals die Bewegungsgleichungen starrer rotierender Körper vermittelt werden. Im Rahmen dieses Versuchs soll insbesondere die Präzession eines Kreisels gemessen werden. Diese ist, wenn man sie das erste Mal beobachtet sehr erstaunlich. Doch lässt sie sich mit Hilfe der Bewegungsgleichungen starrer rotierender Körper gut erklären.

4.2 Theorie

4.2.1 Winkelgeschwindigkeit

Mit der Translationsgeschwindigkeit lassen sich Geschwindigkeiten starrer rotierender Körper nicht elegant ausdrücken. Denkt man sich z.B. eine Kreisscheibe, so legen Punkte, die weiter von der Drehachse entfernt sind, in der gleichen Zeit eine längere Strecke zurück, als Punkte, die nahe an der Drehachse liegen. Denkt man sich jedoch eine Linie von der Drehachse zu einem beliebigen Punkt x , so überstreichen alle Punkte auf dieser Linie in einer gegebenen Zeit den gleichen Winkel ϕ . Die zeitliche Änderung dieses Winkels ist die **Winkelgeschwindigkeit** ω , mit der man die Geschwindigkeit eines starren rotierenden Körpers ausdrückt:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}.$$

Aus dieser Definition folgt der Zusammenhang zwischen Translations- und Winkelgeschwindigkeit:

$$v = \omega r \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{v}{r}.$$

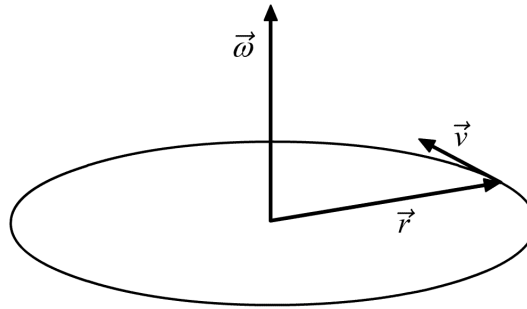


Abbildung 22: Translations- und Winkelgeschwindigkeit.

Mit der Umlaufzeit T für eine Drehung um den Winkel 2π wird die Winkelgeschwindigkeit zu

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

4.2.2 Drehimpuls und Drehmoment

Für einen starren Körper, der um eine feste Achse rotiert, erhält man den **Drehimpuls** L , wenn man den Impuls eines jeden Massenpunktes m mit seinem Abstand r von der Drehachse multipliziert und über den ganzen Körper summiert, also:

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i.$$

Mit $p = mv$, $v = \omega r$ und $J = mr^2$ ergibt sich

$$L = rmv = rm\omega r = mr^2\omega = J\omega.$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist das **Drehmoment**

$$M = \frac{dL}{dt}.$$

4.2.3 Kreisel

Ein Kreisel ist ein starrer Körper der um eine freie Achse rotiert, die nur in einem Punkt unterstützt wird. Ist dies der Massenmittelpunkt so heißt der Kreisel kräftefrei, sonst spricht man von einem schweren Kreisel. Bei einem symmetrischen Kreisel ist der rotierende Körper symmetrisch zur Drehachse.

4.2.4 Präzession

Wenn die Drehachse des Kreisels horizontal gehalten wird und der Kreisel sich nicht dreht, so fällt er aufgrund der Schwerkraft einfach nach unten. Dreht sich der Kreisel jedoch, so weicht die Drehachse horizontal aus. Diese Bewegung nennt man **Präzession**. Sie lässt sich dadurch erklären, dass das Drehmoment senkrecht zur einwirkenden Kraft und zum Drehimpuls steht.

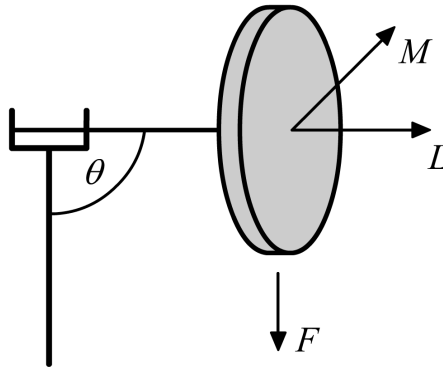


Abbildung 23: Ein schwerer symmetrischer Kreisel.

Es ist also zu zeigen, dass $M \perp F$ und $M \perp L$ gilt. Es ist

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Nach der Definition von \vec{M} folgt

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

und nach der Definition des Vektorproduktes schließlich $M \perp F$.

Da aber \vec{r} in die gleiche Richtung zeigt wie \vec{L} folgt ebenfalls $M \perp L$.

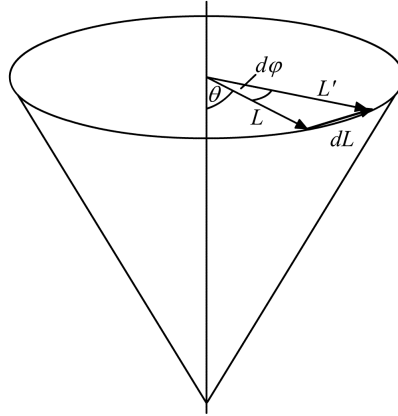


Abbildung 24: Präzession.

Nun lässt sich die **Präzessionsgeschwindigkeit** ω_p berechnen. Die Präzessionsgeschwindigkeit ist die zeitliche Änderung des Winkels φ .

Nun gilt wegen $M = \frac{dL}{dt} \Leftrightarrow M dt = dL$ gerade

$$d\varphi = \frac{dL}{L \sin \theta} = \frac{M dt}{L \sin \theta}.$$

Nach der Definition von ω_p folgt

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L \sin \theta}.$$

Wegen

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{g} = |\vec{r}| m |\vec{g}| \sin \theta$$

vereinfacht sich ω_p zu

$$\omega_p = \frac{rmg \sin \theta}{L \sin \theta} = \frac{rmg}{J\omega_k},$$

wobei ω_k die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels ist.

4.2.5 Nutation

Aufgrund der Bewegung von dem Massenmittelpunkt des Kreisels gibt es ein kleines Drehmoment, das nach oben zeigt. Nun fällt die momentane Drehachse nicht mehr mit der Hauptträgheitsachse [die sog. **Figurenachse**] zusammen, sondern rotiert um diese. Diese Bewegung sieht aus wie ein Nicken des Kreisels und wird **Nutation** genannt.

Nun lässt sich die Nutationsgeschwindigkeit ω_N berechnen.

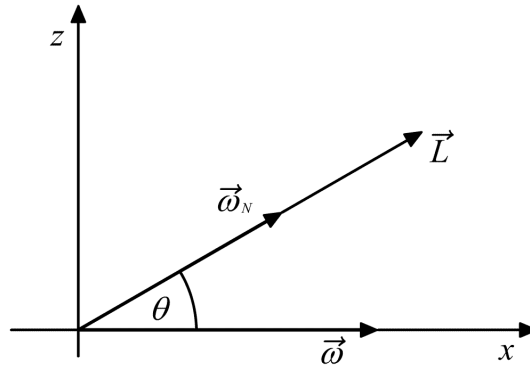


Abbildung 25: Nutation.

Es gilt:

$$(1) \omega_{Nz} = \omega_N \sin \theta$$

$$(2) L_z = J_z \omega_{Nz}, L_x = J_x \omega$$

$$(3) \frac{L_z}{\sin \theta} = L = \frac{L_x}{\cos \theta}$$

Daraus folgt nun

$$\omega_N = \omega_{Nz} \frac{1}{\sin \theta} = \frac{L_z}{J_z} \frac{1}{\sin \theta} = L \frac{1}{J_z} = \frac{L_x}{\cos \theta} \frac{1}{J_z} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{J_x}{J_z} \omega,$$

was sich wegen $\theta \approx 0$, also $\cos \theta \approx 1$ zu

$$\omega_N \approx \frac{J_x}{J_z} \omega$$

vereinfacht.

4.3 Versuchsdurchführung

4.3.1 Versuchsteil A - Physikalisches Pendel

Zunächst wird der Kreisel eingespannt und durch ein Zusatzgewicht in ein physikalisches Pendel verwandelt. Nun wird die Schwingungsdauer über 10 Perioden mehrfach gemessen. Die Messung wird an der diametral gegenüberliegenden Stelle wiederholt.

4.3.2 Versuchsteil B - Präzession

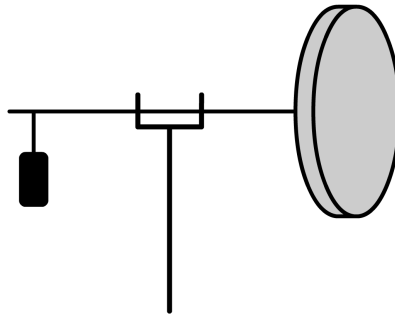


Abbildung 26: Schema des Versuchskreisels mit Zusatzgewicht.

Nachdem die Einspannung entfernt wurde, wird der Kreisel mit dem Ausgleichsgewicht in die horizontale Gleichgewichtslage gebracht. Mit der Aufzugsschnur wird das Rad in schnelle Rotation versetzt. Nun wird die Rotationsperiode des Rades mit Hilfe einer Lichtschranke bestimmt [am äußeren Rand des Rades wurde ein Klebestreifen angebracht damit er die Lichtschranke unterbrechen kann]. Ein Zusatzgewicht wird an die freie Achse des Kreisels gehängt. Nachdem der Kreisel per Hand langsam in die Präzessionsbewegung eingeführt wurde, wird eine halbe Präzessionsperiode gemessen. Diese Schritte [messen der Rotationsperiode des Rades und der Präzessionsperiode des Kreisels] werden zweimal wiederholt. Die gesamte Messung wird mit zwei weiteren Gewichten wiederholt.

4.3.3 Versuchsteil C - Nutation

Wieder wird das Rad in schnelle Rotation versetzt und die Rotationsperiode des Rades gemessen. Nun wird der freien Achse ein Stoß gegeben, und die Nutationsperiode gemessen. Diese beiden Schritte werden zweimal wiederholt.

4.4 Auswertung

4.4.1 Trägheitsmoment aus den Eigenschaften des Rades

Das Trägheitsmoment des Rades um die horizontale Achse wird mit der Formel

$$J_x = \frac{1}{2} m r^2$$

berechnet, wobei m die Masse des Rades und r dessen Radius ist. Es ergibt sich $J_x = 0,00993 \text{ kg m}^2$.

Das Trägheitsmoment des gesamten Kreisels um die Drehachse berechnet sich mit

$$\begin{aligned} J_z &= J_{\text{Ausgleichsgewicht}} + J_{\text{Stange}} + J_{\text{Rad}} \\ &= m_a z_a^2 + \frac{1}{12} m_s l^2 + m_s l'^2 + \frac{1}{4} m_r r^2 + \frac{1}{12} m_r d^2 + m_r z_r^2, \end{aligned}$$

wobei m_a die Masse des Ausgleichsgewichtes und z_a seine Entfernung von der Drehachse ist, m_s die Masse und l die Länge des Stange, l' die Entfernung des Schwerpunktes der Stange zur Drehachse, m_r die Masse des Rades und r dessen Radius, d der Durchmesser des Rades und z_r der Abstand des Rades zur Drehachse. Hierbei wurde das Ausgleichsgewicht als Punktmasse angenommen, z_r mit dem Hebelgesetz ausgerechnet und mehrfach der Steinersche Satz angewendet. Die Masse der Stange wurde auf 400 g geschätzt, ihre Länge auf 50 cm . Der Abstand des Schwerpunktes der Stange zur Drehachse wurde auf 10 cm geschätzt.

Es ergibt sich $J_z = 0,05841 \text{ kg m}^2$.

4.4.2 Trägheitsmoment aus dem Physikalischen Pendel

Aus der Schwingungsdauer T des Rades mit Zusatzgewicht m im Abstand z von der Drehachse und der Gravitationsbeschleunigung g , folgt für das Trägheitsmoment [Herleitung siehe Versuch 03: Das Trägheitsmoment]

$$J = \frac{T^2 g m z}{4\pi^2} - m z^2.$$

Der Fehler der Schwingungsdauer wurde mit

$$\begin{aligned} \Delta T &= \text{kleinster Skalenwert der Stoppuhr} + 0,005 \cdot \text{Messwert} \\ &= 0,01 + 0,005 \cdot T \end{aligned}$$

berechnet. Für den Fehler des Trägheitsmomentes wurde das Gesetz der Fehlerfortpflanzung verwendet,

$$\begin{aligned} \sigma_J &= \sqrt{\sigma_T^2 \left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)^2 + \sigma_z^2 \left(\frac{\partial J}{\partial z} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\sigma_T \frac{T g m z}{2\pi^2} \right)^2 + \sigma_z^2 \left(\frac{T^2 g m}{4\pi^2} - 2m z \right)^2}, \end{aligned}$$

wobei g als Konstante und m als genau angenommen wurde, so dass sie nicht berücksichtigt wurden.

T[s]	ΔT	$J \text{ [kgm}^2\text{]}$	σ_J
1.83	0.02	0.00930	0.00037
1.79	0.02	0.00880	0.00035
1.80	0.02	0.00898	0.00036
1.80	0.02	0.00896	0.00036
1.81	0.02	0.00907	0.00036
1.80	0.02	0.00915	0.00036

Es ergibt sich für den gewichteten Mittelwert $J = 0,00904 \text{ kg m}^2$ mit dem Fehler $\sigma_J = 0,00015 \text{ kg m}^2$.

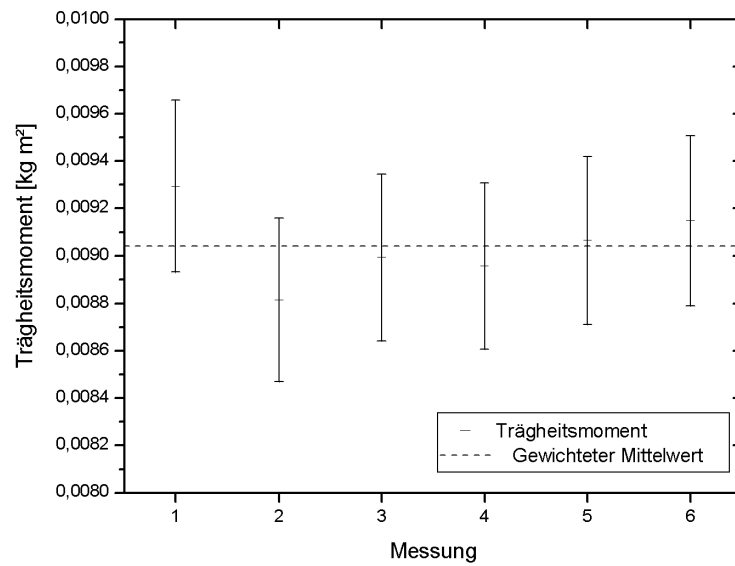
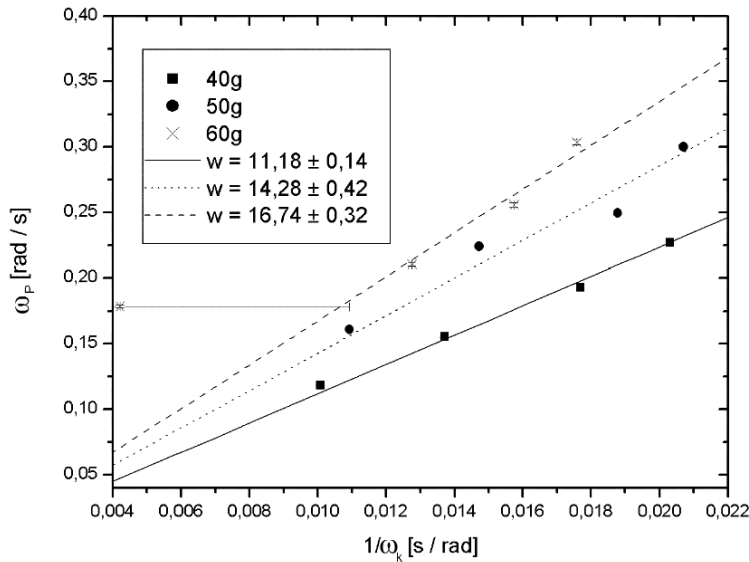


Abbildung 27: Trägheitsmoment aus dem physikalischen Pendel.

4.4.3 Trägheitsmoment aus der Präzessionsgeschwindigkeit

Abbildung 28: Berechnung von $\omega_P \cdot \omega_k$.

Der Fehler der Präzessionsperiode wurde wie in 4.2 berechnet. Leider sind die Fehlerbalken so klein, so dass sie in der Grafik kaum sichtbar sind. Dies ist für uns unerklärlich: wir haben die Fehler mehrmals nachgerechnet.

Der erste Messwert bei dem Zusatzgewicht von 60 g ist ein Messfehler. Dieser auf die falsche Bedienung der Lichtschranke zurückzuführen. Sie wurde wahrscheinlich zu dicht an das Rad gehalten, so dass die zweite Unterbrechung des Lichtstrahles nicht durch den Klebestreifen, sondern durch das Rad selber ausgelöst wurde.

Für ω_k wurde der Mittelwert der Rotationsgeschwindigkeit vor und nach der Messung der Präzessionsfrequenz genommen [ausser bei dem jeweils letzten Wert - das Praktikumsprotokoll war ein wenig ungenau, so dass wir die Rotationsfrequenz nicht gemessen haben].

Mit $w := \omega_P \omega_k$ berechnet sich das Trägheitsmoment durch

$$\omega_P = \frac{rmg}{J \omega_k} \Leftrightarrow J = \frac{rmg}{\omega_P \omega_k} = \frac{rmg}{w},$$

wobei m die Masse und r der Abstand des Zusatzgewichtes zur Drehachse ist. w ergibt sich durch die lineare Regression:

$$w = \frac{\omega_P}{\frac{1}{\omega_k}} = \omega_P \omega_k.$$

Der Fehler berechnet sich mittels der Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_J = \sqrt{\sigma_r^2 \left(\frac{\partial J}{\partial r} \right)^2 + \sigma_w^2 \left(\frac{\partial J}{\partial w} \right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\sigma_r \frac{mg}{\omega_P \omega_k}\right)^2 + \sigma_w^2 \left(-\frac{rmg}{w^2}\right)^2}.$$

m	w	σ_w	$J \text{ [kg m}^2\text{]}$	σ_J
0.04	11.18082	0.13943	0.00948	0.00133
0.05	14.27902	0.41437	0.00927	0.00385
0.06	16.73975	0.32491	0.00949	0.00309

Es ergibt sich der gewichtete Mittelwert $J = 0,00946 \text{ kg m}^2$ mit dem Fehler $\sigma_J = 0,00116 \text{ kg m}^2$.

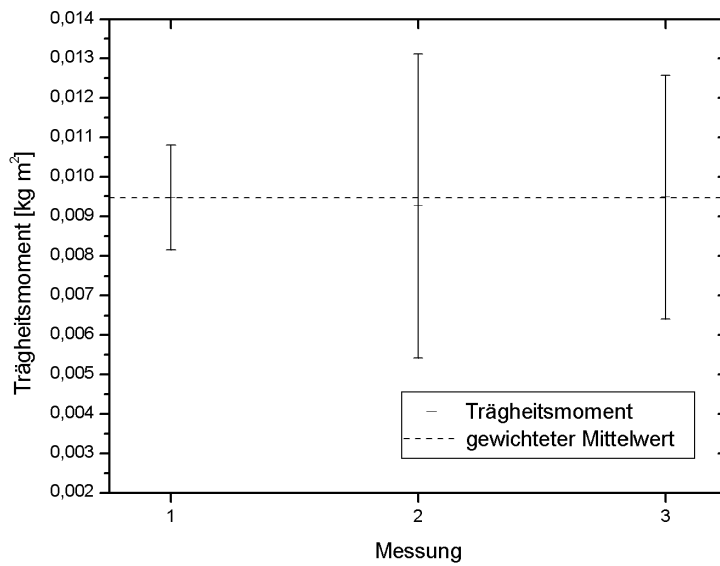


Abbildung 29: Trägheitsmoment aus der Präzessionsgeschwindigkeit.

4.4.4 Vergleich der Ergebnisse für das Trägheitsmoment

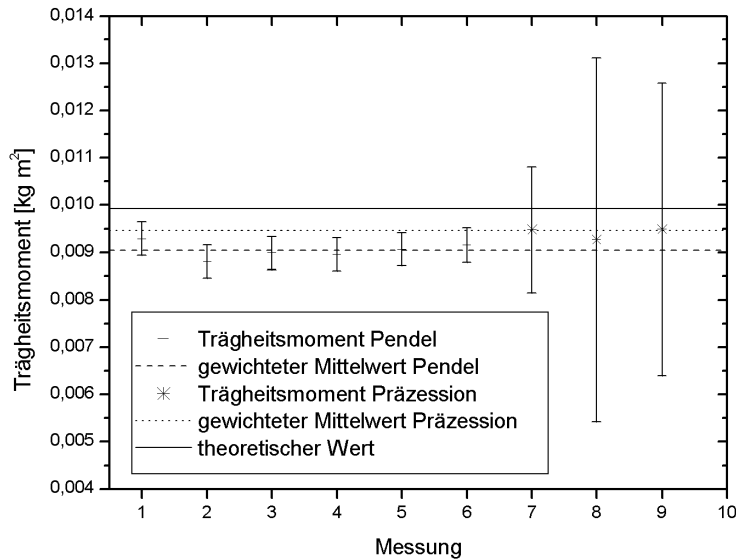


Abbildung 30: Vergleich der Trägheitsmomente.

Auffallend ist, dass die gemessenen Werte für das Trägheitsmoment von dem theoretischen Wert stark abweichen. Dies liegt wahrscheinlich daran, dass beim theoretischen Wert der Kreisel als reibungsfrei angenommen wird. Die Fehlerbalken des Trägheitsmomentes, welches durch die Pendelbewegung errechnet wurde [Messung 1-6], sind deutlich kleiner als die, die durch die Präzession errechnet wurden [Messung 7-9]. Der Grund hierfür ist, dass die Messungen 1-6 weniger Fehlerquellen beinhalten. Man erkennt jedoch, dass die meisten Fehlerbalken von Messung 7-9 innerhalb des gewichteten Mittelwertes von Messung 1-6 liegen. Hieraus lässt sich schließen, dass das Trägheitsmoment des Rades am Besten durch den gewichteten Mittelwert von Messung 1-6 berechnet wurde.

4.4.5 Nutation

Die Nutationsgeschwindigkeit errechnet sich durch $\omega_N = \frac{2\pi}{T}$, wobei T die Nutationsperiode ist. Der Fehler wurde wieder durch $\Delta T = 0,01 + 0,005 \cdot T$ und durch das Gesetz der Fehlerfortpflanzung errechnet. In der Tabelle bezeichnet ω_{N_T} die durch die in 2.5 hergeleitete Formel errechneten Werte für die Nutationsgeschwindigkeit.

ω_R	ω_N	σ_{ω_N}	ω_{N_T}
104.71976	15.70796	0.47124	17.80977
87.87672	12.719	0.32106	14.94526
73.06029	10.57775	0.23097	12.42542
123.19971	17.79939	0.59323	20.95267
95.19978	13.68886	0.36668	16.1907
79.03378	11.8105	0.28105	13.44133

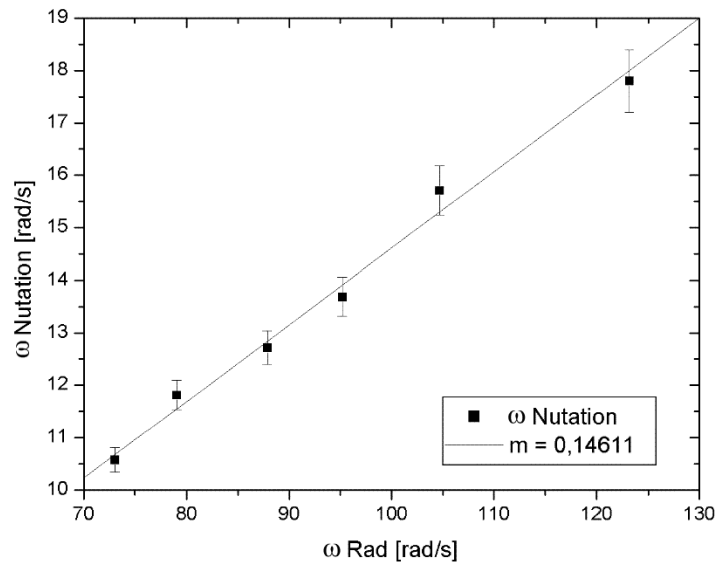


Abbildung 31: Nutationsgeschwindigkeit.

Aus der linearen Regression ergibt sich $\frac{\omega_N}{\omega_R} = 0,14611$. Dies entspricht ungefähr dem Wert $\frac{J_x}{J_z} = 0,17007$. [J_x und J_z siehe 4.1].

4.5 Diskussion

Trägheitsmoment

Die Messung des Trägheitsmoment des Rades mit Hilfe des physikalischen Pendels lieferte Ergebnisse mit deutlich kleinerem Fehler. Da bei der Messung der Präzessionsperiode der Neigungswinkel θ schnell zunahm, musste man darauf achten, dass das Zusatzgewicht nicht gegen die Halterung des Kreisels stößt. So mussten die Messungen enorm schnell durchgeführt werden, und es kam zu Bedienungsfehlern der Lichtschranke.

Nutation

Leider lässt die Genauigkeit des errechneten Trägheitsmoment des Kreisels einen direkten Vergleich der Trägheitsmomente nicht zu. Die Schätzungen in der Auswertung mögen in etwa richtig sein, sind aber mit einem großen Fehler behaftet. Das Praktikumsskript war im Bezug auf die Errechnung des Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse des Kreisels viel zu ungenau. Dort hieß es „Berechnen Sie aus den Angaben das Trägheitsmoment des Rades [...] um die vertikale Achse.“ Somit haben wir nur die Messungen vorgenommen, die zur Errechnung des Trägheitsmomentes um die vertikale Achse des Rades und nicht des gesamten Systems nötig gewesen sind. Zusätzlich lässt sich die Masse der Stange nicht bestimmen, ohne die gesamte Apparatur auseinanderzunehmen, was sicherlich nicht im Sinne der Praktikumsstechniker wäre. Hier fehlen die Angaben am Praktikumsplatz. Bevor das Praktikumsskript um Versuchsteile ergänzt wird, sollte doch bitte die Praktikumsleitung die gewünschte Auswertung exemplarisch durchrechnen.

Trotz alledem ist das eigentliche Ergebnis sehr zufriedenstellend. Die Auftragung ergab einen linearen Zusammenhang und die Fehler sind in den erwünschten Größenordnungen.

Eigene Kommentare

[Naja, die nächsten Protokolle werden bestimmt schöner aussehen. Von der Theorie während des Versuches mal null Plan gehabt.]_{Daniel}

[Der Versuch war eigentlich recht spaßig, und wir hätten sicherlich auch genauere Werte erzielt, wenn wir nicht einen Wettbewerb daraus gemacht hätten, wer den Kreisel am schnellsten drehen kann. Die Theorie war nicht ganz so toll, aber dafür ist der Versuch recht schnell durchgeführt.]_{Hauke}

5 Kapillarität und Viskosität

Versuch durchgeführt am 12. Mai 2005, Protokoll erarbeitet von Daniel Scholz.

5.1 Einleitung

Kapillarität und Viskosität sind erstaunliche und lebenswichtige physikalische Phänomene der Natur. Ob beim Nährstofftransport der Pflanzen oder beim Schreiben mit einem Federkiel - zeitweise scheinen Flüssigkeiten ganz und gar der Schwerkraft zu trotzen und "nach oben" zu fließen. Berücksichtigt man jedoch die sogenannte Oberflächenspannung, so schwindet der Zauber und die Erscheinungen werden mathematisch fassbar.

5.2 Theorie

5.2.1 Intermolekulare Kräfte

Während die Atome in Molekülen selbst durch kovalente [Elektronenpaar] Bindungen oder durch heteropolare [Ionen] Bindungen zusammengehalten werden, existieren zwischen den Teilchen intermolekulare Kräfte, von denen im folgenden die zwei wichtigsten erwähnt werden sollen. Die Effekte, die durch diese **Kohäsionskräfte** hervorgerufen werden, sollen später vertiefend erläutert werden.

Dipol-Dipol Kräfte

Polare Moleküle, wie sie in der folgenden Abbildung dargestellt sind, besitzen ein permanentes Dipolmoment.

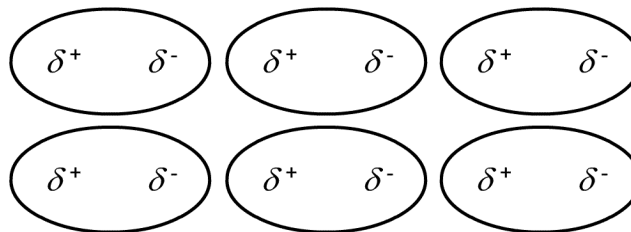


Abbildung 32: Permanentes Dipolmoment

Daher ordnen sich solche Moleküle in dem umgebenden elektrischen Feld symmetrisch an. Am deutlichsten sichtbar ist dies in der regelmäßigen Anordnung von Kristallen, welche auf der elektrostatischen Wechselwirkung beruht.

Van der Waals Kräfte

Durch Schwingungen in den Elektronenorbitalen eines Moleküls kommt es zu stark fluktuierenden, zufälligen Ladungsverschiebungen. Im zeitlichen Mittel bleibt das Molekül jedoch "nach außen hin" neutral. Betrachtet man intermolekulare Wechselwirkungen, so sind die durch die Verschiebungen entstehenden elektrischen Felder jedoch nicht zu vernachlässigen. Die durch diese Wechselwirkungen hervorgerufenen elektrodynamischen Kräfte werden nach ihrem Entdecker **van der Waals Wechselwirkungen** genannt.

Durch Induktion ebenso polarisierter Felder in benachbarten Elektronenwolken verstärkt sich dieser Effekt. Natürlich ist diese Form der Anziehung viel schwächer als die zwischen den Dipolen, in denen die Unterschiede in der Elektronegativität permanent und zudem weitaus stärker ausgeprägt sind. Jedoch werden die van der Waals Kräfte bei zunehmender Atomanzahl auch immer größer.

5.2.2 Oberflächenspannung

Wie beschrieben wirken zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit Anziehungskräfte, die mit wachsendem Abstand schnell abnehmen. Im Inneren des Stoffes verschwindet die resultierende Kraft, da sich die Kraftvektoren aller umliegenden Moleküle zu 0 aufsummieren. An der Grenzschicht zu einem anderen Medium dagegen ist ein Molekül nicht mehr von allen Seiten von anderen umgeben, daher wirkt hier eine resultierende Kraft, deren Vektor in das Innere der Flüssigkeit zeigt. Die Teilchen an dieser Grenzschicht besitzen damit ein höheres Potential als diejenigen, die im Inneren liegen.

Da das System bestrebt ist, einen möglichst energiearmen Zustand einzunehmen [nach der Thermodynamik sind solche Zustände wahrscheinlicher als energiereichere], wird es somit eine möglichst geringe Oberfläche im Vergleich zum Volumen "anstreben". Daher sind zum Beispiel Regentropfen im Idealfall auch Kugeln.

Um nun ein Molekül an die Oberfläche zu bringen, ist die so genannte **Oberflächenenergie** notwendig, die durch

$$E_A = \sigma \cdot A$$

definiert wird. Dabei ist A die betrachtete Oberfläche und σ die spezifische **Oberflächenspannung** [eine Materialkonstante], welche von der verwendeten Flüssigkeit und dem über ihr liegenden Medium abhängt.

5.2.3 Kohäsion

Kohäsionskräfte treten zwischen den Molekülen des gleichen Materials auf und sorgen für dessen Zusammenhalt. Ihre Stärke bestimmt den Aggregatzustand: Im Festkörper sind sie am größten, in Flüssigkeiten kleiner und in Gasen sind sie vernachlässigbar gering.

Größen wie die Viskosität, die Kompressibilität sowie die schon erwähnte Oberflächenspannung sind von den Kohäsionskräften abhängig. Diese Kraft muss gerade zum "Zerteilen" eines Stoffes überwunden werden.

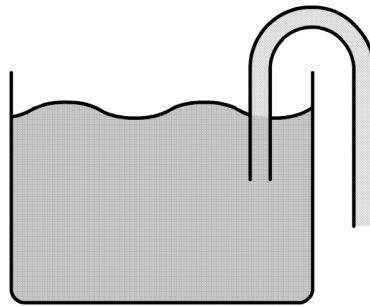


Abbildung 33: Kohäsionsphänomen bei Wasser

Die Kohäsion ist auch für Phänomene verantwortlich, die auf den ersten Blick verwunderlich erscheinen. So kann zum Beispiel Wasser dazu gebracht werden, "nach oben" zu fließen. In der Abbildung wird ein Aufbau gezeigt, in dem ein "Flüssigkeitsfaden" den höchsten Punkt des Rohres überschritten hat. Nun wird der Faden nicht abreißen, sondern wird das Wasser mit sich ziehen.

5.2.4 Adhäsion

Auch zwischen Molekülen unterschiedlicher Stoffe kommt es zu Wechselwirkungen. Sie sind für Phänomene wie die Haftreibung, für das Aneinanderhaften verschiedener Materialien und schließlich auch für die Benetzung verantwortlich. Bei allen Vorgängen, in denen Materialien beschichtet oder geklebt werden, wird die Adhäsion ausgenutzt.

Speziell für die Benetzung lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

(1) Vollständige Benetzung

Ist die Adhäsion größer als die Kohäsion, so breitet sich die Flüssigkeit über die komplette Fläche aus.

(2) Unvollständige Benetzung

Ist die Adhäsion kleiner als die Kohäsion, so zieht sich die Flüssigkeit zu Tröpfchen zusammen.

5.2.5 Kapillarität

In einem dünnen Röhrchen [Kapillare] steigt eine Flüssigkeit auf Grund der Kohäsions- und Adhäsionskräfte gegenüber dem eigentlichen Wasserspiegel auf oder ab, je nachdem, ob die Wände der Kapillare benetzt werden oder nicht.

Im Gleichgewichtsfall ist die Gewichtskraft der Wassersäule gleich der tragenden Randkraft. Für die Randkraft gilt dann

$$F_R = \frac{d}{dh} E_A = \frac{d}{dh} 2\pi r h \sigma = 2\pi r \sigma,$$

dabei ist r der Radius des Röhrchens. Zusammen mit der Dichte $\varrho = m/\pi r^2 h$ erhält man nun

$$F_G = F_R$$

$$\begin{aligned}
 mg &= 2\pi r \sigma \\
 \rho \pi r^2 h g &= 2\pi r \sigma \\
 h &= \frac{2\sigma}{\rho r g} \quad \text{oder} \\
 \sigma &= \frac{1}{2} h \rho r g.
 \end{aligned}$$

Auch bezüglich des Winkels θ , den angrenzende Wand und Flüssigkeit tangential einschließen, lassen sich Aussagen aus den unterschiedlichen Oberflächenspannungen gewinnen.

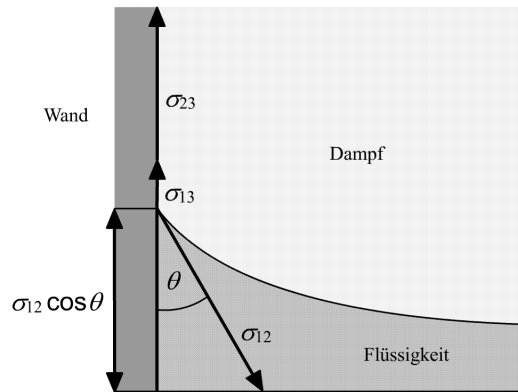


Abbildung 34: Oberflächenspannungen

Je nachdem, in welchem Verhältnis die Kräfte an den Grenzflächen zueinander stehen und in welche Richtungen sie weisen, bilden sich an der Oberfläche der Säule zum Rand sogenannte **Menisken** aus. Im Gleichgewichtsfall addieren sich alle Grenzflächenspannungen, also alle wirkenden Kräfte, zu 0. Somit ergeben sich am Rand Bereiche, für die der Winkel zwischen Wand und Flüssigkeit nicht wie erwartet $\pm\pi/2$ ist.

Für die verschiedenen Phasen sind insgesamt drei Oberflächenspannungen zu betrachten, deren Bezeichnungen wie folgt gewählt wurden:

- (1) σ_{12} ist die Oberflächenspannung zwischen Flüssigkeit und ihrem Dampf.
- (2) σ_{23} ist die Oberflächenspannung am Übergang der Flüssigkeit zu begrenzender Wand.
- (3) σ_{13} ist die Oberflächenspannung für den Übergang von gasförmig zu fest, also an der Grenze zwischen Wand und Dampf.

Es gilt nun der Zusammenhang

$$\sigma_{23} - \sigma_{13} = -\sigma_{12} \cos \theta,$$

dabei heißt $\sigma_{23} - \sigma_{13}$ die **Haftspannung**.

Anhand der folgenden Fallunterscheidung soll die Bedeutung dieser Gleichung verdeutlicht werden:

(1) $0 < \sigma_{13} - \sigma_{23} < \sigma_{12}$

Die obige Gleichung ist für Winkel θ im Intervall $0 < \theta < \pi/2$ erfüllt. Die Flüssigkeit benetzt also die Wand und ihre Oberfläche ist konkav gewölbt.

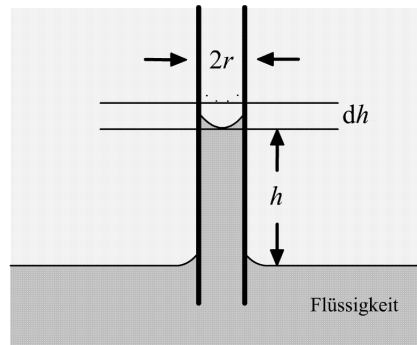


Abbildung 35: Wasser in einer Kapillare

Beispiel: Wasser.

(2) $\sigma_{13} - \sigma_{23} < 0$

Die obige Gleichung ist für Winkel θ im Intervall $\pi/2 < \theta < \pi$ erfüllt. Die Flüssigkeit benetzt die Wand nicht und die Oberfläche ist konvex gewölbt. Dies ist zum Beispiel bei Quecksilber in einem Steigungsrohr der Fall, was beim Ablesen der üblichen Manometer beachtet werden sollte.

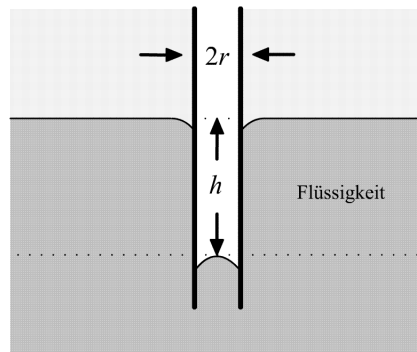


Abbildung 36: Quecksilber in einer Kapillare

Beispiel: Quecksilber.

(3) $\sigma_{13} - \sigma_{23} > \sigma_{12}$

Die obige Gleichung ist für keinen reellen Winkel θ erfüllt. Es ist also kein Gleichgewicht möglich, die Oberflächenspannung σ_{13} überwiegt und die Flüssigkeit "kriecht" an der Wand empor und benetzt sie vollständig.

5.2.6 Innere Reibung

Die Relativbewegung zwischen Körpern und Flüssigkeiten bzw. Gasen erfordert die Überwindung bewegungshindernder Kräfte selbst dann, wenn alle äußeren

Einwirkungen eliminiert wurden.

Wird eine Platte oder ein Stab aus einem Gefäß herausgezogen, das mit einer zähen Flüssigkeit gefüllt ist, so wird auf Grund der Haftungsgreibung auch die an der Platte anliegende Flüssigkeitsschicht mitbewegt. So lässt sich das gesamte Gefäß in Schichten unterteilen, bei denen jede die nächste ein bisschen weniger beeinflusst.

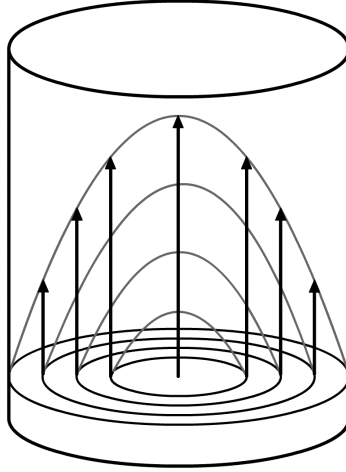


Abbildung 37: Innere Reibung

Die letzte Schicht an der Wand erfährt keine Beschleunigung, ihre Geschwindigkeit bleibt bei 0.

Die Erklärung dieses Phänomens liefert die Betrachtung der zwischen den einzelnen Schichten herrschenden Reibungskräfte. Es sollte also eine Materialkonstante geben, die gerade die "Zähigkeit" einer Flüssigkeit beschreibt. Diese Konstante wird dann später **Viskosität** genannt.

Um für diese Größe Gesetzmäßigkeiten zu finden, ist es hilfreich, das Medium um die Platte in n parallele Schichten zu unterteilen. Unter der Annahme, dass die jeweiligen Geschwindigkeiten v_i konstant sind, findet man experimentell die Proportionalität der Reibungskraft F_i zur Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den Schichten $\Delta v_i = v_{i+1} - v_i$ und zur Fläche der benutzten Platte A :

$$F_i \sim \Delta v_i \quad \text{und} \quad F_i \sim A.$$

Dies ist recht einsichtig, jedoch muss noch berücksichtigt werden, dass auch und sogar hauptsächlich die Flüssigkeitsschichten untereinander wechselwirken. Daher gilt für die Schichtdicke $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ gerade

$$F_i \sim \frac{1}{\Delta z_i}.$$

Es bleibt also noch die schon erwähnte Materialkonstante η , welche die Viskosität beschreibt. Um nun ein möglichst allgemeines Gesetz für die Reibungskraft zu erhalten, betrachtet man den Grenzwert und erhält

$$F_R = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta \frac{\Delta v_i \cdot A}{\Delta z_i} = \eta A \frac{dv}{dz}.$$

Zusammenfassung

Zusammenfassend und vereinfacht lässt sich das Ergebnis nun so beschreiben:

Befindet sich zwischen einer Platte der Fläche A und einer festen Wand ein Flüssigkeitsfilm der Dicke z und soll die Platte mit der Geschwindigkeit v parallel zur Wand verschoben werden, so benötigt man die Kraft

$$F_R = \eta A \frac{v}{z}.$$

5.2.7 Dynamische Viskosität

Wenn eine Flüssigkeit durch ein Rohr strömt, ist die Geschwindigkeit auf Grund der Reibung an den Wänden nicht überall konstant. Im Allgemeinen unterscheidet man zwischen laminarer und turbulenter Strömung.

Laminare Strömung

Man spricht von laminarer Strömung, wenn die einzelnen Flüssigkeitsschichten glatt übereinandergleiten, wenn sie also nicht untereinander verwirbeln. Es bilden sich somit zum Beispiel glatte, zusammenhängende Stromlinien um eine Kugel herum [siehe Abbildung].

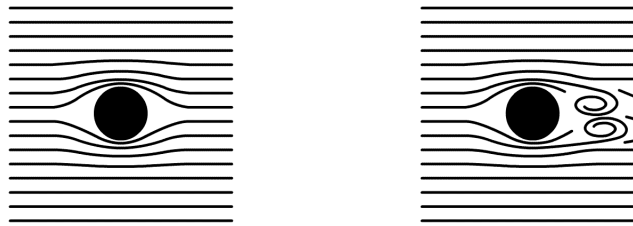


Abbildung 38: Laminare und turbulente Strömung

Turbulente Strömung

Im Gegensatz dazu spricht man von turbulenter Strömung, wenn die Flüssigkeitsschichten untereinander verwirbeln. In diesem Fall ergeben sich verwirbelte Stromlinien. Mit Hilfe der dimensionslosen **Reynoldszahl** Re lässt sich abschätzen, ob eine Strömung laminar oder turbulent verläuft. Diese Zahl wird gegeben durch

$$Re = \frac{l \varrho v}{\eta},$$

dabei ist l die Rohrlänge, ϱ die Dichte, v die Durchschnittsgeschwindigkeit und η die Viskosität des strömenden Stoffes.

5.2.8 Gesetz von Hagen-Poiseuille für laminare Strömungen

So komplex die Gleichungen zur Beschreibung turbulenter Strömungen sind, so einfach gestalten sie sich glücklicherweise für laminare Strömungen.

Im folgenden betrachten wir die laminare Strömung in einem Rohr mit dem Radius R , dass in einem Abschnitt der Länge l von einer Flüssigkeit der Viskosität

η durchflossen wird. Die Geschwindigkeit des Flüssigkeitszylinders ergibt sich nun aus dem Gleichgewicht der Reibungskräfte F_R und der wirkenden Druckkraft F_p :

$$F_R = 2\pi r l \cdot \eta \frac{dv}{dr} \quad \text{und} \quad F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2)$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Kräfte und anschließende Trennung der Variablen folgt

$$\begin{aligned} -\frac{2\eta l}{p_1 - p_2} dv &= r dr \\ -\frac{2\eta l}{p_1 - p_2} \int dv &= \int r dr \\ -\frac{4\eta l}{p_1 - p_2} v &= r^2 + c. \end{aligned}$$

Es gilt $c = -R^2$, da am Rande des Röhrchens [also für $r = R$] die Geschwindigkeit gleich 0 ist. Man erhält somit

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Durch den Hohlzylinder, der durch r und $r + dr$ begrenzt wird, fließt somit in der Zeit t die Menge dV , für die die Gleichung

$$dV = 2\pi r v t dr = \frac{\pi t (p_1 - p_2)}{2\eta l} (R^2 - r^2) r dr$$

gilt. Durch Integrieren gilt somit für den gesamten Durchschnitt

$$V(t) = \int_0^R \frac{\pi t (p_1 - p_2)}{2\eta l} (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l} t,$$

man erhält nun das Gesetz von Hagen-Poiseuille für laminare Strömungen:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V} = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8\eta l} R^4.$$

Für das Volumen des Zylinders mit dem Radius R , aus dem das Wasser abfließt, gilt außerdem der Zusammenhang $dV = \pi R^2 dh$. Der Druck wird in dem vorliegenden Versuch allein durch die Gravitation bestimmt, somit ist $\Delta p = \rho g h$, so dass sich zusammen mit der oben hergeleiteten Gleichung gerade ergibt:

$$\pi R^2 dh = -\frac{\pi (p_1 - p_2)}{8\eta l} R^4 dt = -\frac{\pi \rho g h}{8\eta l} R^4 dt.$$

Man erhält nun durch Umformungen und wiederholtes trennen der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{dh}{h} &= -\frac{\rho g}{8\eta l R^2} R^4 dt \\ \log h &= -\frac{\rho g}{8\eta l R^2} R^4 t + c_0 \\ h(t) &= \exp\left(-\frac{\rho g}{8\eta l R^2} R^4 t + c_0\right) = h_0 \cdot \exp\left(-\frac{\rho g}{8\eta l R^2} R^4 t\right). \end{aligned}$$

Dieses Exponentialgesetz wird bei der Auswertung zur Anwendung kommen.

5.2.9 Die Mohrsche Waage

Abschließend soll nun kurz die Mohrsche Waage erklärt werden, da diese im Laufe des Versuches mehrfach genutzt wird.

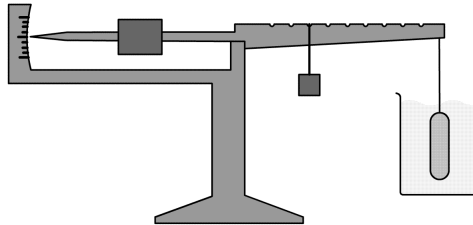


Abbildung 39: Aufbau der Mohrschen Waage

Die Mohrsche Waage dient dazu, Dichten von Flüssigkeiten zu vergleichen. Sie besteht aus einem Waagarm, an den in regelmässigen Abständen Gewichte gehängt werden können. Ein Tauchkörper wird in der Flüssigkeit vollständig versenkt, und dann die Waage ins Gleichgewicht gebracht. Man notiert die Position der Gewichte, die man dabei verwendet hat. Um die Dichte einer unbekannten Flüssigkeit zu bestimmen, eicht man die Waage zunächst auf Wasser, dessen Dichte bekannt ist [1 g/cm^3]. Danach wird die Messung mit der zu untersuchenden Flüssigkeit durchgeführt. Das Verhältnis der Hebelkräfte entspricht dann dem Verhältnis der Dichten:

Gibt es k Positionen für Gewichte und sind m_i die Gesamtmassen an der Positionen n_i für $i = 1, \dots, k$, so berechnet sich das Verhältnis durch

$$\frac{\varrho_a}{\varrho_b} = \frac{\sum_{i=1}^k m_{ia} n_i}{\sum_{i=1}^k m_{ib} n_i}.$$

5.3 Versuchsdurchführung

Zunächst werden drei Kapillaren [zur besseren Unterscheidung mit rot, grün und blau markiert] gründlich gereinigt und die Radien unter dem Mikroskop bestimmt und notiert [dreimal].

5.3.1 Kapillarität

In diesem Teil des Versuchs werden die Steighöhen von drei unterschiedlichen Flüssigkeiten [Wasser, Methylalkohol und Ethylenglykol] in den drei Kapillaren von unterschiedlichem Durchmesser gemessen. Weiterhin werden die Dichten dieser Flüssigkeiten anhand der Mohrschen Waage bestimmen.

Es sollen daraus die Oberflächenspannungen der einzelnen Flüssigkeiten bestimmt werden.

5.3.2 Innere Reibung

Zunächst wird das Volumen eines Glasgefäßes zwischen den Strichmarken 50 und 45, die Länge l der Kapillaren und die Temperatur T von destillierten Was-

ser gemessen.

Anhand von zwei Versuchen soll nun die Viskosität von Wasser bestimmt werden.

Ausflusszeit durch die Kapillaren

Es wird dreimal die Ausflusszeit t_A von destilliertem Wasser zwischen den Strichmarken 50 und 45 des Glasgefäßes gemessen, indem man jede Kapillare einmal an das Gefäß anschließt.

Ausflusszeit in Abhängigkeit der Höhe

Nur für die Kapillare mit dem kleinsten Durchmesser wird die Ausflusszeit $t(h)$ in Abhängigkeit der Höhe h gemessen. Hierzu werden mindestens 10 Werte notiert.

5.4 Auswertung

Bei der Bestimmung der Radien r der Kapillaren erhielten wir folgende Ergebnisse:

	Radius
rot	$0.042 \pm 0.01 \text{ cm}$
grün	$0.087 \pm 0.01 \text{ cm}$
blau	$0.058 \pm 0.01 \text{ cm}$

5.4.1 Kapillarität

Durch das Prinzip der Mohrschen Waage berechneten wir die Dichten ρ der zu analysierenden Stoffe folgendermassen:

	experimentell	Literaturwert
Wasser	1.000 g/cm^3	1.000 g/cm^3
Methylalkohol	$0.803 \pm 0.01 \text{ g/cm}^3$	0.810 g/cm^3
Ethylenglykol	$1.379 \pm 0.01 \text{ g/cm}^3$	1.113 g/cm^3

[Der Literaturwert von Methylalkohol ist aus dem "Handbuch Alkohol – Österreich", 2. Auflage, aufgerufen unter

<http://www.api.or.at/akis/download/01hbao.pdf>.

Der Literaturwert von Ethylenglykol ist nach Carstens, J. (2003): "Bestimmung von Ethylenglykol aus biologischen Proben", aufgerufen unter

<http://tumb1.biblio.tu-muenchen.de/publ/diss/ch/2003/carstens.pdf>.]

Der Mittelwert der Höhendifferenz h beim Eintauchen der Kapillare ist:

	Wasser	Methylalkohol	Ethylenglykol
rot	$3.20 \pm 0.2 \text{ cm}$	$1.25 \pm 0.2 \text{ cm}$	$1.93 \pm 0.2 \text{ cm}$
grün	$1.43 \pm 0.2 \text{ cm}$	$0.55 \pm 0.2 \text{ cm}$	$0.63 \pm 0.2 \text{ cm}$
blau	$2.28 \pm 0.2 \text{ cm}$	$0.97 \pm 0.2 \text{ cm}$	$1.32 \pm 0.2 \text{ cm}$

Die Oberflächenspannung der einzelnen Stoffen kann nun durch die oben hergeleitete Formel

$$\sigma_x = \frac{1}{2} h \varrho r g$$

berechnet werden. Wir erhielten folgende Werte in g/s^2 :

	Wasser	Methylalkohol	Ethylenglykol
rot	65.40 ± 16.22	20.51 ± 6.45	54.47 ± 14.77
grün	60.93 ± 11.03	18.77 ± 7.53	37.12 ± 12.77
blau	65.33 ± 12.58	22.35 ± 6.58	51.94 ± 12.48

Den Fehler hierbei berechneten wir über die Fehlerfortpflanzung mittels

$$\begin{aligned}\sigma_{\sigma_x} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial h} \sigma_h\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varrho} \sigma_\varrho\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial r} \sigma_r\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(\varrho r g \sigma_h)^2 + (h r g \sigma_\varrho)^2 + (h \varrho g \sigma_r)^2}.\end{aligned}$$

Durch die gewichteten Mittelwerte der Oberflächenspannungen berechneten wir folgende Endergebnisse in g/s^2 :

	Wasser	Methylalkohol	Ethylenglykol
Ergebnis	63.37 ± 7.38	20.69 ± 3.93	47.31 ± 7.64
Literaturwert	72.75	22.60	31.40

[Die Literaturwerte von Wasser und von Methylalkohol sind nach "Wikipedia", aufgerufen unter

<http://de.wikipedia.org/wiki/Oberfl%C3%A4chenspannung>.

Der Literaturwert von Ethylenglykol ist nach der Abteilung Organische Chemie III: "Praktikum Makromolekulare Chemie", aufgerufen unter

<http://www.uni-ulm.de/oc3/studies/gprakt/v28.pdf>]

Die Ergebnisse von Wasser und von Methylalkohol sind zufriedenstellend, die Abweichung von ca. 40 % bei Ethylenglykol ist dadurch zu begründen, dass schon die gemessene Dichte eine recht große Abweichung zum Literaturwert aufweist.

5.4.2 Innere Reibung

Ausflusszeit durch die Kapillaren

Nach dem oben hergeleiteten Gesetz von Hagen-Poiseuille erhält man

$$\Delta V = \frac{\pi \Delta p}{8 \eta l} R^4 t_A \quad \Leftrightarrow \quad \eta = \frac{\pi \Delta p}{8 \Delta V l} R^4 t_A.$$

Die Größe R wurde bereits oben berechnet und für die Zeiten t_A wurden folgende Werte in s gemessen:

rot	72.22 ± 0.361
grün	5.84 ± 0.039
blau	22.8 ± 0.124

Somit müssen nun noch die Größen Δp und ΔV ermittelt werden.

Aus der Geometrie des Glasgefäßes erhalten wir

$$\Delta V = 1.9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

und die Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2 = p_1$ berechnet sich zu

$$\Delta p = p_1 = \varrho g h = 1000 \cdot 9.81 \cdot 0.475 \text{ Pa} \approx 4660 \pm 200 \text{ Pa},$$

da $p_2 = 0$ gilt. Dabei ist ϱ die Dichte von Wasser in kg/m^3 , g ist die Erdbeschleunigung und h die Höhe, im Mittel 0.475 m .

Wir erhielten nun folgende Werte für die Viskosität η in Pa s :

rot	0.00089 ± 0.00085
grün	0.00138 ± 0.00063
blau	0.00111 ± 0.00076

Den Fehler hierbei berechneten wir über die Fehlerfortpflanzung mittels

$$\begin{aligned} \sigma_\eta &= \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial R} \sigma_R\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t_A} \sigma_{t_A}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \Delta p} \sigma_{\Delta p}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\pi \Delta p}{2 \Delta V l} R^3 t_A \sigma_R\right)^2 + \left(\frac{\pi \Delta p}{8 \Delta V l} R^4 \sigma_{t_A}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{8 \Delta V l} R^4 t_A \sigma_{\Delta p}\right)^2} \end{aligned}$$

Die Fehler von ΔV und l haben wir vernachlässigt, da diese schon recht gering waren.

Durch den gewichteten Mittelwert erhalten wir folgendes Endergebnis der Viskosität:

$$\eta = 0.001173 \pm 0.000424 \text{ Pa s}.$$

Der Literaturwert zum Vergleich ist bei 20° C gerade

$$\eta = 0.001025 \text{ Pa s}.^1$$

Ausflusszeit in Abhängigkeit der Höhe

Aus dem Exponent des oben hergeleiteten Gesetzes

$$h(t) = h_0 \cdot \exp\left(-\frac{\varrho g}{8 \eta l r^2} R^4 t\right)$$

soll nun auch die Viskosität von Wasser bestimmt werden. Dazu trägt man die Werte $\log(h)$ gegen t auf und erhält eine Gerade mit der Steigung

$$m = -\frac{\varrho g}{8 \eta l r^2} R^4,$$

dabei ist r der Radius des Glasgefäßes und R der Radius der Kapillare.

Durch lineare Regression erhalten wir

$$m = -0.00255 \pm 0.00012 \text{ s}^{-1}.$$

¹ Nach Schaaf, P. (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsverlag Göttingen

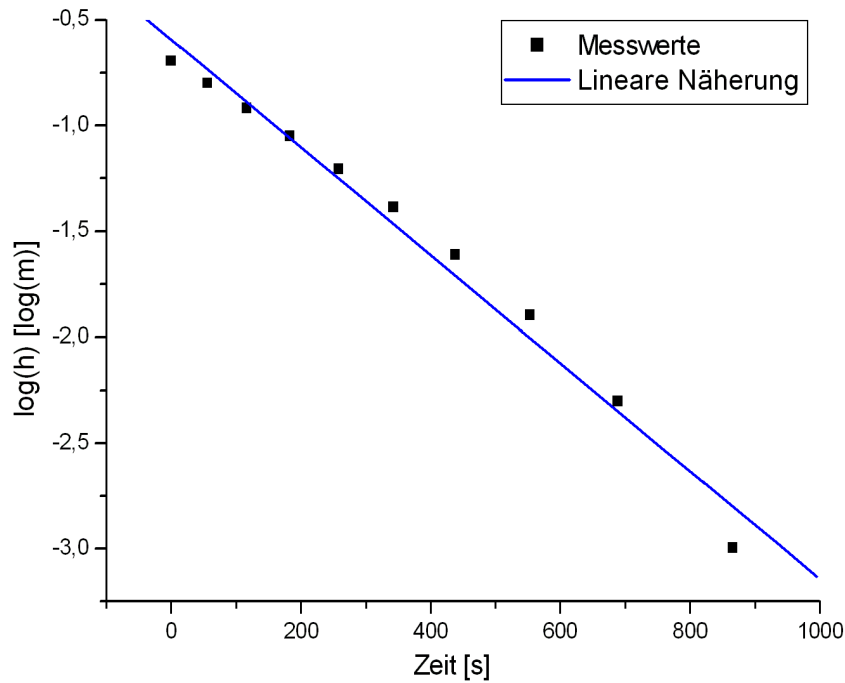


Abbildung 40: Logarithmische Steighöhe in Abhängigkeit der Zeit

Die Viskosität η kann nun sofort mittels

$$\eta = - \frac{\rho g}{8mlr^2} R^4$$

berechnet werden. Wir erhalten dabei einen Fehler von

$$\begin{aligned} \sigma_\eta &= \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial m} \sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial R} \sigma_R\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\rho g}{8m^2lr^2} R^4 \sigma_m\right)^2 + \left(-\frac{\rho g}{2mlr^2} R^3 \sigma_R\right)^2}, \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Fehler von l und von r vernachlässigt haben.

Aus unseren Messungen berechneten wir folgendes Endergebnis der Viskosität:

$$\eta = 0.00052 \pm 0.00050 \text{ Pa s.}$$

Der Literaturwert ist noch einmal zur Erinnerung bei 20°C gerade

$$\eta = 0.001025 \text{ Pa s.}^2$$

5.5 Diskussion

Allgemein lassen sich zunächst mehrere Fehlerquellen nennen: Zum einen war wahrscheinlich die vorliegende Messung der Kapillardurchmesser mit dem Mess-

² Nach Schaaf, P. (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsverlag Göttingen

mikroskop nicht genau genug. Da diese Größe in vierter Potenz in die Gleichung eingeht, hat schon eine geringe Abweichung des Radius große Auswirkungen auf das Resultat. Desweiteren sind Verunreinigungen der Kapillaren trotz gründlicher Reinigung nicht auszuschließen, was natürlich die Anwendung der Hagen-Poiseuille Gleichung zunichte macht, da es nun zu ungewollten Turbulenzen in der Strömung kommen sein könnte. Auch Restbestände der anderen Flüssigkeiten an den Wänden der Kapillaren sind denkbar, was die Reibung ebenfalls verändert haben könnte.

Das Endergebnis bei der Viskosität von Wasser durch die Messungen der Ausflusszeiten durch die Kapillaren ist sehr erfreulich. Im Mittel haben sich hier alle Fehler gegeneinander aufgehoben.

Unser Endergebnis bei den Messungen der Ausflusszeiten in Abhängigkeit der Höhe ist jedoch weniger erfreulich. Wir haben eine Abweichung von rund 50% des Literaturwertes. Eine mögliche Erklärung hierfür ist, dass der Radius der Kapillare falsch gemessen wurde. Gerade da es sich bei den Messungen um die Kapillare mit dem kleinsten Radius handelte, ist diese Erklärung denkbar.

Eigene Kommentare

[Na das Protokoll ist doch schon mal echt ganz ordentlich. Versuch etwas wässrig, aber ganz nett.]_{Daniel}

[Ich fand den Versuch sau langweilig, lag aber sicherlich mit daran, dass ich dieses Mal nicht so toll vorbereitet war. Danke an Daniel, der diesen Versuch quasi alleine durchgeführt hat.]_{Hauke}

6 Spezifische Wärme der Luft und Gasthermometer

Versuch durchgeführt am 30. Juni 2005, Protokoll erarbeitet von Hauke Rohmeyer.

6.1 Einleitung

Der Versuch gliedert sich in zwei Teile.

Im ersten Teil wird das *Gasthermometer* behandelt. Es wird der Druck eines Gases in Abhängigkeit der Temperatur gemessen, um daraus den absoluten Temperaturnullpunkt zu bestimmen.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit der *spezifischen Wärme der Luft*. Einem Gasgemisch wird eine bestimmte Menge Energie zugeführt, und die jeweilige Druckänderung gemessen.

6.2 Theorie

6.2.1 Das Gasthermometer

Beim Gasthermometer wird ein konstantes Gasvolumen V in einem Glaszylinder, der sich in einem Wasserbad befindet, durch eine Heizplatte erwärmt bzw. mit Eis abgekühlt. Ein digitales Differenzdruckmessgerät misst nun die Druckdifferenz Δp zwischen Gasdruck p und dem umgebenen Luftdruck p_0 . Somit herrscht bei der Temperatur T ein Druck von

$$p(T) = \Delta p + p_0,$$

wobei p_0 der äußere Gasdruck [Luftdruck] ist.

6.2.2 Die Temperatur

Die Temperatur ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie der Moleküle. Die genaue Definition ist

$$E = \frac{1}{2} m \langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{3}{2} k_b T$$

mit der Boltzmannkonstante $k_b = 1,381 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$.

Aus dieser Definition kann man erkennen, dass es eine Temperatur gibt, die

nicht unterschreitbar ist, nämlich genau dort, wo die Geschwindigkeit der Moleküle [und somit ihre kinetische Energie] Null ist. Bei dieser Temperatur sind alle Moleküle völlig in Ruhe, sie liegt bei $-273,15^\circ\text{C}$ ¹.

Von diesem **absoluten Nullpunkt** zählt man die **absolute** oder **Kelvin Temperatur**. Die Skalenabschnitte sind wie bei der gewohnten Celsius Temperatur. Für die Umrechnung einer Celsius Temperatur zur Kelvin Temperatur gilt also

$$x^\circ\text{C} = (x + 273,15) \text{ K}.$$

6.2.3 Allgemeine Gasgleichung

Der Zustand einer gegebenen Gasmasse M wird durch die folgenden drei Größen vollständig beschrieben: Temperatur T , Druck p und Volumen V . Das Gesetz von Boyle-Mariotte liefert

$$p \sim \frac{1}{V} \quad \text{bei } T \text{ konstant,}$$

das Gesetz von Gay Lussac liefert

$$p \sim T \quad \text{bei } V \text{ konstant}$$

und das Gesetz von Charles liefert

$$V \sim T \quad \text{bei } p \text{ konstant.}$$

Es ergibt sich somit die Zustandsgleichung

$$p \cdot V = N \cdot k_b \cdot T.$$

Drückt man die Teilchenanzahl N in mol aus, so erhält man $n = N/N_A$ mit $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ Teilchen/mol und somit

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T,$$

dabei $R = N_A \cdot k_b = 8,31 \text{ J/K mol}$.

Dieses Gesetz gilt nur für ideale Gase. Es wird dabei angenommen, dass die Teilchen keine Kräfte aufeinander ausüben und selbst kein merkliches Eigenvolumen haben.

Nach den Gesetzen von Boyle-Mariotte und Gay Lussac gilt außerdem für den Druck

$$p = p_0(1 + \beta\vartheta)$$

und für das Volumen

$$V = V_0(1 + \beta\vartheta)$$

mit $\beta = 1/273 \text{ K}$ und der Temperatur ϑ in $^\circ\text{C}$. Erreicht die Temperatur des Gases den absoluten Nullpunkt, so besitzt dieses weder Volumen, noch übt es einen Druck aus. Dies geschieht genau bei $\vartheta = -273,15^\circ\text{C} = 0 \text{ K}$.

¹ Nach Schaaf, P. (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsverlag Göttingen

6.2.4 Freiheitsgrade

Der Freiheitsgrad eines Moleküls setzt sich aus der Summe der Freiheitsgrade der Rotation, der Translation und der Schwingung zusammen. Vernachlässigt man die Schwingungen von Gasmolekülen, so erhält man für einatomare Moleküle [z.B. He] den Freiheitsgrad 3, nämlich nur 3 Freiheitsgrade der Translation. Für geradlinige Moleküle [z.B. H₂, CO₂] erhält man den Freiheitsgrad 5, nämlich 3 für die Translation und 2 für die Rotation in einer Ebene. Nur für nicht lineare Moleküle [z.B. H₂O] erhält man alle 6 Freiheitsgrade.

Die Moleküle in einem homogenen Festkörper können nicht rotieren, aber dafür schwingen. Moleküle eines solchen Festkörpers haben also auch 6 Freiheitsgrade, 3 für die Translation und 3 für die potentielle Schwingung.

6.2.5 Energie des idealen Gases

Die innere Energie eines idealen Gases wird ausschließlich durch die Bewegungsenergie seiner Moleküle dargestellt.

Auf jeden Freiheitsgrad eines Moleküls entfällt nun die Energie

$$U = \frac{1}{2} k_b T.$$

Hat ein Molekül also f Freiheitsgrade, so beträgt seine Energie

$$U = \frac{f}{2} k_b T.$$

Für ein Gas mit N Molekülen gilt somit

$$U = \frac{f}{2} N k_b T = \frac{f}{2} n R T.$$

6.2.6 Erster Hauptsatz der Wärmelehre

Die Änderung der inneren Energie ΔU eines Systems ist die Summe aus der Wärmemenge ΔQ und der mechanischen Arbeit ΔW :

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W.$$

Mechanische Arbeit ergibt eine Änderung des Volumens.

Bei einer adiabatischen Zustandsänderung, also bei $\Delta Q = 0$, gilt stets

$$\Delta U = \Delta W = -p \cdot \Delta V.$$

Bei konstanten Volumen, also wenn keine mechanische Arbeit geleistet wird und $\Delta V = 0$ gilt, folgt

$$\Delta U = \Delta Q.$$

6.2.7 Wärmekapazität

Um einen homogenen Körper der Masse M bestehend aus Molekülen der Masse m um ΔT zu erwärmen, braucht man also nach 6.2.5 die Wärmeenergie

$$\Delta U = \Delta Q = \frac{M}{m} \cdot \frac{f}{2} \cdot k_b \Delta T.$$

Dabei ist f die Anzahl der Freiheitsgrade der Moleküle und $N = M/m$ die Anzahl der Moleküle.

Das Verhältnis

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{Mf}{2m} k_b \quad \left[\frac{J}{K} \right]$$

ist die **Wärmekapazität** des Körpers.

Die **molare Wärmekapazität** c ist bezogen auf ein *mol* eines Gases, es gilt also

$$c = \frac{C}{n}$$

mit $n = N/N_A$.

6.2.8 Molare Wärme

Bei Gasen muss man unterscheiden, ob man die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck $[c_p]$ oder konstantem Volumen $[c_V]$ berechnet. Bei konstantem Druck muss noch die Ausdehnungsarbeit $dW = -pdV$ beachtet werden, die das Gas bei der Erwärmung leistet.

Konstantes Volumen V

Wird einem System die Wärmemenge dQ zugeführt, dann gilt für kleine Temperaturänderungen bei konstantem Volumen V nach 6.2.7 gerade

$$dQ = C_V dT = c_V n dT$$

mit der Wärmekapazität C_V und der molaren Wärmekapazität c_V . Erhöht man nun die innere Energie U eines idealen Gases um dQ , so erhalten die Moleküle die Energie

$$\begin{aligned} dQ &= dU \\ c_V n dT &= \frac{f}{2} n R dT \\ \frac{c_V}{R} &= \frac{f}{2}. \end{aligned}$$

Für die am Gas verrichtete Arbeit gilt bei konstantem Druck p nach 6.2.6

$$dW = F ds = p A ds = p dV.$$

In einem idealen Gas ist die innere Energie die Bewegungsenergie der Moleküle, es gilt

$$(dU)_V = dQ = c_V n dT.$$

Nach der Zustandsgleichung für ideale Gase folgt

$$\begin{aligned} pV &= nRT \\ d(pV) &= V dp + p dV = nR dT \\ \Rightarrow n dT &= (V dp + p dV)/R. \end{aligned}$$

Setzt man nun alle bislang gewonnenen Beziehungen in den ersten Hauptsatz der Wärmelehre ein, so erhält man

$$dQ = (dU)_V + p dV = c_V n dT + p dV = \frac{c_V (V dp + p dV)}{R} + p dV$$

und durch Umformungen ergibt sich

$$\frac{dQ - p dV}{(V dp + p dV)} = \frac{c_V}{R} = \frac{f}{2}.$$

Konstanter Druck p

Ist hingegen der Druck p konstant, so wird mehr Energie zum Erwärmen eines Gases benötigt, als bei konstantem Volumen.

Zusätzlich zur Wärmearbeit

$$c_V n dT = \frac{f}{2} nR dT$$

muss die mechanische Arbeit

$$p dV = nR dT$$

zum Vergrößern des Volumens geleistet werden:

$$(dW)_p = c_p n dT = \frac{f}{2} nR dT + nR dT = \left(\frac{f}{2} + 1\right) nR dT.$$

Daraus ergibt sich nun die Beziehung

$$c_p = c_V + R = \left(\frac{f}{2} + 1\right) R.$$

6.2.9 Energie eines Kondensators

Das Aufladen eines Kondensators bedeutet eine Potentialdifferenz aufzubauen. Das heißt, dass positive Ladungen von der einen Platte auf die andere Platte geleitet werden müssen, dabei muss dem Kondensator Energie zugeführt werden.

Für den Fluss einer kleinen Ladungsmenge dq gilt für die Energie, die zum Aufbau der Spannung benötigt wird

$$dW = U \cdot dq = \frac{q}{C} \cdot dq.$$

Der Gesamtbetrag der potentiellen Energie W ergibt sich nun als Integral über dW vom Anfang [$q = 0$] bis zum Ende [$q = Q$] des Ladevorganges:

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2.$$

Beim Entladen des Kondensators gibt dieser seine Energie W wieder ab.

6.3 Versuchsdurchführung

6.3.1 Gasthermometer

Der umgebende Luftdruck sollte vor dem Versuch mit Hilfe eines Barometers bestimmt werden. Da das digitale Druckmessgerät nur positive Druckdifferenzen messen kann, wird zunächst das Ventil geöffnet. Nun wird der Glaskolben mit Eiswasser auf 0°C abgekühlt. Die Temperatur wird mit einem Thermometer gemessen. Das Druckmessgerät sollte nun ca. 0,00 kPa anzeigen. Das Ventil wird geschlossen, und das Wasserbad auf der Heizplatte unter Rühren zum Kochen gebracht. Der Druck im Glaskolben wird in ca. 5°C großen Schritten in Abhängigkeit von der Temperatur notiert. Kocht das Wasser, wird die Heizplatte ausgeschaltet und das Wasserbad am Besten auf eine andere Unterlage gestellt. Nun wird das Wasserbad mit Eis auf 0°C abgekühlt. Wieder wird in ca. 5°C großen Schritten der jeweilige Druck im Glaskolben notiert.

6.3.2 Spezifische Wärme der Luft

Versuchsaufbau

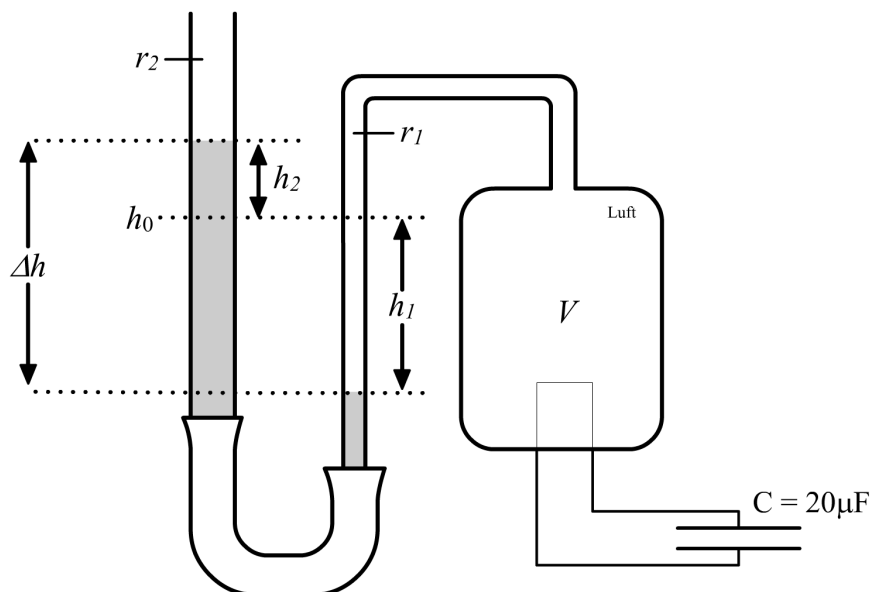


Abbildung 41: Schema des Versuchsaufbaus

Ein mit Luft gefüllter Zylinder ist an ein Wassermanometer angeschlossen. In dem Zylinder befindet sich ein dünner Metalldraht über den ein Kondensator entladen wird. Somit kann eine bestimmte Wärmemenge an das Gas abgegeben werden. Vernachlässigt man die Veränderung des Luftvolumens, so lässt sich der von der Luft ausgeübte Druck am Wassermanometer ablesen.

Versuchsdurchführung

Zuerst sollte der umgebende Luftdruck mit Hilfe eines Barometers bestimmt werden. Nun wird die Skala des Manometers auf Null gesetzt. Der Kondensator

wird mit Spannungen zwischen 100 und 500 V geladen und die Belüftungsöffnung des Zylinders mit dem Finger verschlossen. Jetzt wird der der Kondensator entladen, und der Ausschlag des Manometers gemessen. Zwischen den Messungen sollte die Luft im Zylinder genügend Zeit haben, um sich wieder abzukühlen. Hierzu wird der Finger von der Belüftungsöffnung entfernt.

Der Ausschlag des Manometers sollte für möglichst viele Spannungen mehrfach gemessen werden. Zum Schluss wird noch das Volumen des Zylinders gemessen.

6.4 Auswertung

6.4.1 Gasthermometer

Da bei der Versuchsdurchführung im Praktikumsskript nicht erwähnt wurde, dass der Luftdruck gemessen werden sollte, haben wir dies vergessen. Glücklicherweise waren unsere Praktikumskollegen ein bisschen schlauer als wir: Ihren Aufzeichnungen zufolge herrschte ein Luftdruck von $p_0 = 970 \text{ hPa}$.

Der Druck im Gaskolben ergibt sich, wenn wir die gemessene Druckdifferenz zu dem Aussendruck addieren:

$$p = p_0 + \Delta p.$$

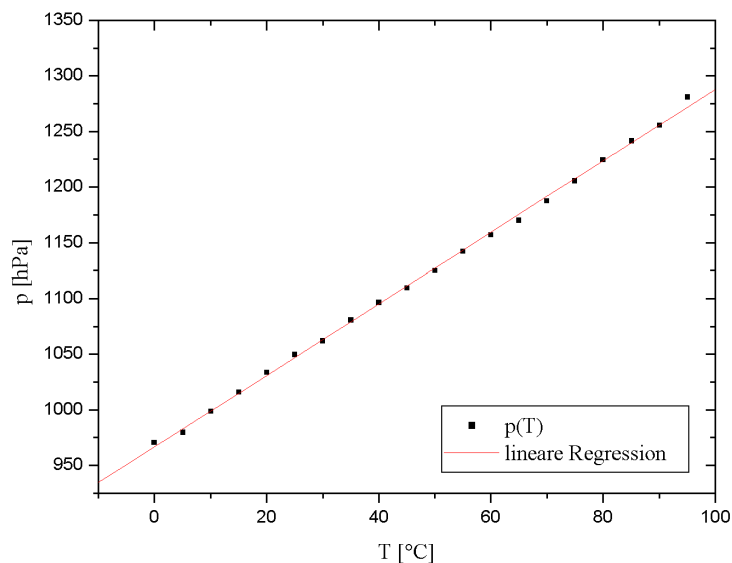


Abbildung 42: Erwärmen

Durch eine lineare Regression können wir nun den absoluten Nullpunkt bestimmen. Dies ist genau der Punkt, an dem das Gas in dem Kolben keinen Druck mehr ausüben würde. Für die Regressionsgerade gilt an diesem Punkt also

$$f(x) = 0 = a + b \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{a}{b}.$$

Bei dem Erwärmen ergeben sich die Werte $a = 966,64857 \text{ hPa}$ mit dem Fehler $\sigma_a = 1,43353 \text{ hPa}$ und $b = 3,21308 \text{ hPa/}^\circ\text{C}$ mit $\sigma_b = 0,0258 \text{ hPa/}^\circ\text{C}$. Der absolute Nullpunkt liegt also bei

$$T_0 = -\frac{a}{b} = -300,8 \text{ }^\circ\text{C}$$

mit dem Fehler

$$\sigma_{T_0} = \sqrt{\sigma_a^2 \left(\frac{\partial T_0}{\partial a}\right)^2 + \sigma_b^2 \left(\frac{\partial T_0}{\partial b}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b a}{b^2}\right)^2} = 2,5 \text{ }^\circ\text{C}.$$

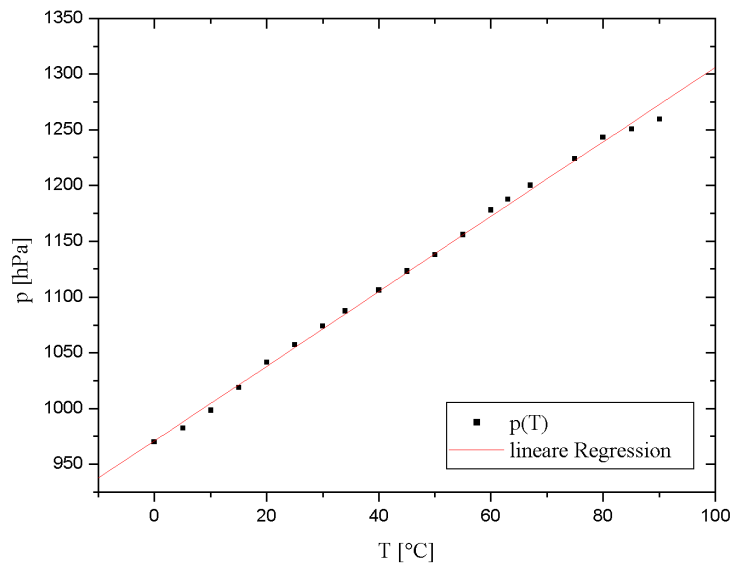


Abbildung 43: Abkühlen

Bei dem Abkühlen ergeben sich die Werte $a = 971,10198 \text{ hPa}$ mit dem Fehler $\sigma_a = 2,17844 \text{ hPa}$ und $b = 3,35107 \text{ hPa/}^\circ\text{C}$ mit $\sigma_b = 0,04165 \text{ hPa/}^\circ\text{C}$. Der absolute Nullpunkt liegt also bei

$$T_0 = -\frac{a}{b} = -289,8 \text{ }^\circ\text{C}$$

mit dem Fehler

$$\sigma_{T_0} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b a}{b^2}\right)^2} = 3,7 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Bildet man einen gewichteten Mittelwert ergibt sich aus unseren Messungen ein absoluter Nullpunkt bei

$$T_0 = -297,4 \text{ }^\circ\text{C} \quad \text{mit dem Fehler} \quad \sigma_{T_0} = 2,1 \text{ }^\circ\text{C}.$$

6.4.2 Spezifische Wärme der Luft

Die im Kondensator gespeicherte Energie ΔQ lässt sich durch

$$\Delta Q = \frac{1}{2}CU^2$$

mit dem Fehler

$$\sigma_{\Delta Q} = \sqrt{\sigma_U^2 \left(\frac{\partial \Delta Q}{\partial U} \right)^2} = \sigma_U \cdot CU$$

berechnen. Dabei ist $C = 2 \cdot 10 \cdot 10^{-6} F$ die Kapazität der beiden Kondensatoren und U die jeweils angelegte Spannung. σ_U haben wir auf 2 Volt geschätzt.

Nun lässt sich die Druckänderung Δp als Funktion der elektrischen Energie ΔQ auftragen.

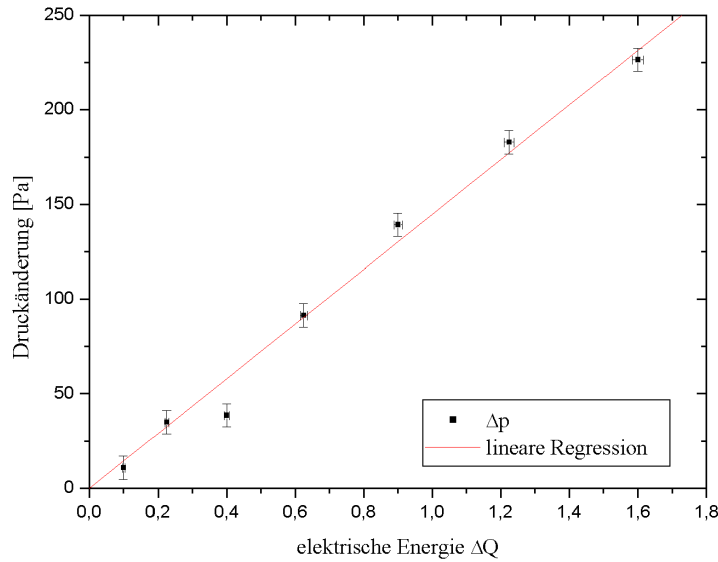


Abbildung 44: Druckänderung

Bei dem Zylinder maßen wir für die Länge $l = 0,0885 m$ und für den Durchmesser $d = 0,4020 m$ mit den Fehlern $\sigma_l = 0,0010 m$ und $\sigma_d = 0,0005 m$. Für das Volumen ergibt sich somit

$$V = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 l = 0,00247 m^3$$

mit dem Fehler

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_d^2 \left(\pi \frac{d}{2} l \right) + \sigma_l^2 \left(\pi \frac{d^2}{4} \right)} = 0,00003 m^3.$$

Um die Höhenänderung h_1 am Wassermanometer zu berechnen, haben wir von den gemessenen Werten den Mittelwert berechnet. Dieser musste noch mit 2

multipliziert werden, da ein Skalenteil 2 mm entsprach. Dabei haben wir für jede Messung $\sigma_{h_1} = 0,0006\text{ m}$ geschätzt.

Die Volumenänderung des Gases lässt sich mit $\Delta V = \pi r_1^2 h_1$ berechnen, dabei ist $r_1 = 0,002\text{ m}$ der Radius des rechten Manometerschenkels.

Für das vom Gas verdrängte Volumen gilt [siehe Abbildung 41]

$$V = \pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2 \Rightarrow h_2 = h_1 \frac{r_1^2}{r_2^2},$$

dabei ist $r_2 = 0,0092\text{ m}$ der Radius des linken Manometerschenkels und h_2 die entsprechende Höhenänderung.

Somit gilt für die gesamte Höhenänderung Δh am Wassermanometer

$$\Delta h = h_1 + h_2 = h_1 + h_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} = h_1 \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right).$$

Für die Druckänderung im Zylinder gilt schließlich

$$\Delta p = \varrho g \Delta h = \varrho g h_1 \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)$$

mit dem Fehler

$$\sigma_{\Delta p} = \sigma_h \varrho g \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right).$$

Dabei ist $g = 9,81\text{ m/s}^2$ die Erdbeschleunigung und $\varrho = 1000\text{ kg/m}^3$ die Dichte von Wasser. Stellt man nun die in 6.2.8 hergeleitete Formel nach f um, lassen sich die Freiheitsgrade der Luft bestimmen. Es gilt

$$f = 2 \left(\frac{\Delta Q - p \Delta V}{V \Delta p + p \Delta V} \right)$$

mit dem Fehler

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \sigma_{\Delta Q}}{V \Delta p + p \Delta V} \right)^2 + \sigma_V^2 \left(\frac{2 \Delta p (\Delta Q - \Delta V)}{(V \Delta p + p \Delta V)^2} \right)^2 + \sigma_{\Delta p}^2 \left(\frac{2 V (\Delta Q - \Delta V)}{(V \Delta p + p \Delta V)^2} \right)^2}$$

Dabei ist p der umgebende Luftdruck, für den wir wieder $p = 970\text{ hPa}$ annehmen.

Nun lässt sich aus dem Freiheitsgrad der Luft auch ganz einfach die Molwärme bestimmen. Nach 6.2.8 gilt

$$\frac{f}{2} = \frac{c_v}{R} \Rightarrow c_v = \frac{R f}{2},$$

mit dem Fehler

$$\sigma_{c_v} = \sqrt{\sigma_f^2 \left(\frac{\partial c_v}{\partial f} \right)^2} = \frac{\sigma_f R}{2}.$$

Dabei ist $R = 8,31447 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$ die Gaskonstante.

$\Delta Q [J]$	$\Delta p [Pa]$	$\Delta V \cdot 10^{-8} [m^3]$	f	σ_f	$c_v [\frac{J}{mol \cdot K}]$	σ_{c_v}
0.1	10.8	1.4	7.06	3.92	29.36	16.27
0.225	34.9	4.3	4.88	0.85	20.29	3.53
0.4	38.5	4.8	7.92	1.24	32.93	5.13
0.625	91.4	11.2	5.18	0.35	21.55	1.46
0.9	139.2	17.1	4.90	0.23	20.36	0.92
1.225	182.9	22.4	5.08	0.18	21.11	0.74
1.6	226.5	27.8	5.36	0.16	22.28	0.64

Bildet man nun den gewichteten Mittelwert von f ergibt sich

$$f = 5,18 \quad \text{mit dem Fehler} \quad \sigma_f = 0,10.$$

Für die Molwärme ergibt sich

$$c_v = 21,546 \left[\frac{J}{mol \cdot K} \right] \quad \text{mit dem Fehler} \quad \sigma_{c_v} = 0,404 \left[\frac{J}{mol \cdot K} \right].$$

6.5 Diskussion

6.5.1 Fehlerdiskussion Gasthermometer

Eine Fehlerquelle kann sein, dass das Gas durch ein Wasserbad erwärmt wurde. Die Temperatur, die das Thermometer im Wasserbad anzeigte, war also nicht der wahre Wert des Gases. Es kann sein, dass wir das Wasserbad zu schnell erwärmt haben und somit das Gas noch nicht komplett die neue Temperatur angenommen hatte. Beim Abkühlen war es schwer möglich die Temperatur gleichmäßig zu erniedrigen. Durch die Beziehung

$$p \sim T$$

haben wir somit auch einen tieferen Wert für den absoluten Temperaturnullpunkt erhalten als den Literaturwert [zur Erinnerung: $-273,15^\circ C$].

6.5.2 Fehlerdiskussion spezifische Wärme der Luft

Bedenkt man, dass der Ausschlag des Wassermanometers nur sehr ungenau gemessen werden konnte, sind unsere Ergebnisse erstaunlich gut. Eventuell haben wir den Fehler der abgelesenen Höhenänderung am Manometer noch zu gering eingeschätzt. Die Luft besteht hauptsächlich aus Stickstoff [78,084%], Sauerstoff [20,946%] und Argon [0,930%]. Stickstoff und Sauerstoff sind gradlinige Moleküle, haben somit 5 Freiheitsgrade. Argon ist ein Edelgas ist also einatomig und hat 3 Freiheitsgrade. Da sein Volumenanteil jedoch unter 1% liegt, erwarten wir einen Freiheitsgrad der Luft von $f \approx 5$. Da sich die spezifische Wärme der Luft direkt aus den Freiheitsgraden ergibt, ist das Messergebnis

ebenfalls gut, wenn man die Messungenauigkeit betrachtet. Der Literaturwert liegt bei $20,795 \text{ J}/(\text{mol K})^2$.

6.5.3 Verbesserungsvorschläge

Das Praktikumsskript sollte darauf hinweisen, dass der äußere Luftdruck im Laufe des Versuches gemessen werden sollte. Ausserdem sollten Barometer bereitliegen, damit man dies auch machen kann.

Eventuell sollte mehr Eis zur Verfügung gestellt werden. In einem anderen Versuchsraum gab es zwar noch Eis, welches wir uns geholt haben, doch wäre in diesem Raum auch ein Experimentatorenteam anwesend gewesen, die auf Eis angewiesen wären, so wäre es zwangszweise zu Engpässen gekommen.

Zusätzlich sollte ein Podest gebaut werden, auf das man das Wasserbad zum abkühlen stellen kann. Da die Heizplatte noch sehr heiß ist, ist sie nicht als Unterlage geeignet. Da durch die Zugabe von Eis auch das Volumen des Wasserbades zunimmt, wäre es gut, wenn man das Wasserbad ohne großen Aufwand [so wie wir ihn hatten] unter dem Glaskolben wegziehen könnte.

Eigene Kommentare

[Naja, semitoller Versuch.]_{Daniel}

[Dieser Versuch war nach den vorhergehenden [Gravitationswaage, Dampfdruck von Wasser, Diffusion] fast wie ein kleines Highlight, da man endlich wieder ein bisschen was zu tun hatte. Leider war die Auswertung, vor allem die Fehlerbetrachtung ein wenig mühsam.]_{Hauke}

² <http://www.wikipedia.de> aufgerufen am 06. Juli 2005 um 20:57 Uhr

7 Der Adiabatenexponent

Versuch durchgeführt am 07. Juli 2005, Protokoll erarbeitet von Hauke Rohmeyer.

7.1 Einleitung

In diesem Versuch soll der **Adiabatenexponent** $\kappa = c_p/c_V$ nach zwei verschiedenen Methoden bestimmt werden. Im ersten Teil wird der Adiabatenexponent nach **Rüchardt** für Luft, Argon und Kohlenstoffdioxid berechnet, im zweiten Teil nach **Clement-Desormes** für Luft. Der Adiabatenexponent ist eine wichtige Größe bei der Beschreibung adiabatischer Zustandsänderungen, insbesondere bei Gasen.

7.2 Theorie

7.2.1 Der Adiabatenexponent

Der Adiabatenexponent κ ist definiert als Quotient der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen.

$$\kappa := \frac{c_p}{c_V}$$

Warum er Exponent genannt wird macht die Poisson-Gleichung deutlich, in der die Proportionalität $p \sim V^{-\kappa}$ beschrieben wird.

7.2.2 Zustandsänderungen

Findet bei einer Zustandsänderung eines Gases kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt, ist also $\Delta Q = 0$, so nennt man diese Zustandsänderung **adiabatisch**. Ist dagegen die Temperatur konstant [$\Delta T = 0$], so nennt man sie **isotherm**. Ist das Volumen konstant [$\Delta V = 0$], so nennt man sie **isochor**. Ist schließlich der Druck konstant [$\Delta p = 0$], so nennt man sie **isobar**.

7.2.3 Poisson-Gleichung

Bei einem konstanten Gasvolumen wird keine Volumenarbeit an ihm verrichtet. Es gilt also $dW = 0$. Nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik folgt

$$dU = dW + dQ = dQ.$$

Für die spezifische Wärmekapazität folgt dann

$$c_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \frac{dU}{dT} \quad \Leftrightarrow \quad c_V dT = dU.$$

Bei einem adiabatischen Prozess gilt dagegen $dQ = 0$. Nach dem 1. Hauptsatz folgt also

$$dU = dW + dQ = dW = -pdV.$$

Da die innere Energie dU eine Zustandsgröße ist, lassen sich die gewonnen Gleichungen nun gleichsetzen.

$$c_V dT = dU = -pdV.$$

Für ein Mol [$n = 1$] gilt nach der idealen Gasgleichung $p = RT/V$. Setzt man dies ein und führt eine Trennung der Variablen durch folgt

$$c_V dT = -pdV = -\frac{RT}{V} dV \quad \Leftrightarrow \quad c_V \frac{dT}{T} = -R \frac{dV}{V}.$$

Integriert man diese Gleichung auf beiden Seiten, so erhält man

$$c_V \ln T = -R \ln V + C.$$

Wobei C eine Konstante ist. Stellt man dies nach C um, so gilt

$$C = c_V \ln T + R \ln V = \ln T^{c_V} + \ln V^R = \ln(T^{c_V} \cdot V^R) = \text{const.}$$

Woraus schließlich

$$T^{c_V} V^R = \text{const}$$

folgt. Nun gilt $c_p = c_V + R$ [siehe dazu Versuch 06: Spezifische Wärme der Luft und Gasthermometer], woraus $R = c_p - c_V$ folgt. Somit gilt also

$$T^{c_V} V^R = T^{c_V} V^{c_p - c_V} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad TV^{\frac{c_p - c_V}{c_V}} = TV^{\kappa - 1} = \text{const.}$$

Für ein Mol gilt nach der idealen Gasgleichung $T = pV/R$. Setzt man dies ein, so erhält man

$$TV^{\kappa - 1} = \frac{pV^\kappa}{R} = \text{const.}$$

Daraus folgt schließlich die Poisson-Gleichung für ideale Gase:

$$pV^\kappa = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad p \sim V^{-\kappa}.$$

7.2.4 Berechnung des Adiabatenexponentes über die Freiheitsgrade

In Versuch 06 [Spezifische Wärme der Luft und Gasthermometer] haben wir folgende Beziehungen hergeleitet:

$$\frac{c_V}{R} = \frac{f}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c_V = \frac{f}{2} R$$

sowie

$$c_p = c_V + R = \left(\frac{f}{2} + 1 \right) R = \left(\frac{f+2}{2} \right) R.$$

Daraus folgt

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{f+2}{2} R}{\frac{f}{2} R} = \frac{f+2}{f}.$$

7.2.5 Berechnung des Adiabatenexponentes nach Rüchardt

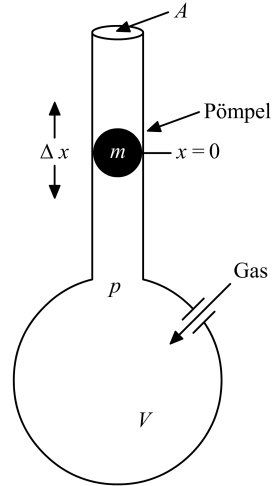


Abbildung 45: Schema des Versuchsaufbaus

In ein Gefäß des Volumens V wird ein Gas gepumpt, so dass in dem Gefäß der Druck p herrscht. Auf der Oberseite des Gefäßes ist eine Röhre mit der Querschnittsfläche A angebracht. An dem Punkt $x = 0$ hat die Röhre ein kleines Loch. Befindet sich nun ein eng anliegender Pömpel in der Glasröhre [kein Gas kann an ihm vorbeiströmen], so führt dieser eine ungedämpfte Schwingung aus. Befindet sich der Pömpel der Masse m unterhalb des Loches, so drückt ihn der Überdruck in der Röhre nach oben, hat er das Loch passiert, so kann ihn das Gas nicht weiter nach oben drücken, da es aus dem Loch herausströmt. Nun fällt der Pömpel aufgrund seiner Gewichtskraft mg wieder nach unten. Aus der Schwingungsdauer T lässt sich κ bestimmen.

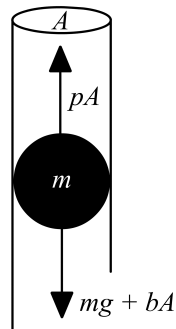


Abbildung 46: Gleichgewichtslage des Pömpels

Herrscht außerhalb des Gefäßes der Luftdruck b , so ist der Pömpel im Gleichgewicht, also wenn

$$mg + b \cdot A = p \cdot A \quad \Leftrightarrow \quad p = b + \frac{mg}{A}$$

gilt. Schwingt der Pömpel nun um Δx über die Gleichgewichtslage hinaus, so erhöht sich der Gasdruck p im Gefäß um dp . Es gilt

$$m\ddot{x} = A \cdot dp.$$

Um dp zu berechnen benutzt man die Poisson-Gleichung [siehe 7.2.3]. Es gilt also $pV^\kappa = \text{const.}$ Dies leitet man nun nach V ab:

$$\begin{aligned} d(pV^\kappa) &= dp \cdot V^\kappa + p \cdot \kappa V^{\kappa-1} \cdot dV = 0 \\ V^\kappa dp &= -\kappa V^{\kappa-1} p dV \\ dp &= -\kappa p \frac{dV}{V} = -\kappa p \frac{A \Delta x}{V}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich eine Differentialgleichung für die Schwingung des Pömpels:

$$m\ddot{x} = A \cdot dp = -\kappa p \frac{A^2 x}{V} \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + \frac{\kappa p A^2}{V} x = 0.$$

Für diese allgemeine Schwingungsgleichung ist die Lösung für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mV}{\kappa p A^2}}.$$

Stellt man dies nach κ um, ergibt sich

$$\kappa = \frac{4\pi^2 mV}{pA^2 T^2}.$$

Nun schwingt die Luft in dem Rohr ebenfalls mit, also ist die Masse $m_{eff} = m + m_L$. Die Querschnittsfläche des Rohres ist $A = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$.

Somit erhält man die Formel, die in der Auswertung benötigt wird:

$$\kappa = \frac{64m_{eff}V}{pd^4T^2}.$$

7.2.6 Berechnung des Adiabatenexponent nach Clement-Desormes

Diese Methode nutzt die Druckmessung vor und nach einer adiabatisch ablaufenden Expansion. In einem Behälter wird der Druck mit Hilfe eines Blasebalges erhöht. Nach einem Temperatúrausgleich mit der Umgebungstemperatur wird der Druck gemessen [Zustand 1]. Nun wird das Gas über ein Ventil expandiert [Zustand 2]. Jetzt wird das Ventil geschlossen und man hat man wieder das Ausgangsvolumen bei einer geringeren Temperatur [Zustand 3]. Nach einem Temperatúrausgleich wird wieder der Druck gemessen [Zustand 4].

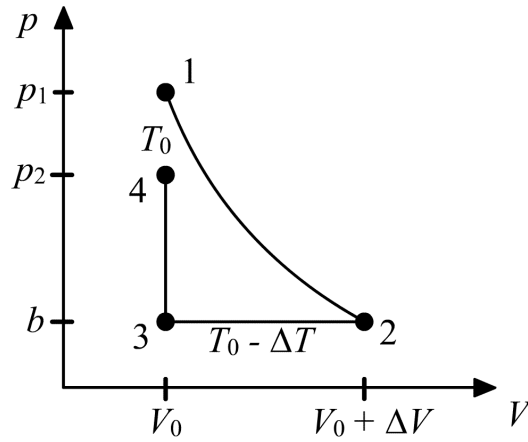


Abbildung 47: pV Diagramm des Versuchs

Zustand	Druck	Volumen	Temperatur
1	$b + \Delta p_1$	V_0	T_0
2	b	$V_0 + \Delta V$	$T_0 - \Delta T$
3	b	V_0	$T_0 - \Delta T$
4	$b + \Delta p_2$	V_0	T_0

Der Übergang von Zustand 1 zu Zustand 2 ist adiabatisch. Somit lässt sich die Poisson-Gleichung $pV^\kappa = \text{const}$ anwenden.

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$$

$$(b + \Delta p_1) V_0^\kappa = b (V_0 + \Delta V)^\kappa.$$

Teilt man beide Seiten der Gleichung durch b und benutzt die für $\Delta V \ll V_0$ geltende Näherung $(V_0 + \Delta V)^\kappa \approx V_0^\kappa + \kappa V_0^{\kappa-1} \Delta V$, folgt

$$\frac{b + \Delta p_1}{b} V_0^\kappa = V_0^\kappa + \kappa V_0^{\kappa-1} \Delta V$$

$$1 + \frac{\Delta p_1}{b} \approx 1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_0}$$

$$\frac{\Delta p_1}{b} \approx \kappa \frac{\Delta V}{V_0}$$

$$\frac{\Delta p_1}{\kappa b} \approx \frac{\Delta V}{V_0}.$$

Für die Temperaturen der Zustände 1 und 2 lässt sich die Poisson-Gleichung $TV^{\kappa-1} = \text{const}$ anwenden.

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}.$$

Eingesetzt ergibt sich

$$(T_0 - \Delta T)(V_0 + \Delta V)^{\kappa-1} = T_0 V_0^{\kappa-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta T}{T_0} = (\kappa - 1) \frac{\Delta V}{V_0}.$$

Setzt man $\Delta V/V$ aus der ersten Gleichung ein, folgt

$$\frac{\Delta T}{T_0} = (\kappa - 1) \frac{\Delta p_1}{\kappa b}.$$

Da sich beim Übergang zwischen Zustand 3 und 4 das Volumen nicht ändert, kann man die Volumina gleichsetzen. Für ideale Gase gilt $V = nRT/p$.

$$\begin{aligned} V_3 &= V_4 \\ \frac{nR(T_0 - \Delta T)}{b} &= \frac{nRT_0}{b + \Delta p_2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{b}{b + \Delta p_2} = \frac{T_0 - \Delta T}{T_0} = 1 - \frac{\Delta T}{T_0}.$$

Setzt man nun das oben hergeleitete Ergebnis für $\Delta T/T_0$ ein und formt nach κ um, erhält man schließlich

$$\kappa = \frac{b\Delta p_1 + \Delta p_1\Delta p_2}{b(\Delta p_1 - \Delta p_2) + \Delta p_1\Delta p_2},$$

was sich für $\Delta p_1\Delta p_2 \ll b$ vereinfachen lässt zu

$$\kappa \approx \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2}.$$

Da nun für die Druckänderung im Manometer $\Delta p = \rho g \Delta h$ gilt, wobei ρ die Dichte des Öls, g die Schwerebeschleunigung und Δh die Höhenänderung am Manometer ist, vereinfacht sich κ schließlich zu

$$\kappa \approx \frac{\rho g \Delta h_1}{\rho g \Delta h_1 - \rho g \Delta h_2} = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 - \Delta h_2}.$$

Dies ist die Formel, die in der Auswertung benötigt wird. Da sich ρ rauskürzt, braucht man es für die Auswertung nicht.

7.3 Versuchsdurchführung

7.3.1 Methode nach Rüchardt

Zunächst sollte überprüft werden, ob an den Gasanschlüssen ein Überdruck von $0,5 - 1 \text{ bar}$ eingestellt worden ist. Dies ist wichtig, da der Pömpel sonst nicht in Schwingung gebracht werden kann.

Nun wird das auf dem Tisch angebrachte Ventil geöffnet. Der Pömpel sollte sich anheben. Dann das Entlüftungsventil öffnen, und die Apparatur ca. 3 Minuten mit dem Gas durchspülen. Dieser beschleunigte Gasaustausch sollte bei jedem Gaswechsel durchgeführt werden.

Nun wird das Entlüftungsventil geschlossen, und das am Tisch befestigte Ventil so weit aufgedreht, bis sich eine symmetrische Schwingung um die kleine Öffnung im Glasrohr ergibt. Es ist darauf zu achten, dass der Pömpel nicht an das

obere Ende des Rohres anschlägt.

Die Stoppuhr wird auf die gewünschte Anzahl der Schwingungen eingestellt, und die Messung mit dem Taster gestartet. Die Schwingungsdauer ist für jede der drei Gasarten zu messen: 10 mal für eine Schwingung und jeweils 3 mal für 10, 50 und 100 Schwingungen. Es sollte bei jeder Gasart die ungefähre Schwingungsamplitude gemessen werden.

Nun sollten noch die Daten an der Apparatur notiert, der Luftdruck im Raum und die Strecke zwischen des Luftschlitzes und dem oberen Ende des Rohres gemessen werden.

7.3.2 Methode nach Clement-Desormes

Durch den Blasebalg wird der Druck in der Apparatur erhöht. Nach einiger Zeit wird der Überdruck Δh_1 am Manometer abgelesen. Nun wird das Entlüftungsventil für kurze Zeit geöffnet. Nach einiger Zeit wird wieder der Überdruck Δh_2 abgelesen. Die Messung sollte mehrmals für verschiedene Öffnungszeiten [ca. 0,1 s; 1 s; 5 s] wiederholt werden.

7.4 Auswertung

7.4.1 Rüchardt

κ lässt sich nun mit der in 7.2.5 hergeleiteten Formel berechnen. Es gilt

$$\kappa = \frac{64m_{eff}V}{T^2pd^4}.$$

Die effektive Masse m_{eff} berechnet sich aus der Summe der Masse des Pömpels und der mitschwingenden Luftsäule. Es gilt

$$m_{eff} = m + m_l = m + hA\rho,$$

wobei m die Masse des Pömpels, $h = 11,5 \text{ cm}$ die Strecke zwischen dem Luftschlitz und dem oberen Rohrende, A die Querschnittsfläche des Rohres und $\rho = 1,204 \text{ kg/m}^3$ die Dichte der Luft bei einer Temperatur von 20°C ist.

p ist der Druck in der Apparatur für den

$$p = b + \frac{mg}{A}$$

gilt. Dabei ist b der äußere Luftdruck und g die Schwerebeschleunigung.

Wir maßen einen Luftdruck von $b = 742,8 \text{ Torr} = 742,8 \cdot 101325/760 \text{ Pa} = 99031 \text{ Pa}$ mit einem Fehler von $\sigma_b = 0,1 \text{ Torr} \approx 14 \text{ Pa}$. Es ergibt sich ein Druck von $p = 99662 \text{ Pa}$ mit dem Fehler $\sigma_p = \sigma_b = 14 \text{ Pa}$.

An der Apparatur lasen wir folgende Werte ab: $m = 4,954 \text{ g}$, $d = 9,905 \text{ mm}$ und $V = 2211 \text{ cm}^3$.

Es ergaben sich folgende Werte für κ :

Perioden	κ Luft	σ_{κ_L}	κ Argon	σ_{κ_A}	κ CO ₂	σ_{κ_C}
1	1.47148	0.01472	1.68498	0.01686	1.39122	0.01392
10	1.46735	0.01468	1.61497	0.01616	1.40856	0.01409
50	1.47023	0.01471	1.64452	0.01645	1.39972	0.014
100	1.46855	0.01469	1.68363	0.01684	1.37434	0.01375

Der jeweilige Fehler ergibt sich durch das Gesetz der Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_{\kappa} = \sqrt{\sigma_p^2 \left(\frac{\partial \kappa}{\partial p} \right)^2 + \sigma_T^2 \left(\frac{\partial \kappa}{\partial T} \right)^2} = \frac{64V m_{eff}}{T^2 d^4 p} \sqrt{\frac{\sigma_p^2}{p^2} + \frac{4\sigma_T^2}{T^2}},$$

wobei $\sigma_T = 0,000001 + \text{Messwert} \cdot 0,005 \text{ s}$ der systematische Fehler der Lichtschranke ist.

Bestimmt man den gewichteten Mittelwert ergibt sich

κ Luft	σ_{κ_L}	κ Argon	σ_{κ_A}	κ CO ₂	σ_{κ_C}
1.469	0.008	1.656	0.009	1.393	0.007

Durch den in 7.2.4 hergeleiteten Zusammenhang

$$\kappa = \frac{f+2}{f} \quad \Leftrightarrow \quad f = \frac{2}{\kappa-1}$$

können wir nun die Freiheitsgrade der jeweiligen Gase berechnen. Für den entsprechenden Fehler gilt

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_{\kappa}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \kappa} \right)^2} = \frac{2 \sigma_{\kappa}}{(\kappa-1)^2}.$$

f Luft	σ_{f_L}	f Argon	σ_{f_A}	f CO ₂	σ_{f_C}
4.26	0.07	3.05	0.04	5.09	0.09

7.4.2 Clement-Desormes

Nach der in 7.2.6 hergeleiteten Formel berechnet sich κ durch

$$\kappa = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 - \Delta h_2}.$$

Der Fehler ergibt sich durch das Gesetz der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{\kappa} = \sqrt{\sigma_{\Delta h_1}^2 \left(\frac{\Delta h_2}{(\Delta h_1 - \Delta h_2)^2} \right)^2 + \sigma_{\Delta h_2}^2 \left(\frac{\Delta h_1}{(\Delta h_1 - \Delta h_2)^2} \right)^2}.$$

Wobei wir $\sigma_{\Delta h_1} = \sigma_{\Delta h_2} = 0,002 \text{ m}$ geschätzt haben.

Öffnungszeit	Δh_1	Δh_2	κ_L	σ_{κ_L}
0.1 s	43	29	3.071	0.001
1 s	58.5	28	1.918	0.001
5 s	62.5	11.5	1.226	0.001

7.5 Diskussion

7.5.1 Rüchardt

Da Luft und CO_2 5 Freiheitsgrade¹ haben [siehe dazu Versuch 06: Spezifische Wärme der Luft und Gasthermometer], wäre der theoretisch erwartete Wert von κ

$$\kappa_{L,C} = \frac{f+2}{f} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Für Luft haben wir einen zu hohen Wert berechnet. Dies liegt vielleicht daran, dass der Druck in der Apparatur stark variierte. Die Werte für CO_2 und Argon sind sehr zufriedenstellend. Argon ist ein Edelgas und hat somit 3 Freiheitsgrade. Der theoretische Wert für κ wäre somit

$$\kappa_A = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{3} \approx 1,66.$$

7.5.2 Clement-Desormes

Aufgrund einer ungenauen Beschreibung im Praktikumsskript haben wir nur sehr wenig Messungen durchgeführt. Außerdem fehlte in unserem Manometer etwas Öl, so dass wir ein Offset beim Ablesen hatten. Unsere Werte sind sehr seltsam, doch kann man erkennen, dass die Öffnungszeit von 5 s schon etwas zu lang war. Für lange Öffnungszeiten wird schon ein Temperatúrausgleich stattfinden, so dass sich kein Überdruck mehr einstellt. Also strebt κ für lange Öffnungszeiten gegen 1. Bei dem Ergebnis für eine Öffnungszeit von 0,1 s ist es möglich, dass wir das Ventil nicht richtig geöffnet haben. Somit konnte kein Druckausgleich stattfinden, und der Überdruck nach dem Temperatúrausgleich war zu hoch. Somit war auch der Wert für κ zu hoch.

7.5.3 Verbesserungsvorschläge

Der Luftdruck sollte noch etwas höher eingestellt werden, so dass die einzelnen Gruppen auch parallel arbeiten können. Zudem sollte der Versuchsaufbau ganz links mit der kurzen Strecke zwischen Luftschlitz und Rohrende ersetzt werden. Bei diesem Aufbau war es sehr schwer den Gasdruck so zu regulieren, dass sich eine gleichmäßige Schwingung ergab, ohne dass der Pömpel sofort an das Rohrende stieß, bzw. dass der Pömpel überhaupt schwang.

¹ Nach <http://de.wikipedia.org/wiki/Freiheitsgrad>, Aufrufdatum 28. Juli 2005, hat CO_2 sogar 6 Freiheitsgrade: "Kohlendioxid (dreiatomig, linear) weist sechs Freiheitsgrade auf, da hier der Schwingungsfreiheitsgrad bereits bei Normaltemperatur verfügbar ist".

Eigene Kommentare

[Teil 2 war total dumm der Aufbau, sonst immerhin ganz lustig.]^{Daniel}

[Diesesmal hatten wir ein wenig Pech mit unserer Apparatur. Der Pömpel wollte einfach nicht so richtig schwingen, und blieb manchmal einfach in der Mitte des Rohres stehen. Die Beschreibung von dem 2. Versuchsteil ist eine Katastrophe. Das Praktikumsskript war hier sehr ungenau, so dass wir wahrscheinlich völlig falsche Werte am Manometer abgelesen haben.]^{Hauke}

8 Dampfdruck von Wasser

Versuch durchgeführt am 2. Juni 2005, Protokoll erarbeitet von Daniel Scholz.

8.1 Einleitung

Bringt man in ein zuvor evakuiertes Gefäß eine Flüssigkeit ein, die es nur zum Teil ausfüllt, wechselt ein Teil der Flüssigkeit den Aggregatzustand: die Flüssigkeit verdampft und über ihr stellt sich ein für sie charakteristischer Druck ein. Die Flüssigkeit besteht aus Molekülen, die sich in regelloser Bewegung befinden. Jedes Molekül hat eine bestimmte kinetische Energie, die bei einigen dieser Moleküle so groß ist, dass sie die intermolekularen Anziehungskräfte überwinden können und aus der Oberfläche der Flüssigkeit austreten [siehe dazu Versuch 05: Kapillarität und Viskosität]. Dieser Prozess wird Verdampfung genannt. Teilweise treten die außerhalb der Flüssigkeit vorhandenen Gasmoleküle wieder in die Flüssigkeit ein, da sie aufgrund von Stoßprozessen im Außenraum an Energie verlieren. So stellt sich ein dynamisches Gleichgewicht ein.

Dieser Versuch soll die entscheidende Größe gemessen werden: Der Dampfdruck von Wasser.

Der Schnellkochtopf

Das grundlegende Prinzip dieses Versuches wird auch beim Schnellkochtopf ausgenutzt. Die Druckabhängigkeit der Siedetemperatur wird genutzt, damit das Garen unter leicht erhöhtem Druck erfolgen kann. Während der Ankochzeit bildet sich Wasserdampf, der die Luft aus dem Topfinneren verdrängt. Ist die Luft vollständig aus dem Topf verdrängt, so strömt Dampf aus dem Ventil, im Topfinneren baut sich ein Überdruck auf. Den Druckanstieg regelt ein Überdruckventil, das in der Regel auf zwei Garstufen einstellbar ist. Infolge höheren Drucks erhöht sich auch der Siedepunkt des Wassers. So kocht die Flüssigkeit erst bei 105°C bis 120°C . Die höhere Temperatur im Topf bewirkt eine Verkürzung der Garzeit und hat somit auch einen niedrigeren Energieverbrauch zur Folge.

8.2 Theorie

8.2.1 Reale Gase

Ein Gas lässt sich nicht für alle Temperaturen mit der Zustandsgleichung des idealen Gases

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

beschreiben [siehe Versuch 06: Spezifische Wärme der Luft und Gasthermometer].

Zum Beispiel verflüssigen sich bei vorgegebenem Druck alle Gase unterhalb einer bestimmten Temperatur. Ein physikalischer Vorgang, den die Zustandsgleichung des idealen Gases überhaupt nicht wiederzugeben vermag. Auch kann man aus der mathematischen Form der idealen Zustandsgleichung erkennen, dass sie nicht für alle Temperaturen das Verhalten der Gase in Übereinstimmung mit der Erfahrung zu beschreiben erlaubt. Wählt man zum Beispiel bei einem endlichen Druck $p \neq 0 \text{ Pa}$ die Temperatur $T = 0 \text{ K}$, so folgt aus der idealen Gasgleichung zwangsläufig $V = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Wirklichkeit, denn alle Gase sind nach unserer Erfahrung aus Atomen oder Molekülen mit einem von Null verschiedenen Volumen aufgebaut. Ein Verschwinden des Gasvolumens bei $T = 0 \text{ K}$ ist deshalb unmöglich.

Eine zweckmäßige Zustandsgleichung für reale Gase wurde von Van der Waals entwickelt. Er erkannte, dass die wesentlichen Eigenschaften realer Gase durch Einführung von zwei Korrekturgliedern a und b in die Zustandsgleichung des idealen Gases beschrieben werden können. Mit den beiden für das betrachtete Gas charakteristischen Konstanten $a > 0$ und $b > 0$ gewann Van der Waals aus der idealen Gasgleichung nun die Beziehung

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right) \cdot (V - nb) = n \cdot R \cdot T,$$

dabei ist p der Druck, T die Temperatur, V das Volumen, R die Gaskonstante, n die Stoffmenge in mol , a die **Binnendruckkonstante** sowie b die **Eigen volumenkonstante** des Gases [siehe unten].

Diese Gleichung wird als **Van der Waalsche Zustandsgleichung** für reale Gase bezeichnet.

Binnendruckkonstante

Der Binnendruck ist eine pro Flächeneinheit nach innen wirkende Kraft. Sie führt dazu, dass auf die Teilchen untereinander eine anziehende Kraft wirkt, die sich in der Mitte des Gases aufhebt, am Rand jedoch wirksam ist.

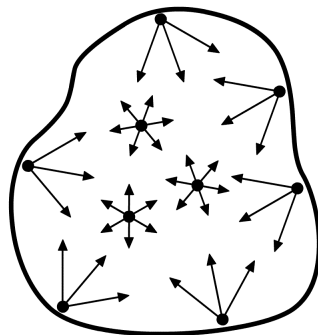


Abbildung 48: Kräfte des Binnendruckes

Die anziehende Kraft wird im Allgemeinen als Dipolwechselwirkung angenommen. Die Druckverringerung hängt von der Zahl der Teilchen an der Oberfläche [proportional zur Teilchendichte] und dem mittleren Abstand der Teilchen

[ebenfalls ungefähr proportional zur Teilchendichte] ab. Diese Druckverringering muss zum realen Druck hinzuaddiert werden, um den Druck eines idealen Gases zu erhalten:

$$p \mapsto p + a \cdot \frac{n^2}{V^2}.$$

Eigenvolumenkonstante

Das Eigenvolumen ist das von den n Teilchen eingenommene Volumen. Es wird vom eigentlichen Volumen abgezogen, dabei ist die Volumenkorrektur proportional zur Teilchenzahl n :

$$V \mapsto V - nb.$$

8.2.2 Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik kann in mehreren äquivalenten Versionen formuliert werden. So zum Beispiel folgende:

Version 1

Wärme kann nie von selbst von einem Körper niedrigerer auf einen Körper höherer Temperatur übergehen.

Version 2

Alle Prozesse, die in der Natur ohne äußere Einwirkungen ablaufen, sind irreversibel. Der Wirkungsgrad einer beliebigen Wärmekraftmaschine ist also immer kleiner als 1.

Version 3 - allgemeine Version

Die Entropie eines geschlossenen Systems kann nicht abnehmen. Ein System geht also nie von selbst in einen bedeutend unwahrscheinlicheren Zustand über.

8.2.3 Isothermen der Van der Waals Gleichung

Die Graphen, die die Zustandsveränderungen bei konstanten Temperatur beschreiben, nennt man Isothermen. Die folgende Abbildung zeigt die Isothermen der Van der Waals Gleichung:

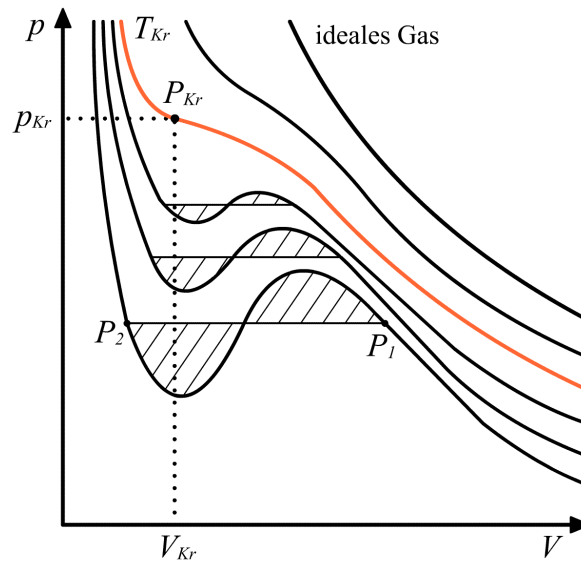


Abbildung 49: Isothermen der Van der Waals Gleichung

Die Abbildung macht zudem deutlich, wie die Isothermen für große Temperaturen gegen diejenigen konvergieren, die durch die ideale Gasgleichung vorhergesagt werden. Betrachtet man jedoch nur den folgenden Abschnitt der Graphen,

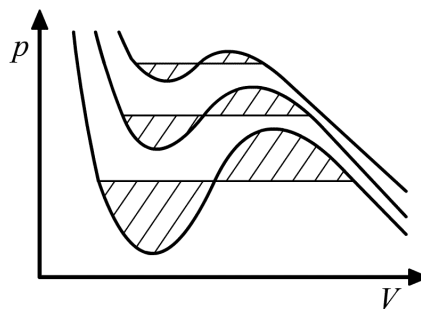


Abbildung 50: Abschnitt der Graphen

so lässt sich leicht ein Widerspruch zum zweiten Hauptsatz aufweisen. Um dies zu verstehen, führen wir folgendes Gedankenexperiment durch:

Es ist ein Zylinder gegeben, der mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Diese wird durch einen beweglichen Kolben an einem Ende am Abfließen gehindert.

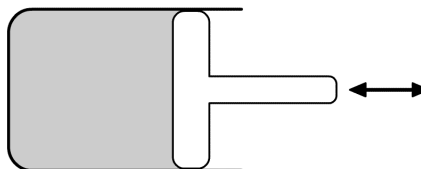


Abbildung 51: Zylinder mit Flüssigkeit und Kolben

Außerdem befindet sich das gesamte Konstrukt in einem Wasserbad, so dass die Temperatur während des Versuchs konstant bleibt. Ein Durchlaufen des

Graphen von rechts nach links entspricht der Verkleinerung des Volumens und damit einem Hereindrücken des Kolbens.

Der Graph lässt nur den Schluß zu, dass sich der Druck zunächst verringert, dann allerdings wieder ansteigt. Um das zu erreichen, müssten die Moleküle, für die zuvor noch ein kleineres Volumen ausreichte, gegen den Kolben stoßen [Druck = Kraft / Fläche]. Dadurch befänden sich allerdings zu jedem Zeitpunkt mehr Teilchen in dem rechten als in dem linken Teil des Gefäßes. Da sich somit eine Ordnung einstellt, müsste sich die Entropie verkleinern, was einen Widerspruch zum zweiten Hauptsatz darstellt.

8.2.4 Korrektur der Van der Waals Gleichung

Um die Van der Waals Gleichung nun korrigieren zu können, verlässt man sich auf experimentelle Ergebnisse. Führt man das oben beschriebene Gedankenexperiment durch, so zeigt sich, dass die Flüssigkeit verdampft.

Dies spiegelt sich in den Isothermen durch die sogenannte **Maxwell Gerade** wieder, die so durch den Graphen gelegt wird, dass oberhalb dieselbe Fläche eingeschlossen wird wie unterhalb [siehe Abbildung 50]. Bei steigender Temperatur verkürzt sich die Gerade immer weiter. Es existiert ein kritischer Punkt P_{Kr} , dem eine kritische Temperatur T_{Kr} entspricht, bei der keine Gerade durch die Isotherme mehr gelegt werden kann.

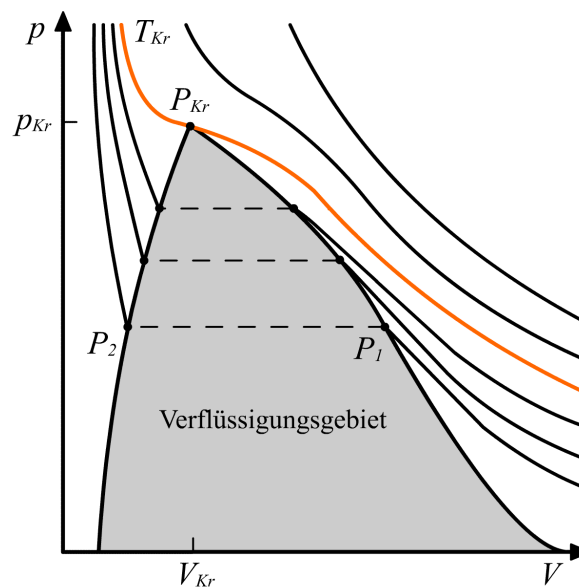


Abbildung 52: Isothermen und das Verflüssigungsgebiet

Experimentell lässt sich verifizieren, dass tatsächlich oberhalb dieser Temperatur kein Wechsel des Aggregatzustandes mehr stattfindet, d.h. das Gas wird sich auch bei noch so hohem Druck nicht mehr verflüssigen.

Unterhalb dieser Temperatur beginnt im Punkt P_1 die Verflüssigung des Gases. Bis zur Verflüssigung des gesamten Gases verläuft dann die Isotherme parallel zur V -Achse entlang der Maxwell Gerade. Dem Endpunkt der Verflüssigung

entspricht der Schnittpunkt P_2 der waagerechten Geraden mit der betrachteten Isotherme. Eine weitere Volumenverringerng führt dann wegen der praktischen Inkompressibilität der Flüssigkeit zu einem raschen Druckanstieg.

8.2.5 Carnot Prozess

Eine Carnot Maschine kann wieder durch ein "Zylinder-Kolben-System" beschrieben werden. Im Zylinder befindet sich ein Arbeitsgas, das dort ständig verbleibt und in der Modellvorstellung abwechselnd mit Wärmereservoirs der Temperatur T_A und T_B in Kontakt gebracht wird. Der Kreisprozess besteht aus vier Teilschritten:

- (1) Von $1 \rightarrow 2$ erfolgt eine isotherme Expansion, bei der die Wärme Q_C zugeführt wird.
- (2) Der isothermen Expansion folgt eine adiabatische Expansion von $2 \rightarrow 3$, bei der auch eine Abkühlung auf die Temperatur $T_B < T_A$ stattfindet.
- (3) Es schließt sich eine isotherme Kompression von $3 \rightarrow 4$ an. Dabei wird auf dem Temperaturniveau T_B die Wärme Q_D dem Arbeitsgas entzogen.
- (4) Von $4 \rightarrow 1$ wird das Arbeitsgas im Zylinder adiabatisch weiterkomprimiert, bis der Anfangszustand erreicht ist.

Ein Carnot-Prozess besteht also aus zwei Isothermen und zwei Adiabaten. Die hierbei umgesetzte Arbeit ergibt sich aus der Fläche, die im p - V Diagramm eingeschlossen wird.

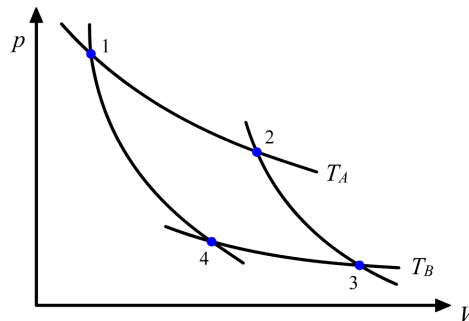


Abbildung 53: p - V Diagramm zum Carnot Prozess

Der Wirkungsgrad berechnet sich zu

$$\eta = - \frac{\Delta W}{\Delta Q} = \frac{T_A - T_B}{T_A} = 1 - \frac{T_B}{T_A} < 1.$$

8.2.6 Die Clausius-Clapeyron Gleichung

Wenn Moleküle aus einer Flüssigkeit in den Dampfraum treten, müssen sie Arbeit gegen die Anziehungskräfte leisten, die die Flüssigkeit zusammenhalten [siehe Versuch 05: Kapillarität und Viskosität]. Deswegen gelingt nur den energiereicheren Molekülen das Austreten aus der Flüssigkeit und es bleiben im Durchschnitt energieärmere Moleküle zurück. Die Flüssigkeit kühlt sich ab, es

tritt Verdunstungskälte auf. Wenn die Temperatur konstant bleiben soll, muss man der Flüssigkeit die spezifische Verdampfungsenergie Λ zuführen, um ein Kilogramm davon zu verdampfen. Wenn Dampf kondensiert, wird natürlich die gleiche Energie als Kondensationsenergie wieder frei.

Den Zusammenhang zwischen Verdampfungsenergie und Steigung der Dampfdruckkurve liefert die **Clausius-Clapeyron** Gleichung. Zu ihrer Herleitung betrachten wir den folgenden Carnot Prozess:

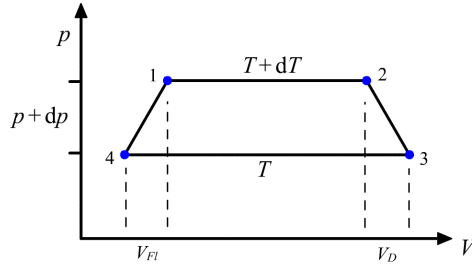


Abbildung 54: Kreisprozess zur Herleitung der Clausius-Clapeyron Gleichung

Die Abbildung beschreibt einen Kreisprozess, bei dem ein Kilogramm einer Flüssigkeit in einem Zylinder abwechselnd verdampft und kondensiert wird. Im Zustand 1 ist praktisch aller Dampf kondensiert, das Volumen ist V_{Fl} . Nun verdampft man bei konstanter Temperatur $T + dT$ die Flüssigkeit, indem man das Gefäß in einen Wärmebehälter mit der Temperatur $T + dT$ taucht und durch reversibles Zurückziehen des Kolbens den Aggregatzustand der Flüssigkeit ändert $[1 \rightarrow 2]$. Dabei leistet der Zylinderinhalt unter Zufuhr der Verdampfungsenergie Λ die Arbeit

$$\Delta W_1 = - (p + dp) \cdot (V_D - V_{Fl}).$$

Die Wärmezufuhr dient teils zur Loslösung der Flüssigkeitsmoleküle, teils zur Arbeitsverrichtung $-\Delta W_1$. Nun kühlt man durch adiabatische Expansion um dT ab und gelangt zum Zustand 3. Der Zylinder wird nun in einen Wärmespeicher mit der Temperatur T getaucht und das Gas wird langsam isotherm komprimiert, bis bei Zustand 4 aller Dampf wieder kondensiert ist.

Da dT hinreichend klein ist, lassen sich die Näherungen

$$V_D = V_{D_3} = V_{D_2} \quad \text{und} \quad V_{Fl} = V_{Fl_3} = V_{Fl_2}$$

verwenden. Beim Übergang von 3 nach 4 wird damit die Arbeit

$$\Delta W_2 = p \cdot (V_D - V_{Fl})$$

aufgewandt. Schließlich wird der Kreisprozess durch Erwärmen der Flüssigkeit von T auf $T + dT$ abgeschlossen. Die Arbeiten an den Übergängen $2 \rightarrow 3$ und $4 \rightarrow 1$ sind wieder vernachlässigbar klein. Es gilt somit

$$-\Delta W = -\Delta W_1 - \Delta W_2 = dp \cdot (V_D - V_{Fl}).$$

Der Wirkungsgrad dieses reversiblen Kreisprozesses ergibt sich wie bei dem Carnot Prozess aus der schon erwähnten Relation

$$\eta = -\frac{\Delta W}{\Delta Q} = \frac{dp \cdot (V_D - V_{Fl})}{\Lambda} = \frac{T + dT - T}{T + dT} = \frac{dT}{T + dT} \approx \frac{dT}{T}.$$

Man erhält nun für ein Volumen V die Gleichung von Clausius-Clapeyron:

$$\Lambda_V = T \cdot \frac{dp}{dT} \cdot (V_D - V_{Fl}).$$

Im Allgemeinen sind die Drücke nicht zu hoch, es gilt also $V_{Fl} \ll V_D$. Wendet man nun das ideale Gasgesetz an [wobei die Stoffmenge als $n = 1 \text{ mol}$ angenommen wird], so gilt

$$p \cdot V_D = R \cdot T.$$

Man erhält somit

$$\Lambda_V = T \cdot \frac{dp}{dT} \cdot \frac{R \cdot T}{p} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{p} = \frac{\Lambda \cdot dT}{R \cdot T^2}.$$

Durch Trennung der Variablen sowie durch das Einsetzen von Grenzen ergibt sich nun

$$\log p \Big|_{p_0}^p = - \frac{\Lambda}{R \cdot T} \Big|_{T_0}^T,$$

also ist die **Dampfdruckformel**

$$p = p_0 \cdot \exp \left(\frac{\Lambda}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right).$$

8.2.7 Widerstandsthermometer

Während des Versuches wird ein Pt1000 Widerstandsthermometer verwendet, daher soll dieses hier kurz erklärt werden.

Das Thermometer dient zur Messung der Temperatur innerhalb des geschlossenen Zylinders. Pt bedeutet dabei, dass der Messfühler aus reinem Platin besteht. 1000 bedeutet, dass das Gerät bei 0°C einen Widerstand R_0 von genau 1000Ω hat. Für Temperaturen $K > 0^\circ\text{C}$ steigt der Widerstand R mit der Temperatur an, es gilt

$$R(K) = R_0 \cdot (1 + AK + BK^2),$$

dabei sind $A = 3,9083 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ und $B = -5,775 \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$ stoffspezifische Koeffizienten des Messfühlers. Der aktuelle Widerstand wird über einen Messverstärker ermittelt und ausgegeben, somit kann auch die aktuelle Temperatur berechnet werden. Der Fehler des Widerstandsmessfühlers liegt systematisch bei

$$\Delta K = 0,3^\circ\text{C} + 0,005K.$$

8.3 Aufgaben

Bevor es mit dem eigentlichen Versuch losgeht, soll nun noch die folgende Aufgabe diskutiert werden:

8.3.1 Aufgabe 1

Berechnen die Siedetemperatur von Wasser auf der Zugspitze.

Lösung

Der Druck p am Gipfel der Zugspitze mit der Höhe $h = 2962\text{ m}$ beträgt nach der barometrischen Höhenformel

$$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{\rho g h}{p_0}\right) = 69964.4\text{ Pa},$$

dabei ist $p_0 = 101300\text{ Pa}$ der Normaldruck, $\rho = 1.29\text{ kg/m}^3$ die Dichte von Luft und $g = 9.81\text{ m/s}^2$ die Erdbeschleunigung.

Die Siedetemperatur ist als die Temperatur definiert, bei der der Dampfdruck gleich dem auf ihr lastenden Umgebungsdruck ist. Nach der oben hergeleitete Dampfdruckkurve

$$p = p_0 \cdot \exp\left(\frac{\Lambda}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right)$$

erhalten wir also

$$T = -\frac{1}{\log\left(\frac{p}{p_0}\right) \cdot \frac{R}{\Lambda} - \frac{1}{T_0}} = 362.7\text{ K},$$

dabei ist $T_0 = 373\text{ K}$ und $\Lambda = 40590\text{ J/mol}^1$ die Verdampfungswärme von Wasser.

Die Siedetemperatur von Wasser auf der Zugspitze ist also 89.6°C .

8.4 Versuchsdurchführung

Ein mit Wasser gefüllter Kolben ist mit einem Manometer verbunden und wird von einem Heizstrahler langsam erwärmt. Die Druckänderung wird als Funktion der Temperatur $p(T)$ am Manometer abgelesen und es wird Druck sowie Temperatur [in unserem Falle also der Widerstand] notiert. Der Versuch wird beendet, wenn entweder $1900\ \Omega$ oder 45 bar erreicht werden, je nachdem, was zuerst eintritt.

Im zweiten Teil des Versuches ist wieder die Druckänderung als Funktion der Temperatur $p(T)$ zu messen, nur diesmal beim Abkühlen des Kolbens.

8.5 Auswertung**8.5.1 Druckkurven**

Aus der Gleichung $R = R_0 \cdot (1 + AK + BK^2)$ des Widerstandsthermometers können nun die Temperaturen x in $^\circ\text{C}$ durch

$$x = -\frac{A}{2B} - \sqrt{\frac{A^2}{4B^2} - \frac{R_0 - R}{R_0 B}}$$

¹ nach Meschede D. (2001): "Gerthsen Physik". 21. Auflage, Springer Verlag. Seite 264.

berechnet werden. Dabei ist R jeweils der gemessene Widerstand in Ω und A, B, R_0 sind Konstanten wie in 8.2.7 beschrieben.

Die Druckkurven als Arrheniusplot ergeben sich nun durch Auftragen von $\log(p)$ gegen $1/T$.

Erwärmen

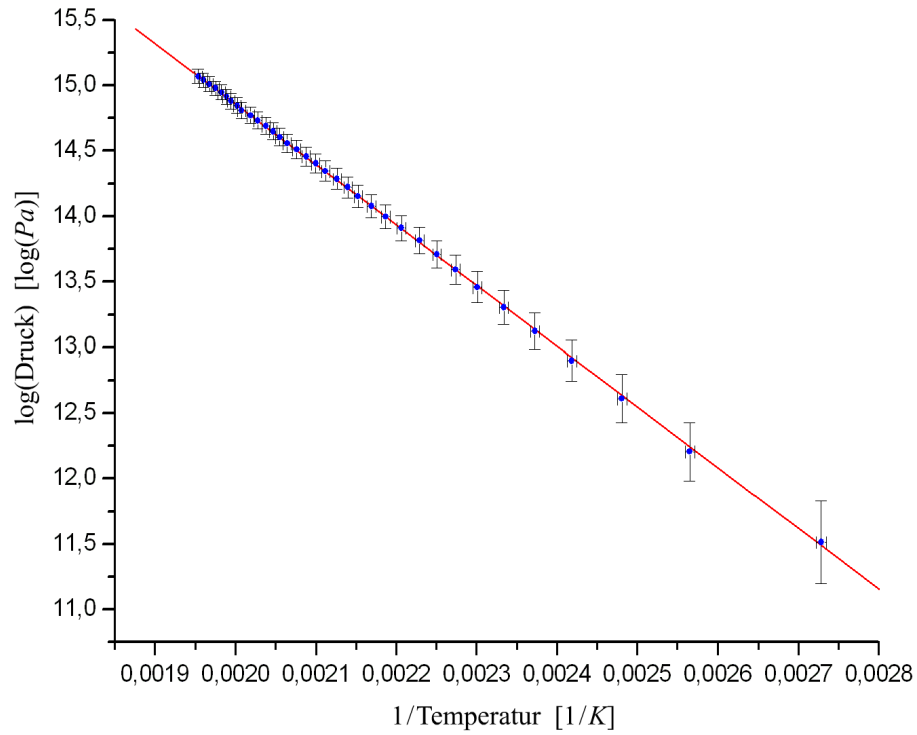


Abbildung 55: Arrheniusplot für die Erwärmung

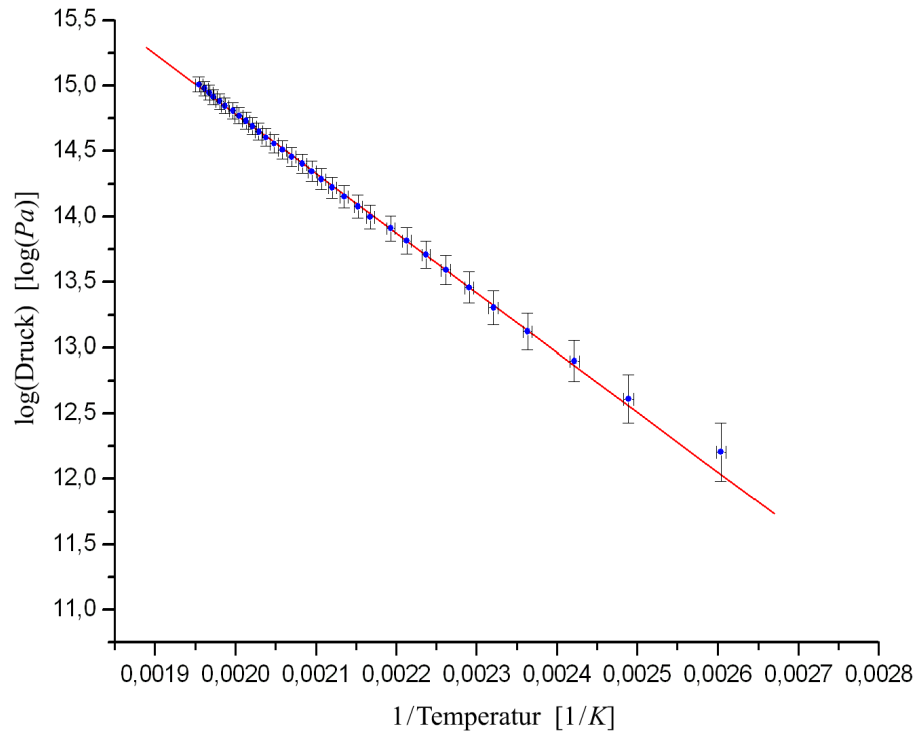
Abkühlen

Abbildung 56: Arrheniusplot für die Abkühlung

8.5.2 Verdampfungswärme Λ

Aus der Steigung m dieser Geraden lässt sich nun die Verdampfungswärme des Wassers bestimmen. Für m gilt

$$m = \frac{d \log p}{d(1/T)}.$$

Die Druckkurven wurden so aufgetragen, dass nun nach der Dampfdruckformel gerade

$$\begin{aligned} m &= \frac{d \log p}{d(1/T)} = \frac{d \log [p_0 \exp(\Lambda/R \cdot (1/T_0 - 1/T))]}{d(1/T)} \\ &= \frac{d(\log p_0 + \Lambda/RT_0 - \Lambda/RT)}{d(1/T)} = -\frac{\Lambda}{R} \end{aligned}$$

gilt. Man erhält also

$$\Lambda = -m \cdot R.$$

Durch lineare Regression erhalten wir die Steigung m und berechnen damit folgende Werte:

	m [1/K]	Λ
Erwärmen	$-4626.5 \pm 11,5$	$38446 \pm 95 \text{ J/mol}$
Abkühlen	-4555.4 ± 27.0	$37855 \pm 224 \text{ J/mol}$

Durch Anwenden des gewichteten Mittelwertes erhalten wir das Endergebnis

$$\Lambda = (38356 \pm 87) \text{ J/mol.}$$

8.5.3 Siedepunkt des Wassers unter Normaldruck

Setzt man die Druckkurven

$$\log p = \frac{m}{T} + b$$

fort [Extrapolation], so erhalten wir den Siedepunkt T_S des Wassers bei Normaldruck $p = 101300 \text{ Pa}$ aus der Formel

$$T_S = \frac{m}{\log p - b},$$

siehe dazu auch Aufgabe 1 auf Seite 102.

Der Fehler σ_{T_S} berechnet sich dabei durch

$$\sigma_{T_S} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{\log p - b}\right)^2 + \left(\frac{m \cdot \sigma_b}{(\log p - b)^2}\right)^2}.$$

Durch lineare Regression erhalten wir die Steigung m [wie oben] sowie den Achsenabschnitt b und berechnen damit folgende Werte:

	m	b	T_S
Erwärmen	$-4626.5 \pm 11,5$	24.11 ± 0.02	$367.58 \pm 0.91 \text{ K}$
Abkühlen	-4555.4 ± 27.0	23.90 ± 0.06	$368.21 \pm 2.18 \text{ K}$

Durch Anwenden des gewichteten Mittelwertes erhalten wir das Endergebnis

$$(94.52 \pm 0.84) ^\circ\text{C}.$$

8.5.4 Dampfdruck des Wassers bei 0°C

Der Dampfdruck p bei der Temperatur $T = 0^\circ\text{C} = 273.115 \text{ K}$ ergibt sich nun aus der gleichen Formel, welche schon bei dem Siedepunkt verwendet wurde:

$$p = \exp\left(\frac{m}{T} + b\right).$$

Der Fehler σ_p berechnet sich dabei durch

$$\sigma_{T_S} = \sqrt{\left(\frac{\exp(m/T + b) \cdot \sigma_m}{T}\right)^2 + (\exp(m/T + b) \cdot \sigma_b)^2}.$$

Wir berechnen damit folgende Werte:

	m	b	p
Erwärmen	$-4626.5 \pm 11,5$	24.11 ± 0.02	$1306.1 \pm 63.0 \text{ Pa}$
Abkühlen	-4555.4 ± 27.0	23.90 ± 0.06	$1366.7 \pm 154.5 \text{ Pa}$

Durch Anwenden des gewichteten Mittelwertes erhalten wir das Endergebnis

$$(1314.7 \pm 58.3) \text{ Pa}.$$

8.6 Diskussion

8.6.1 Vergleich zu den Literaturwerten und Fehlerdiskussion

Es werden nun noch unsere Endergebnisse mit den Literaturwerten verglichen:

Verdampfungswärme

Messergebnis	Literaturwert	Abweichung
$38356 \pm 87 \text{ J/mol}$	40590 J/mol	5.82 %

Unser Messergebnis weicht mit 5.82% nur recht gering vom Literaturwert² ab. Es ist jedoch zu bemerken, dass der Literaturwert nicht in unserem Fehlerbalken liegt. Da der Fehler nur aus der linearen Regression entstand, können wir auch keine Messfehler falsch eingeschätzt haben.

Siedepunkt bei Normaldruck

Messergebnis	Literaturwert	Abweichung
$94.52 \pm 0.84 \text{ }^\circ\text{C}$	$100 \text{ }^\circ\text{C}$	5.80 %

Auch dieses Ergebnis weicht mit 5.80% nur wenig vom Literaturwert³ ab, welcher wieder nicht im Fehlerbalken liegt. Zu dem erfreulichen Ergebnissen bislang haben auch sicherlich die neuen Instrumente beigetragen. Es war uns möglich, Daten von 0 bar bis über 30 bar aufzunehmen, wodurch genügend Messdaten vorhanden waren.

Dampfdruck bei 0°C

Messergebnis	Literaturwert	Abweichung
$1314.7 \pm 58.3 \text{ Pa}$	611.15 Pa	114.9 %

Lediglich das Ergebnis des Dampfdruckes ist weniger erfreulich. Da die Auswertung hier einem exponentiellen Gesetz folgt, verändern kleine Abweichungen des Ergebnis extrem. Würde sich der Achsenabschnitt b um nur 4% verschieben, so würde sich das Ergebnis um mehr als 400% ändern.

Eigene Kommentare

[Im Vergleich zu anderen Versuchen war die Theorie sowie die Auswertung erträglich, auch wenn es wie immer recht lange gedauert hat.]^{Daniel}

[Nach dem Versuch zur Gravitationswaage war dieser Versuch auch angenehmer in der Durchführung.]^{Hauke}

² nach Meschede D. (2001): "Gerthsen Physik". 21. Auflage, Springer Verlag, Seite 264.

³ nach <http://de.wikipedia.org/wiki/Sättigungsdampfdruck>. Aufgerufen am 03.06.2005.

9 Diffusion

Versuch durchgeführt am 09. Juni 2005, Protokoll erarbeitet von Hauke Rohmeyer.

9.1 Einleitung

In diesem Versuch wird die Diffusion von Methylenblau in Wasser untersucht. Eine räumliche Inhomogenität einer physikalischen Größe erzeugt einen Ausgleichsstrom. In diesem Versuch handelt es sich um eine Konzentrationsinhomogenität, die durch einen Massestrom ausgeglichen wird. Die Konzentration von Methylenblau wird hierbei als Funktion des Ortes und der Zeit untersucht. Somit können die Fickschen Gesetze verifiziert, und die Diffusionskonstante D bestimmt werden.

9.2 Theorie

9.2.1 Brownsche Molekularbewegung

Die Brownsche Molekularbewegung ist eine Eigenbewegung der Moleküle. Diese wurde vom schottischen Botaniker Robert Brown im Jahr 1827 wiederentdeckt, in dem er Pollen in einem Wassertropfen beobachtete [schon 1785 beobachtete Jan Ingenhousz diese Bewegung von Holzkohlestaub auf Alkohol]. Die Erklärung für diese unregelmäßig zuckende Bewegung des Pollens ist, dass die Moleküle des Wassertrofens gegen die Pollenteilchen stoßen.

Diffusion und Osmose basieren auf dieser Molekularbewegung.

9.2.2 Die Fickschen Gesetze

Diffusion findet genau dann statt, wenn die Teilchenkonzentration $c(x)$ keine konstante Funktion darstellt. Es folgt also ein Diffusionsstrom, dessen Stromdichte \vec{j} dem Konzentrationsgefälle $\vec{\nabla}c$ entgegengesetzt ist. Der Teilchenstrom fließt also von Gebieten mit hoher Konzentration in Gebiete mit niedriger Konzentration. Durch diesen Zusammenhang erhält man das 1. Ficksche Gesetz, mit dem materialspezifischen Diffusionskoeffizienten D

$$\vec{j}(\vec{x}) = -D \vec{\nabla} c.$$

Nun verlangt aber die Erhaltung der Teilchenzahl, dass die Teilchenzahldichte in einem bestimmten Volumen abnimmt, wenn mehr Teilchen aus- als einströmen.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x})$$

Setzt man nun in diese Gleichung das 1. Ficksche Gesetz ein, erhält man die allgemeine Diffusionsgleichung, das 2. Ficksche Gesetz:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) = D\Delta c.$$

9.2.3 Mathematische Lösung der Diffusionsgleichung

Das 2. Ficksche Gesetz ist eine partielle Differentialgleichung, die z.B. durch eine Fouriertransformation gelöst werden kann.

Werden beide Seiten des 2. Fickschen Gesetzes fouriertransformiert, so erhält man

$$\frac{\partial F(c)}{\partial t} = D\Delta F(c) = D\Delta \int_{-\infty}^{\infty} \vec{j}(c) e^{ikc} dc = -k^2 DF(c).$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung, die mit dem Exponentialansatz gelöst werden kann. Man erhält

$$F(c) = A e^{-k^2 Dt} \quad \text{mit} \quad A := F(c_{t=0}).$$

Nun lassen sich die Anfangsbedingungen für unseren speziellen Versuchsaufbau zum Zeitpunkt $t = 0$ wie folgt formulieren:

$$c(x, 0) = \begin{cases} c_0 & \text{für } x \leq 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

Somit erhält man die Fouriertransformierte für $t = 0$:

$$F(c_{t=0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 c_0 e^{ikx} dx.$$

Wird diese Lösung nun rücktransformiert erhält man nach einigen Umformungen

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right],$$

wobei erf die Gaußsche Fehlerfunktion ist, die wie folgt definiert ist:

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-v^2) dv.$$

9.2.4 Photowiderstand

Der Photowiderstand ist ein Widerstand, dessen Wert von der Intensität des einstrahlenden Lichtes abhängt. Bei steigender Lichtintensität sinkt sein Widerstand. Der Photowiderstand ist ein Halbleiter und besteht oft aus einer Cadmiumsulfid-Schicht. Da in dem Halbleiter kaum freie Elektronen zur Verfügung stehen, kann kaum elektrischer Strom fließen. Wird nun der Photowiderstand mit Licht bestrahlt, werden die Atome angeregt. So stehen zusätzliche Elektronen zur Verfügung, es kann mehr Strom fließen, und somit ist der Widerstand kleiner.

9.2.5 Wheatstonesche Brückenschaltung

Nach dem Ohmschen Gesetz $U = R \cdot I$ lässt sich ein Widerstand messen, indem man die Spannung U an ihm und den Strom I durch ihn bestimmt, und beide durcheinander teilt. Durch die Innenwiderstände der Messgeräte würde die Messung jedoch sehr ungenau sein. Man vermeidet dies, indem man stromlos misst. In einer **Wheatstone-Brücke** schaltet man den zu bestimmenden Widerstand R_x [in diesem Versuch den Photowiderstand] mit drei bekannten Widerständen zusammen [siehe Abbildung 57], von denen mindestens einer variabel ist [z.B. R_v - in diesem Versuch ein Potentiometer].

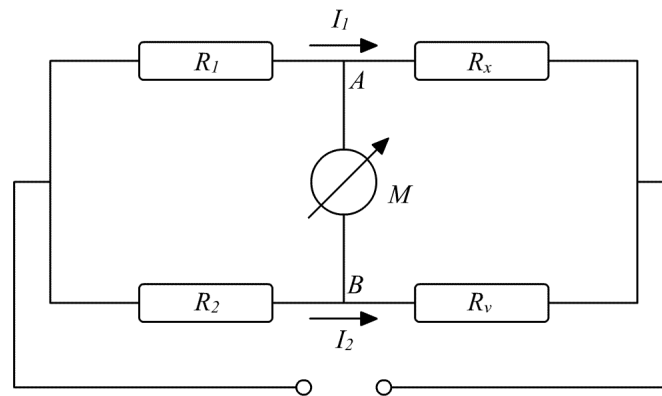


Abbildung 57: Wheatstone-Brücke .

Nun wird die Brücke abgeglichen: R_v wird so eingestellt, dass durch das Messinstrument M kein Strom fließt. Das ist der Fall wenn die Spannung zwischen A und B verschwindet, was bedeutet, dass die Spannungsabfälle an R_x und R_v gleich sind [also auch die an R_1 und R_2]. Weil nun durch M kein Strom fließt, geht der Strom I_1 bei A vollständig weiter durch R_x , und der Strom I_2 an B durch R_v . Es ergibt sich

$$I_1 R_x = I_2 R_v \quad \text{und} \quad I_1 R_1 = I_2 R_2$$

$$\Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_v}{R_x} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\Rightarrow R_x = R_v \frac{R_1}{R_2}.$$

Da R_1 , R_2 und R_v bekannt sind, lässt sich R_x also bestimmen.

9.3 Versuchsdurchführung

9.3.1 Versuchsaufbau

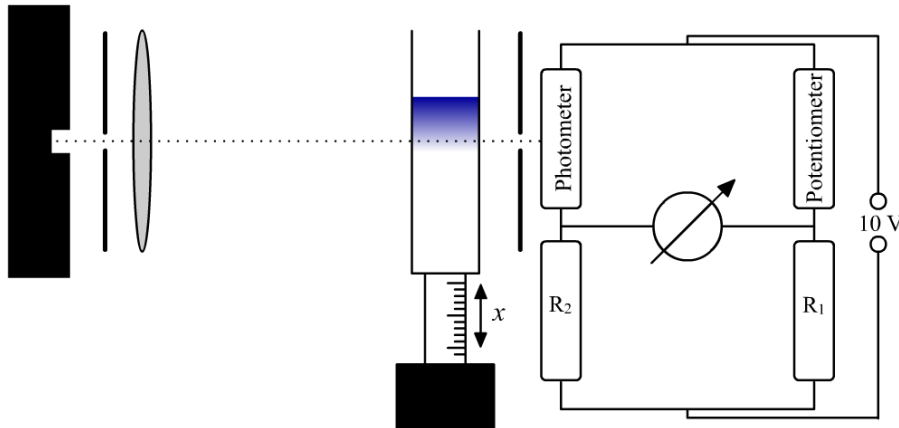


Abbildung 58: Schema des Versuchsaufbaus

In einer Glasküvette wird Methylenblau über Wasser geschichtet. Das vertikale Konzentrationsprofil wird mittels der Absorption des Lichtes der Quecksilberdampf Lampe über einen Photowiderstand gemessen. Hierzu ist dieser an eine Wheatstone-Brückenschaltung angeschlossen. Die Brückenschaltung wird mit Hilfe eines Graufilters auf eine bestimmte Konzentration abgeglichen. Nun kann der Ort dieser Konzentration als Funktion der Zeit durch Höhenverstellung der Küvette gemessen werden. Wenn die Brückenschaltung für verschiedene Konzentrationen von Methylenblau geeicht wird, so kann das Konzentrationsprofil innerhalb der Küvette gemessen werden.

9.3.2 Versuchsdurchführung

Zunächst wird die Wheatstone-Brücke mit Kabeln zusammengesteckt. Hierbei ist zu beachten, dass der Widerstand R_1 möglichst klein [5,1 oder 20 $k\Omega$], und der Widerstand R_2 groß [82 $k\Omega$] gewählt wird [siehe Abbildung 57].

Es sollte nun ausprobiert werden, ob die Brückenschaltung auf alle Konzentrationen, die für den Versuch benötigt werden, geeicht werden kann. Notfalls müssen zwei Potentiometer in Reihe geschaltet werden.

Für Messung 1 wird die Brücke nun auf die Konzentration $c_0/16$ geeicht. Dann wird eine Küvette zu 3/4 mit Wasser gefüllt und Methylenblau darüber geschichtet. Die Küvette wird in die Halterung gesteckt, wobei darauf geachtet werden sollte, dass die Halterung nahe am Photometer steht, und die Mikrometerschraube im weiteren Versuchsablauf noch weiter nach oben gedreht werden kann [ca. 3 mm].

In den nächsten 30 Minuten wird die Position der Küvette mittels der Mikrometerschraube immer so eingestellt, dass das Ampèremeter keinen Strom misst. Alle 30 Sekunden wird die Skala an der Mikrometerschraube abgelesen.

Für Messung 2 wird die 1. Küvette vorsichtig zur Seite gestellt und die Brücken-

schaltung auf die Konzentration $c_0/32$ geeicht. Mit einer zweiten Küvette wird genauso verfahren wie in Messung 1.

Für Messung 3 wird die Küvettenhalterung so eingestellt, dass durch hin- und herschieben der Halterung leicht zwischen der Küvette und einem daneben eingestecktem Graufilter gewechselt werden kann. 40 Minuten nach Messung 2 wird die Konzentrationsverteilung innerhalb der Küvette bestimmt. Dafür wird die Brückenschaltung hintereinander auf die Konzentrationen $c_0/2$, $c_0/4$, $c_0/8$, $c_0/16$ und $c_0/32$ geeicht und jeweils der dazugehörige Wert der Mikrometerschaltung notiert. Danach wird die Konzentrationsverteilung nochmals in umgekehrter Reihenfolge gemessen. Nach Abschluss der Messung wird die Zeit notiert, die für den gesamten Vorgang in Anspruch genommen wurde.

100 Minuten nach Beginn von Messung 1 wird in Messung 4 das Konzentrationsprofil der 2. Küvette bestimmt. Es wird genauso wie in Messung 3 verfahren.

9.4 Auswertung

9.4.1 Verlauf der Messungen

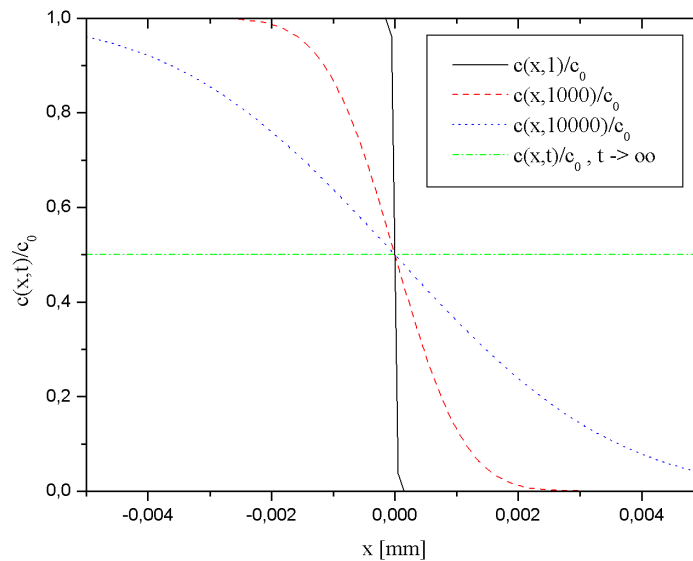


Abbildung 59: Diffusionskurven für verschiedene Messzeiten

In der Graphik sind Diffusionskurven für verschiedene Messzeiten t aufgetragen. Die Diffusionskurven berechnen sich nach

$$\frac{c(x,t)}{c_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right),$$

wobei $D = 4 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ angenommen wurde.

Bei Messung 1 und 2 wird der Ort einer bestimmten Konzentration in Abhängigkeit von der Zeit bestimmt. In der Graphik bewegt man sich also parallel zur x-Achse.

Bei Messung 3 und 4 wird die Zeit nahezu konstant gehalten und verschiedene Konzentrationen in Abhängigkeit vom Ort gemessen. In der Graphik bewegt man sich also auf einer der eingezeichneten Kurven.

Nachdem die beiden Flüssigkeiten aufeinander geschichtet wurden besteht zwischen ihnen eine klare Trennschicht. Durch die Diffusion werden die beiden Flüssigkeiten ineinander vermischt, und so stellt sich für $t \rightarrow \infty$ ein stationärer Zustand ein.

9.4.2 Bestimmung des Diffusionskoeffizienten

Messung 1

Die in 9.2.3 hergeleitete Formel muss nach D aufgelöst werden.

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) = 1 - \frac{2 c(x, t)}{c_0}$$

Wenn man nun die konstante Konzentration $c(x, t) = \frac{c_0}{16}$ einsetzt, ergibt sich

$$\operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) = 1 - \frac{2 c(x, t)}{c_0} = 1 - \frac{2 \frac{c_0}{16}}{c_0} = 1 - \frac{2}{16} = \frac{7}{8}.$$

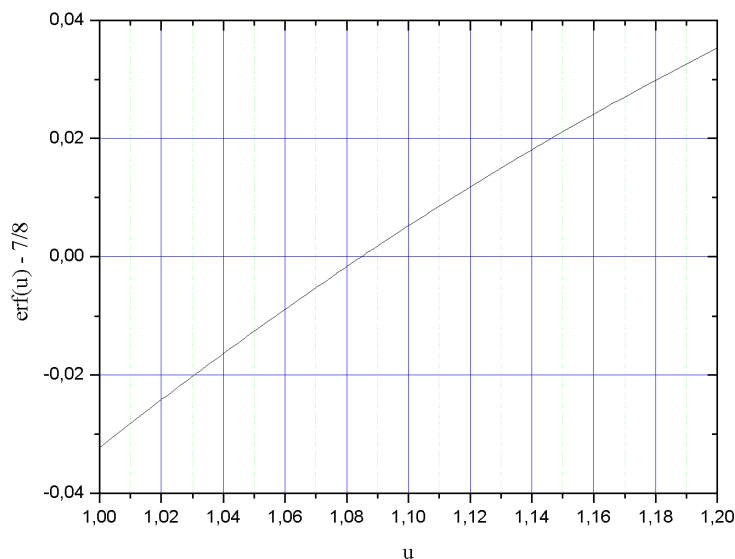


Abbildung 60: Gaußsche Fehlerfunktion

Nun liest man in Abbildung 60 ab, dass $\operatorname{erf}(1,085) - \frac{7}{8} \approx 0$, also $\operatorname{erf}(1,085) \approx \frac{7}{8}$ gilt. Daraus folgt

$$\frac{x}{\sqrt{4Dt}} = 1,085 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{x^2}{t \cdot 4 \cdot 1,085^2},$$

was sich mit $m := \frac{x^2}{t}$ vereinfacht zu

$$D = \frac{m}{4,7089}.$$

Um m zu bestimmen, wird das Quadrat der Diffusionsstrecke gegen die Zeit aufgetragen. Die Auftragung ergibt eine Gerade, da $4,7089^{-1}$ sowie D konstant sind. Somit muss auch $\frac{x^2}{t} = m$ konstant sein.

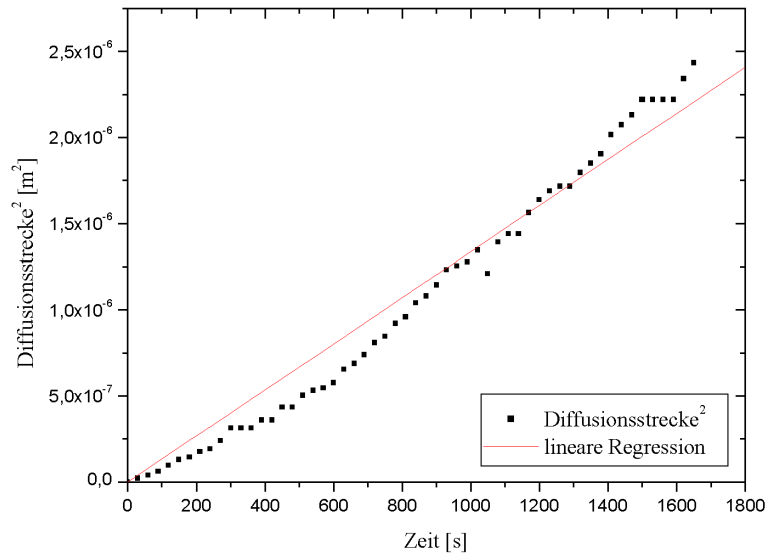


Abbildung 61: Bestimmung von m

Durch lineare Regression ergibt sich $m = 1,34 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ mit dem Fehler $\sigma_m = 0,02 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$.

Also ist

$$D = \frac{1,34 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2}{4,7089 \text{ s}} = 2,84 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Der Fehler ergibt sich durch das Gesetz der Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_m^2 \left(\frac{\partial D}{\partial m} \right)^2} = \sqrt{\frac{\sigma_m^2}{4,7089}} = 0,10 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Messung 2

In Messung 2 gilt $[c(x, t) = \frac{c_0}{32}]$, also

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) = 1 - \frac{2 \frac{c_0}{32}}{c_0} = \frac{15}{16}.$$

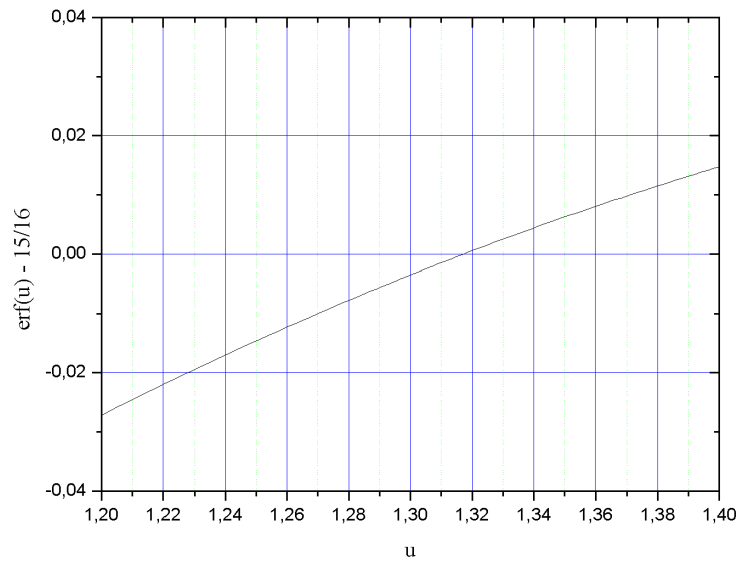


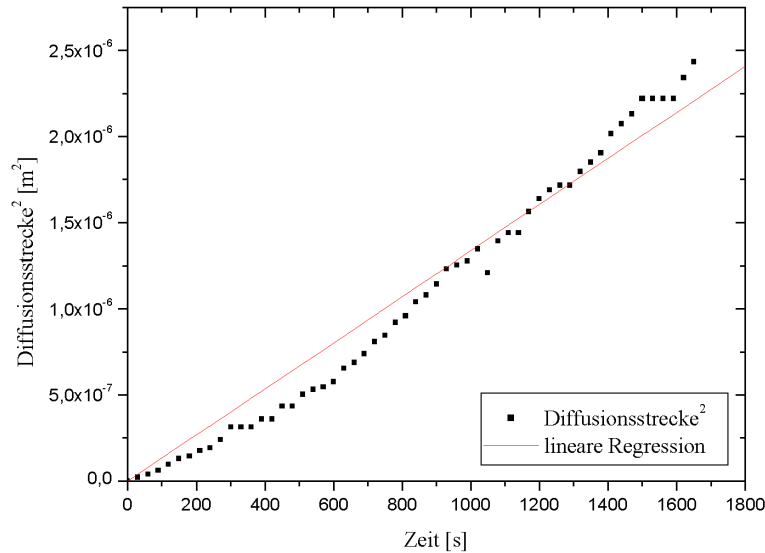
Abbildung 62: Gaußsche Fehlerfunktion

In Abbildung 62 liest man ab, dass $\operatorname{erf}(1,317) \approx \frac{15}{16}$ gilt.

Daraus folgt analog zur Berechnung von D in Messung 1

$$D = \frac{m}{4 \cdot 1,317^2},$$

wobei m wieder mit linearer Regression ermittelt wird.

Abbildung 63: Bestimmung von m

Es ergibt sich $m = 2,16 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ mit dem Fehler $\sigma_m = 0,04 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$.

Also ist

$$D = \frac{2,16 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2}{4 \cdot 1,317^2 \text{ s}} = 3,11 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

mit dem Fehler

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sigma_m^2}{4 \cdot 1,317^2}} = 0,29 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Wenn wir den gewichteten Mittelwert aus Messung 1 und 2 bilden, ergibt sich

$$D = 2,87 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

mit dem Fehler

$$\sigma_D = 0,10 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

9.4.3 Konzentrationsprofil

Mit dem errechneten Diffusionskoeffizienten lassen sich nun die theoretisch erwarteten Werte für das Konzentrationsprofil mit den gemessenen Werten vergleichen.

Leider konnten wir die Brückenschaltung nicht für die Konzentration $c_0/2$ eichen, so dass diese Messwerte fehlen.

Wenn man nun die in 9.2.3 hergeleitete Formel nach $c(x,t)/c_0$ umstellt, lassen sich die theoretische erwarteten Werte des Konzentrationsprofils für eine

konstante Zeit berechnen:

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{c(x, t)}{c_0} = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right].$$

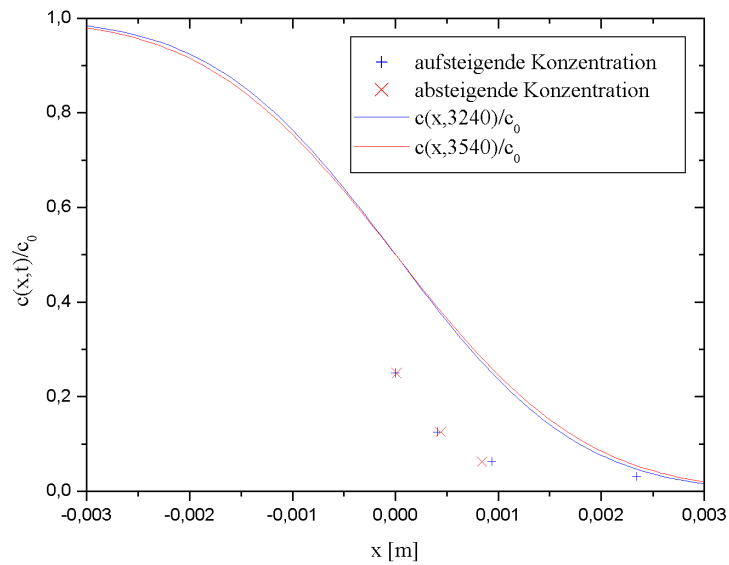


Abbildung 64: Konzentrationsprofil nach 54 Minuten

Wir haben ungefähr 5 Minuten für die Messung benötigt. In Abbildung 64 kann man sehen, dass die theoretisch erwarteten Werte sich in diesem Zeitraum nur minimal unterscheiden.

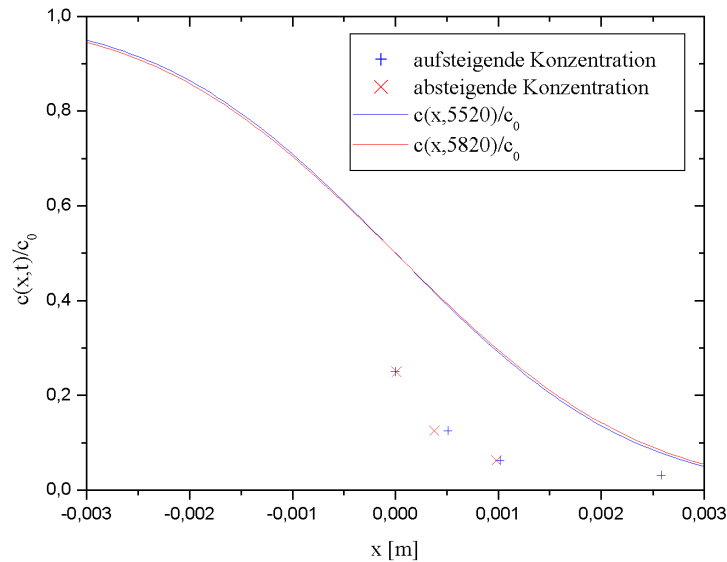


Abbildung 65: Konzentrationsprofil nach 92 Minuten

Auffällig ist, dass die Werte für die Konzentrationen $c_0/4$, $c_0/8$ und $c_0/16$ deutlich unter den theoretisch erwarteten liegen.

Dies könnte daran liegen, dass die Graufilter die zur Eichung der Messbrücke benutzt wurden sehr stark verschmutzt waren bzw. keine einheitliche Farbe hatten. Es ist sehr fraglich, ob wir hier tatsächlich die richtigen Konzentrationen gemessen haben.

9.5 Diskussion

Die Werte für den Diffusionskoeffizienten weichen stark von dem im Praktikums-skript vorgeschlagenem Wert von $D = 4 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ ab. Auch die Fehlerbalken liegen nicht im erhofften Bereich.

Wir sind mit dem Endergebnis unzufrieden, doch haben wir schon während des Versuches gemerkt, dass unsere Messungen nicht sehr präzise waren. Es lassen sich sehr viele Fehlerquellen nennen.

Wie schon bemerkt, waren die Graufilter sehr stark verschmutzt, oder „ausgelaufen“. Auch die Küvetten waren verschmutzt. Also wurden wahrscheinlich nicht die richtigen Konzentrationen gemessen.

Bei Messung 1 und 2 war zudem unser Praktikumsaufbau falsch justiert. Die Küvette stand nicht nah genug am Photometer, so dass der Lichtstrahl nicht auf die Küvette fokussiert war. Dies ist wohl die größte Fehlerquelle bei unserem Ergebnis. Da der Raum nicht abgedunkelt war, haben äußere Einflüsse den Widerstand des Photometers stark beeinflusst. Hat sich eine Wolke vor die Sonne geschoben, so haben wir längere Zeit den gleichen Widerstand gemessen, ohne

die Position der Küvette zu verändern. Das gleiche passierte, wenn sich jemand von uns bewegte, oder vor dem Versuchsaufbau entlanglief.

Zudem war das Ampèremeter nicht empfindlich genug, so dass die Messbrücke nur sehr ungenau geeicht werden konnte.

9.5.1 Verbesserungsvorschläge

Die Potentiometer sollten repariert werden, bzw. es sollten noch mehr vorhanden sein, um sie evt. in Reihe schalten zu können. Nach dem Zusammenstecken der Messbrücke sollte der Assistent darum gebeten werden, die Jalousien herunterzufahren. Am besten wird das Licht noch gedimmt. Eventuelle Toilettengänge der Praktikanten sollten erledigt werden, so dass sie für den Rest der Messung ihren Platz nicht mehr verlassen müssen. Sollte der Praktikumsleiter den Raum betreten, so sollte dieser freundlich, aber bestimmt, darum gebeten werden die Tür schleunigst wieder von aussen zu schließen, da die Praktikanten sich auch über gute Messergebnisse freuen.

Eigene Kommentare

[Oh ja, die Vorfreude auf Scheessel war groß. Umso größer war der Ärger, dass der Versuch recht lange dauerte. Aber ging dann ja doch noch mal alles recht fix und wir konnten pünktlich los.]_{Daniel}

[Achja, Diffusion ist ein langsamer Prozeß, der noch viel langsamer abläuft, wenn man sich schon auf das erste Scheeßel-Bier freut. Also der Versuch ist sau langweilig, und man sollte auf jeden Fall für ausreichende Verdunkelung des Raumes gesorgt werden.]_{Hauke}

10 Die Potentialwaage

Versuch durchgeführt am 16. Juni 2005, Protokoll erarbeitet von Daniel Scholz.

10.1 Einleitung

Elektrische Felder üben eine Kraft auf geladene Teilchen aus, deren Stärke maßgeblich durch die Naturkonstante ε_0 - der sogenannten Influenzkonstanten der elektrischen Feldstärke - ausgedrückt wird. Die quantitative Bestimmung dieser Größe ist Gegenstand des vorliegenden Versuches. Wie zur Messung der Gewichtskraft lässt sich hierbei das Prinzip der Balkenwaage ausnutzen, wobei eine ihrer Waagschalen durch einen Plattenkondensator ausgetauscht wird. Dieser Aufbau der Potentialwaage war eine der ersten Vorrichtungen zur Messung der elektrischen Kraftwirkung.

10.2 Theorie

10.2.1 Kraft im elektrischen Feld

Zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2 an den Orten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 wirkt eine wechselseitige Kraft, die durch das **Coulombsche Gesetz** beschrieben wird. Es weist eine dem Gravitationsgesetz sehr ähnliche Form auf und lautet

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -\vec{F}_{12},$$

dabei ist ε_r eine dimensionslose Konstante, die materialspezifisch ist. Für Luft, dem in diesem Versuch behandelten Fall, gilt $\varepsilon_r \approx 1$. Die gesuchte Größe ε_0 beschreibt demnach die Stärke des Feldes.

Eine kleine Probeladung q im Raum lässt sich als elektrische Feldsonde verwenden. Der Quotient aus Kraft und Probeladung ist dann charakteristisch für das wirkende elektrische Feld und wird als dessen Stärke bezeichnet. Es gilt dann

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

für das Feld um eine Punktladung Q im Ursprung. Umgekehrt lässt sich hieraus natürlich die Kraft durch $\vec{F} = q\vec{E}$ gewinnen.

10.2.2 Arbeit und Potential im elektrischen Feld

Bei Bewegung der Probeladung muss also Arbeit gegen die oben beschriebene Kraft verrichtet werden, die als integrale Größe definiert ist. Von einem Punkt r_1 hin zu einem Punkt r_2 besitzt sie die Gestalt

$$W_{12} = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = -q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{r}.$$

Nach Maxwell ist das elektrische Feld \vec{E} rotationsfrei, es gilt also [im Vakuum] $\text{rot}\vec{E} = 0$, dadurch ist \vec{E} durch ein skalares Potential ϕ beschreibbar:

$$\vec{E} = -\nabla\phi.$$

Das Integral der Arbeit ist daher unabhängig vom gewählten Weg und nur von Anfangs- und Endpunkt der Bahn abhängig. Ein solches Kraftfeld wird als konservativ bezeichnet, es gilt also

$$W_{12} = q \cdot (\phi(r_2) - \phi(r_1)).$$

Die Potentialdifferenz $\phi(r_2) - \phi(r_1)$ wird auch als elektrische Spannung U bezeichnet, die durch die Angabe des Feldes und den zwei Punkten, zwischen denen sie besteht, eindeutig charakterisiert ist. Es gilt somit

$$W = q \cdot U, \quad U = \frac{W}{q} \quad \text{und} \quad U = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{r}.$$

10.2.3 Satz von Gauß

Der elektrische Fluss Φ , der das elektrische Feld beschreibt, das eine Fläche A durchdringt, berechnet sich nach

$$\Phi = \int_A \vec{E} \cdot \vec{n} da,$$

wobei \vec{n} der Normalenvektor der Fläche A ist. Wird nun ein elektrisches Feld durch eine Punktladung Q erzeugt, so gilt für den elektrischen Fluss gerade

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

10.2.4 Der Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei gegenüberliegenden Metallplatten mit einem möglichst geringen Abstand d . Legt man zwischen den Platten eine Spannung U an, so erfolgt eine Ladungstrennung, die ein elektrisches Feld zwischen den Platten hervorruft. Dieses Feld ist im Inneren des Kondensators weitgehend homogen, für die elektrische Feldstärke gilt

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{U}{d}.$$

Die Kapazität C eines Kondensators, dessen Platten die Oberfläche A besitzen, ergibt sich nach dem Satz von Gauß zu

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{Q}{U}.$$

Bringt man nun eine kleine Ladung dQ von einer auf die andere Platte, so wird die potentielle Energie E_{pot} des Systems erhöht, es gilt dabei skalar gerade

$$dE_{\text{pot}} = Fd = Ed dQ = U dQ = \frac{Q}{C} dQ.$$

Für die Gesamtenergie, die das System durch die Ladungstrennung erhält, gilt also

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{C} \int_0^Q Q' dQ' = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{\varepsilon_0 AU^2}{2d}.$$

Für die Kraft, die zwischen den Platten wirkt, gilt

$$F = -\nabla E_{\text{pot}} = -\frac{d}{dd} \left(\frac{\varepsilon_0 AU^2}{2d} \right) = \frac{\varepsilon_0 AU^2}{2d^2}.$$

Im Versuch wird ein Plattenkondensator verwendet, bei dem die beiden Metallplatten kreisförmig sind und den Radius R haben. Da die Kondensatorplatte einen umgebenen Schutzring haben und die Schlitzbreite zwischen Platte und Schutzring gerade $a = 1 \text{ mm}$ beträgt, gilt für die Fläche des Kondensators

$$A = \pi(R^2 - Ra)$$

mit $R = 40 \text{ mm}$. Stellt man nun die zuvor gewonnene Gleichung um, so erhält man

$$\varepsilon_0 = \frac{2Fd^2}{AU^2} = \frac{2Fd^2}{\pi(R^2 - Ra)U^2}, \quad (10.1)$$

dies ist die Gleichung, die in der Auswertung benötigt wird.

10.2.5 Das Prinzip der Kirchhoffschen Potentialwaage

Der grundlegende Versuchsaufbau besteht aus einer Balkenwaage, auf deren einer Seite eine Waagschale und auf der anderen die obere Platte eines Plattenkondensators befestigt ist. Die Entfernung der unteren Platte lässt sich anhand einer Mikrometerschraube regeln. Zwischen den Platten wird eine gleichgerichtete Hochspannung angelegt.

Durch kleine Gewichte in der einen Waagschale [1 bis 5 g] und durch Anlegen einer Spannung [2 bis 5 kV] an den Kondensatorplatten kann nun die Gewichtskraft und die Kraft zwischen den Kondensatorplatten gegeneinander gemessen werden, um aus der Formel (10.1) die Influenzkonstante ε_0 zu bestimmen.

10.2.6 Wirkungsweise einer Gleichrichterschaltung

Um im Versuchsaufbau die Wechselspannung gleichzurichten, muss also eine **Gleichrichterschaltung** verwendet werden.

Die heute überwiegend verwendete Schaltung nennt man die **Graetz Schaltung**. Bei dieser Schaltung werden vier Dioden in einer Brückenschaltung eingesetzt. Eine Diode leitet bei positiver Spannung der Anode gegen die Kathode, bei negativer Spannung sperrt sie. Bei der Graetz Schaltung leiten die Dioden abwechselnd den Strom für die positive bzw. negative Halbwelle der Wechselspannung. Die unteren Wellen der Wechselspannung werden somit an der Abzisse gespiegelt. Die Glättung des pulsierenden Gleichstroms wird durch einen Kondensator erreicht.

10.3 Versuchsdurchführung

Die Versuchsdurchführung gliedert sich in zwei Teile:

10.3.1 Konstante Kraft

In Teil 1 wird bei verschiedenen vorgegebenen Gewichten und Spannungen der Plattenabstand so lange erhöht, bis sich die obere Kondensatorplatte abhebt. Die gemessenen Werte sind relative Längenangaben, zu denen in der späteren Auswertung ein Korrekturwert bestimmt wird.

10.3.2 Konstanter Plattenabstand

In Teil 2 werden nun verschiedene Gewichte und Abstände vorgegeben und die Spannung wird jeweils so lange vermindert, bis die obere Kondensatorplatte abgehoben wird.

10.4 Auswertung

10.4.1 Konstante Kraft

In diesem Teil wurden nun Gewichte der Masse M zwischen 2 g und 5 g vorgegeben, wir erhielten also die Kraft $F = Mg$. Die folgende Abbildung zeigt nun den Plattenabstand, bei dem die obere Kondensatorplatte in Abhängigkeit der Spannung abgehoben wurde.

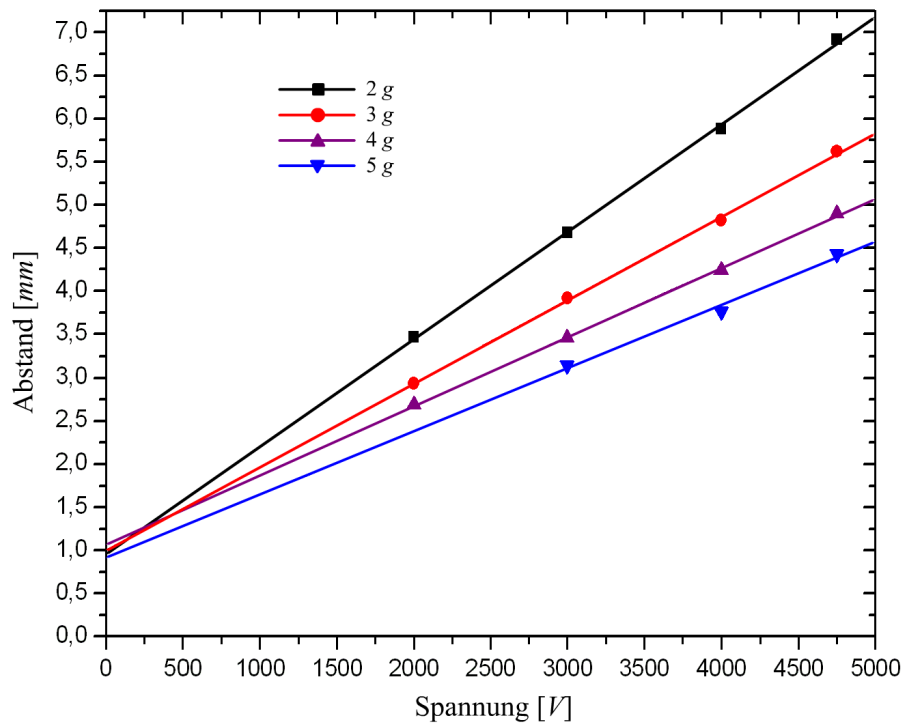


Abbildung 66: Plattenabstand gegen Spannung

Die Steigung m der einzelnen Geraden erhält man durch lineare Regression und diese gibt nun d/U in mm/V an. Somit können wir ε_0 durch

$$\varepsilon_0 = \frac{2Fd^2}{AU^2} = \frac{2F}{A}m^2$$

berechnen, dabei ist $A = \pi(R^2 - Ra)$ mit $R = 40\text{ mm}$ und $a = 1\text{ mm}$. Diese Angaben sind nach dem Praktikumsskript exakt, somit erhalten wir einen Fehler von

$$\sigma_{\varepsilon_0} = \sigma_m \frac{4F}{A}m.$$

Wir erhalten nun folgende Ergebnisse:

vorgegebene Masse	m [m/V]	ε_0 [As/Vm]
2 g	$(12,5 \pm 0,27) \cdot 10^{-7}$	$(12,51 \pm 1,71) \cdot 10^{-12}$
3 g	$(9,64 \pm 0,19) \cdot 10^{-7}$	$(11,16 \pm 1,45) \cdot 10^{-12}$
4 g	$(7,99 \pm 0,16) \cdot 10^{-7}$	$(10,22 \pm 1,31) \cdot 10^{-12}$
5 g	$(7,30 \pm 0,67) \cdot 10^{-7}$	$(10,69 \pm 6,22) \cdot 10^{-12}$

Der gewichtete Mittelwert dieser Werte ergibt

$$\varepsilon_0 = (11,09 \pm 0,84) \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}.$$

Der wahre Plattenabstand

Wie schon in Abbildung 1 zu erkennen ist, entsprach der an der Mikrometerschraube abgelesene Plattenabstand nicht dem wahren Plattenabstand [Offset].

Aus den gewichteten Ordinatenabschnitten Δ der Geraden aus Abbildung 1 kann nun der wahre Plattenabstand d_w mittels $d_w = d - \Delta$ berechnet werden. Wir erhielten

$$\Delta = 1,029 \pm 0,406 \text{ mm}.$$

10.4.2 Konstanter Plattenabstand

In diesem Teil wurde nun ein fester Plattenabstand vorgegeben und zu unterschiedlichen Kräften die Spannung gemessen. Die folgende Abbildung zeigt nun die Kraft, bei dem die obere Kondensatorplatte in Abhängigkeit der quadratischen Spannung abgehoben wurde.

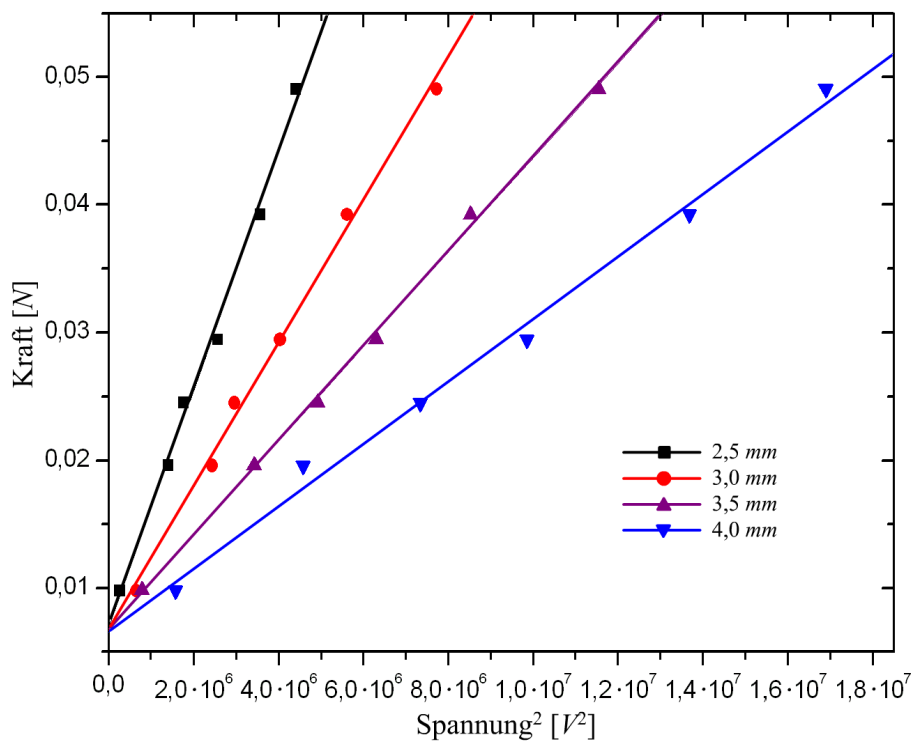


Abbildung 67: Kraft gegen Quadrat der Spannung

Die Steigung m der einzelnen Geraden erhält man durch lineare Regression und diese gibt nun F/U^2 in N/V^2 an. Somit können wir ε_0 durch

$$\varepsilon_0 = \frac{2Fd_w^2}{AU^2} = \frac{2d_w^2}{A}m$$

berechnen. Wir erhalten dabei einen Fehler von

$$\sigma_{\varepsilon_0} = \sqrt{\sigma_m^2 \left(\frac{2d_w^2}{A} \right)^2 + \sigma_{d_w}^2 \left(\frac{4d_w m}{A} \right)^2}.$$

Wir erhalten nun folgende Ergebnisse:

Abstand d	wahrer Abstand d_w	m [$10^{-9} N/V^2$]	ε_0 [As/Vm]
2,5 mm	$1,47 \pm 0,04 \text{ mm}$	$9,29 \pm 0,35$	$(8,20 \pm 1,66) \cdot 10^{-12}$
3,0 mm	$1,97 \pm 0,04 \text{ mm}$	$5,60 \pm 0,19$	$(8,88 \pm 1,44) \cdot 10^{-12}$
3,5 mm	$2,47 \pm 0,04 \text{ mm}$	$3,68 \pm 0,08$	$(9,18 \pm 1,09) \cdot 10^{-12}$
4,0 mm	$2,97 \pm 0,04 \text{ mm}$	$2,45 \pm 0,11$	$(8,83 \pm 1,41) \cdot 10^{-12}$

Der gewichtete Mittelwert dieser Werte ergibt

$$\varepsilon_0 = (8,87 \pm 0,68) \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}.$$

10.5 Diskussion

10.5.1 Literaturwert und Fehlerdiskussion

Der Literaturwert von ε_0 ist nach Meschede, D. (2001): "Gerthsen Physik", 21. Auflage, Springer Berlin,

$$\varepsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}.$$

Konstante Kraft

Unser Ergebnis aus Teil 1 weicht um 25% vom Literaturwert ab. Wir gehen davon aus, dass wir durch unseren [verbotenen] Versuch die Waage zu justieren die Anlage eher aus dem Gleichgewicht gebracht haben als den Aufbau zu verbessern. Es ist möglich, dass die obere Kondensatorplatte den umgebenen Ring berührte und somit Reibung die Messung beeinflusst hat. Evtl. haben wir dadurch eine größere Steigung und somit einen zu großen Wert für ε_0 erhalten.

Konstanter Plattenabstand

Unser zweites Ergebnis für ε_0 weicht nur um 0,2% vom Literaturwert ab. Wir haben also einen äußerst guten Wert erzielt, vielleicht war uns zu diesem Zeitpunkt der Aufbau besser vertraut und wir konnten somit bessere und genauere Werte messen. Der recht große Fehlerbalken entstand hierbei vor allem durch die Fehlerfortpflanzung des Fehlers vom wahren Plattenabstand.

Eigene Kommentare

[Nachdem die Waage zum Laufen gebracht wurde, war der Versuch echt in Ordnung und auch die Auswertung war nicht zu umfangreich.]_{Daniel}

[Eigentlich war dieser Versuch recht spaßig. Etwas gestört haben die ungenauen Angaben im Praktikumsskript, ob das Gerät nun justiert werden solle oder nicht.]_{Hauke}

11 Das Drehspul Galvanometer

Versuch durchgeführt am 21. September 2005, Protokoll erarbeitet von Daniel Scholz.

11.1 Einleitung

Das **Galvanometer** ist nach dem italienischem Arzt und Forscher Luigi Galvani [1737-1798] benannt und ist ein hochempfindliches, vielseitiges Messgerät. Mit ihm können nicht nur Stromstärken gemessen werden, es ist auch fähig über kleine Stromstöße zu integrieren und die Ladung zu messen.

11.2 Theorie

11.2.1 Aufbau und Bewegungsgleichung

Zwischen den Polen eines Permanentmagneten befindet sich ein feststehender, zylinderförmiger Eisenkern. Der Permanentmagnet ist so um den Eisenkern geformt, dass nur ein kleiner Luftspalt frei ist [siehe Abbildung 68]. In diesem Luftspalt befindet sich eine Spule, die sich um die Symmetrieachse des Eisenkerns drehen kann und durch Spiralfedern in ihrer Ruhelage gehalten wird.

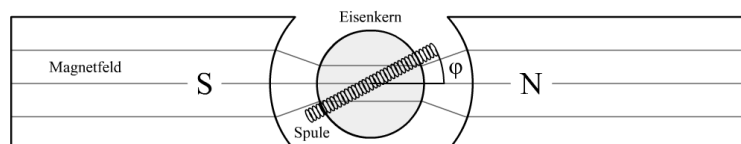


Abbildung 68: Aufbau des Drehspul Galvanometers

Sei nun die Höhe der Spule a , b ihre Breite, n ihre Windungszahl und die magnetische Feldstärke im Luftspalt B . Fließt ein Strom I durch die Spule, so wird an ihren Enden mit der Lorentzkraft

$$F_L = anIB$$

gezogen. Dies bewirkt ein Drehmoment M von

$$M = b \cdot F_L = abnIB = AIB,$$

wobei $A := ab \cdot n$ die Windungsfläche der Spule ist. Es treten verschiedene rücktreibende Drehmomente auf. Es sei im folgenden φ die Auslenkung der Spiralfeder aus ihrer Ruhelage.

Durch die **Spiralfedern** mit **Winkelrichtgröße** D wirkt ein zum Winkel proportionales Drehmoment M_S auf die Spule:

$$M_S = -D\varphi.$$

Durch die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ der Spule wird in ihr eine der Ursache entgegenwirkende Spannung U_I , erzeugt:

$$U_I = -\frac{d}{dt} \int_A B da = -\frac{d}{dt} B n a b \varphi = -BA\dot{\varphi}.$$

Ist nun R_i der innere Widerstand des Galvanometers und R_a der äußere [der Gesamtwiderstand beträgt also $R_i + R_a$], dann gilt für den durch U_I erzeugten Strom

$$I_I = \frac{U_I}{R_i + R_a} = -\frac{BA}{R_i + R_a} \dot{\varphi}.$$

Hierdurch wird wieder [wie oben] ein Drehmoment M_I erzeugt:

$$M_I = AI_I B = -\frac{(AB)^2}{R_i + R_a} \dot{\varphi}.$$

Durch den **Luftwiderstand** wirkt ein der Bewegung annähernd proportionales Reibungsdrehmoment M_R mit Reibungskoeffizienten ρ :

$$M_R = -\rho\dot{\varphi}.$$

Durch die **Trägheit** der Spule [ihr Trägheitsmoment sei Φ] wirkt ein zur negativen Winkelbeschleunigung proportionales Drehmoment M_T :

$$M_T = -\Phi\ddot{\varphi}.$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung der Spule

$$M + M_S + M_I + M_R + M_T = 0$$

und somit folgt

$$ABI = \Phi\ddot{\varphi} + \left(\rho + \frac{(AB)^2}{R_i + R_a} \right) \dot{\varphi} + D\varphi.$$

Nun wird noch die Galvanometerkonstante $G := AB$ eingeführt, und wir erhalten

$$\begin{aligned} GI &= \Phi\ddot{\varphi} + \left(\rho + \frac{G^2}{R_i + R_a} \right) \dot{\varphi} + D\varphi \\ \Rightarrow \quad \frac{G}{\Phi} I &= \ddot{\varphi} + \left(\frac{\rho}{\Phi} + \frac{G^2}{\Phi(R_i + R_a)} \right) \dot{\varphi} + \frac{D}{\Phi} \varphi. \end{aligned}$$

Man erkennt die Bewegungsgleichung einer gedämpften Schwingung um die Ruhelage $\varphi = GI/\Phi$ [siehe Protokoll 1: Der Pohlsche Resonator]. Wir führen die Dämpfungskonstante $\beta = \rho/2\Phi + G^2/2\Phi(R_i + R_a)$ und die Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{D/\Phi}$ ein:

$$\frac{G}{\Phi} I = \ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi.$$

Mit Hilfe des Ansatzes $\varphi(t) = ce^{\lambda t}$ suchen wir vorerst nach einer Lösung für

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0.$$

Es gilt

$$\varphi(t) = ce^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(t) = c\lambda e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}(t) = c\lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung erhalten wir

$$ce^{\lambda t}\lambda^2 + 2\beta ce^{\lambda t}\lambda + \omega_0^2 ce^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Die Allgemeine Lösung ist nun eine Linearkombination der Lösungen $\lambda_{1/2}$:

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\beta t} \left(c_1 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right).$$

Zu dieser Lösung müssen wir in unserem Fall einfach GI/Φ hinzuaddieren, denn dieser Term verschwindet in den Ableitungen und bleibt nur in dem letzten Summanden ($\omega_0^2\varphi$) stehen. Wir erhalten also

$$\varphi(t) = e^{-\beta t} \left(c_1 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right) + \frac{GI}{\Phi}. \quad (11.1)$$

Der Schwingfall bei schwacher Dämpfung

Gilt $\omega_0^2 > \beta^2$, so ist $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ imaginär. Die Kreisfrequenz wird durch

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

definiert.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{-\beta t} (c_1 e^{-i\omega t} + c_2 e^{i\omega t}) + GI/\Phi \\ &= e^{-\beta t} (c_1 (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) + c_2 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))) + GI/\Phi \\ &= e^{-\beta t} ((c_1 + c_2) \cos(\omega t) + i(c_2 - c_1) \sin(\omega t)) + GI/\Phi. \end{aligned}$$

In unserem Fall sind die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$. Aus der ersten ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= e^0 ((c_1 + c_2) \cos(0) + i(c_2 - c_1) \sin(0)) + GI/\Phi \\ \Rightarrow \quad 0 &= (c_1 + c_2) + GI/\Phi \\ \Rightarrow \quad (c_1 + c_2) &= -GI/\Phi. \end{aligned}$$

Aus der zweiten ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= -\beta e^0 ((c_1 + c_2) \cos(0) + i(c_2 - c_1) \sin(0)) + \\ &\quad e^0 \omega (-(c_1 + c_2) \sin(0) + i(c_2 - c_1) \cos(0)) \\ &= -\beta(c_1 + c_2) + i\omega(c_2 - c_1) = \beta GI + i\omega(c_2 - c_1). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$-\beta \frac{GI}{\Phi} = i\omega(c_2 - c_1) \quad \Rightarrow \quad (c_2 - c_1) = -\frac{GI}{\Phi} \cdot \frac{\beta}{i\omega}.$$

Dies ergibt zusammen

$$\varphi(t) = -\frac{GI}{\Phi} e^{-\beta t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right) + \frac{GI}{\Phi}. \quad (11.2)$$

Der Kriechfall bei starker Dämpfung

Gilt $\omega_0^2 < \beta^2$, so ist $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ reell. Dieses Mal definieren wir die Kreisfrequenz durch

$$\omega := \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{-\beta t} (c_1 e^{-i\omega t} + c_2 e^{i\omega t}) + GI/\Phi \\ &= e^{-\beta t} (c_1 (\cosh(\omega t) - i \sinh(\omega t)) + c_2 (\cosh(\omega t) + i \sinh(\omega t))) + GI/\Phi \\ &= e^{-\beta t} ((c_1 + c_2) \cosh(\omega t) + i(c_2 - c_1) \sinh(\omega t)) + GI/\Phi. \end{aligned}$$

Wieder lauten die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$. Aus der ersten ergibt sich [analog zu oben]

$$\varphi(t) = -\frac{GI}{\Phi} e^{-\beta t} \left(\cosh(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sinh(\omega t) \right) + \frac{GI}{\Phi}. \quad (11.3)$$

Asymptotischer Grenzfall

Gilt $\omega_0^2 = \beta^2$, dann gilt $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = 0$. Es handelt sich um einen Grenzfall und wir leiten ihn aus dem Schwingfall mit $\omega \rightarrow 0$ her.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{GI}{\Phi} e^{-\beta t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right) + \frac{GI}{\Phi} \\ &= -\frac{GI}{\Phi} e^{-\beta t} \left(\left(\lim_{\omega \rightarrow 0} \cos(\omega t) \right) + \left(\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right) \right) + \frac{GI}{\Phi} \\ &= -\frac{GI}{\Phi} e^{-\beta t} (1 + \beta t) + \frac{GI}{\Phi}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Die drei Fälle im Vergleich

Die folgende Abbildung 69 zeigt eine Graphik mit den drei Fällen bei einem $GI/\Phi = 1$ [die drei Fälle wurden erreicht, indem β variiert wurde].

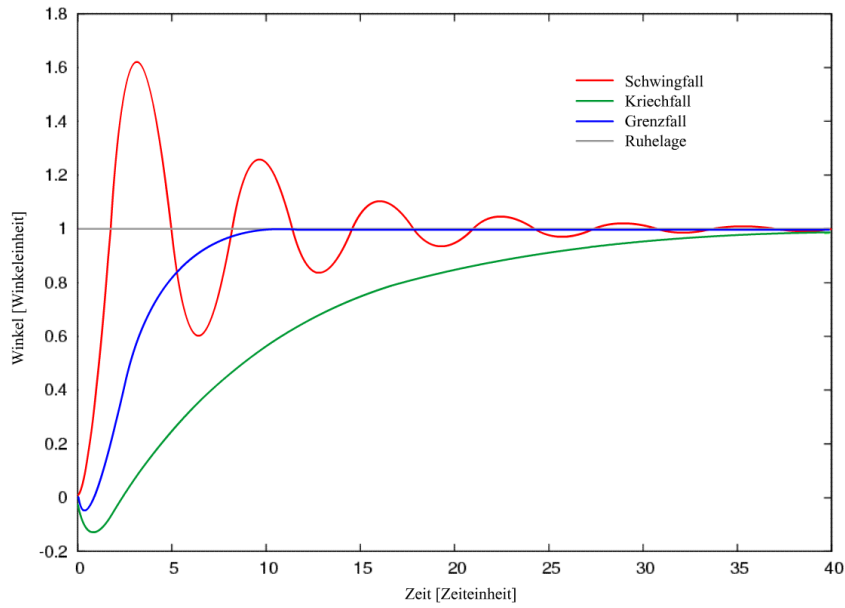


Abbildung 69: Die drei Fälle im Vergleich

Es fällt auf, dass GI/Φ sich beim aperiodischen Grenzfall am schnellsten ablesen lässt. Aus diesem Grund will man den asymptotischen Grenzfall im Galvanometer realisieren, was durch variieren von R_a erreicht wird. Der aperiodische Grenzfall ist äquivalent zu $\beta = \omega_0$, demnach folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho}{2\Phi} + \frac{G^2}{2\Phi(R_i + R_a)} &= \sqrt{\frac{D}{\Phi}} \\
 \Leftrightarrow \frac{G^2}{2\Phi(R_i + R_a)} &= \sqrt{\frac{D}{\Phi}} - \frac{\rho}{2\Phi} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{R_i + R_a} &= \frac{2\Phi}{G^2} \left(\sqrt{\frac{D}{\Phi}} - \frac{\rho}{2\Phi} \right) \\
 \Leftrightarrow R_i + R_a &= \frac{G^2}{2\sqrt{D\Phi} - \rho} \\
 \Leftrightarrow R_a &= \frac{G^2}{2\sqrt{D\Phi} - \rho} - R_i.
 \end{aligned}$$

11.2.2 Ballistisches Galvanometer

Schickt man nur einen Stromstoß, dessen Dauer sehr klein im Vergleich zur Schwingungsdauer des Galvanometers ist [maximal 1%], dann verändert der Stromstoß einzig die Anfangsbedingung von $\dot{\varphi}$, denn die Zeit ist so kurz, dass φ nicht signifikant verändert wird. Es gilt für die Dauer des Stromstoßes

$$\ddot{\varphi} = \frac{G}{\Phi} I \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{G}{\Phi} Q,$$

wobei Q die geflossene Ladung ist. Da I nach dem kurzen Moment wieder abgeklungen ist, gilt in diesem Fall für die Ruhelage $GI = 0$. Die Winkelgeschwin-

digkeit ω wird wie beim Schwingfall definiert. Mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = GQ/\Phi$ berechnen sich die Variablen c_1 und c_2 zu

$$c_1 + c_2 = 0 \quad \text{und} \quad c_1 - c_2 = \frac{G}{i\omega\Phi}Q.$$

In die Bewegungsgleichung eingesetzt ergibt dies

$$\varphi(t) = e^{-\beta t} \frac{G}{\omega\Phi} Q \sin(\omega t). \quad (11.5)$$

Das erste Maximum liegt bei $t_{max} = \pi/2\omega$. Hier gilt

$$\varphi(t_{max}) = e^{-\beta \frac{\pi}{2\omega}} \frac{G}{\omega\Phi} Q \quad \Rightarrow \quad Q = \varphi(t_{max}) e^{\beta \frac{\pi}{2\omega}} \frac{\omega\Phi}{G}.$$

Dies bietet eine Möglichkeit die geflossene Ladung Q zu messen.

11.2.3 Empfindlichkeiten

Unter der Empfindlichkeit eines Messgerätes versteht man im Allgemeinen den Quotienten aus dem Ausschlag und der Messgröße. Beim Galvanometer ist zwischen der Stromempfindlichkeit, der Spannungsempfindlichkeit und der ballistischen Empfindlichkeit zu unterscheiden.

Stromempfindlichkeit

Der Ausschlag ist φ in der neuen Ruhelage, also wenn $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$ gilt:

$$\frac{G}{\Phi} I = \frac{D}{\Phi} \varphi_{Ruhe} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_{Ruhe} = \frac{G}{D} I.$$

Die Messgröße ist I . Damit ergibt sich für die Stromempfindlichkeit

$$C_I = \frac{\varphi_{Ruhe}}{I} = \frac{G}{D}. \quad (11.6)$$

Spannungsempfindlichkeit

Legt man am Galvanometer eine zu messende Spannung U an, dann gilt für die Stromstärke

$$I = \frac{U}{R_i + R_a}.$$

Damit ergibt sich für die Spannungsempfindlichkeit

$$C_U = \frac{\varphi_{Ruhe}}{U} = \frac{G}{D} \frac{U}{R_i + R_a} \frac{1}{U} = \frac{G}{D(R_i + R_a)}. \quad (11.7)$$

Ballistische Empfindlichkeit

Jetzt ist der Ausschlag

$$\varphi(t_{max}) = e^{-\beta \frac{\pi}{2\omega}} \frac{G}{\omega\Phi} Q$$

und die Messgröße Q . Damit gilt für die ballistische Empfindlichkeit

$$C_B = \frac{\varphi(t_{max})}{Q} = e^{-\beta \frac{\pi}{2\omega}} \cdot \frac{G}{\omega\Phi}. \quad (11.8)$$

11.3 Versuchsdurchführung

11.3.1 Teil 1: Schwingfall, Kriechfall und aperiodischer Grenzfall

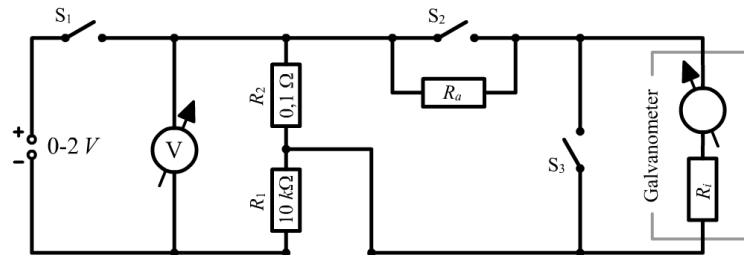


Abbildung 70: Versuchsaufbau für Teil 1

Die Abbildung zeigt den Versuchsaufbau für Versuchsteil 1. Mithilfe der Widerstände R_1 und R_2 wird die Spannung von 2 V aufgeteilt, so dass am Widerstand R_2 eine Spannung von

$$2\text{ V} \cdot \frac{R_2}{R_1} = 2 \cdot 10^{-5}\text{ V}$$

abgegriffen werden kann. Der Widerstand R_a kann variiert werden. Der Ausschlag a des Galvanometers wird nun für verschiedene R_a zwischen 0 und $200\ \Omega$ in $20\ \Omega$ Schritten in beide Richtungen gemessen [dies ergibt 22 Messungen].

Durch Schließen von S_2 wird R_a kurzgeschlossen und ein Ausschlag am Galvanometer erreicht. Ist der Ausschlag groß genug, werden S_1 und S_2 wieder geöffnet. Dies wird für verschiedene R_a getan, wodurch folgende Fälle erreicht werden:

- (1) Der Schwingfall durch große R_a . Zu notieren sind Umkehrpunkte und Schwingungsdauer. Es ist mit großem R_a zu beginnen.
- (2) Der Kriechfall durch kleine R_a zwischen 0 und $50\ \Omega$. Zu notieren sind verschiedene Messpunkte.
- (3) Der Wert von R_a für den aperiodische Grenzfall ist durch systematisches Ausprobieren zu ermitteln.

Außerdem ist die Schwingungsdauer bei keiner Dämpfung [$R_a = 0\ \Omega$] zu ermitteln.

11.3.2 Teil 2: Das ballistische Galvanometer

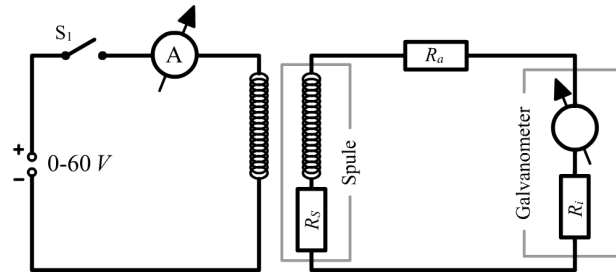


Abbildung 71: Versuchsaufbau für Teil 2

Die Abbildung zeigt den Versuchsaufbau für das ballistische Galvanometer. Durch das Öffnen und Schließen des Primärstromkreises werden im Galvanometer Stromströbe erzeugt. Der Ausschlag a des Galvanometers wird in Abhängigkeit von R_a zwischen $1\text{ k}\Omega$ und $10\text{ k}\Omega$ gemessen. Auch die Stromstärke wird notiert.

11.4 Auswertung

11.4.1 Stromempfindlichkeit C_I und innerer Widerstand R_i

Der Aufbau des Galvanometers mit der Skala verdeutlicht die folgende Abbildung:

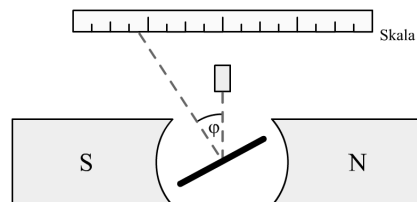


Abbildung 72: Galvanometer mit Skala

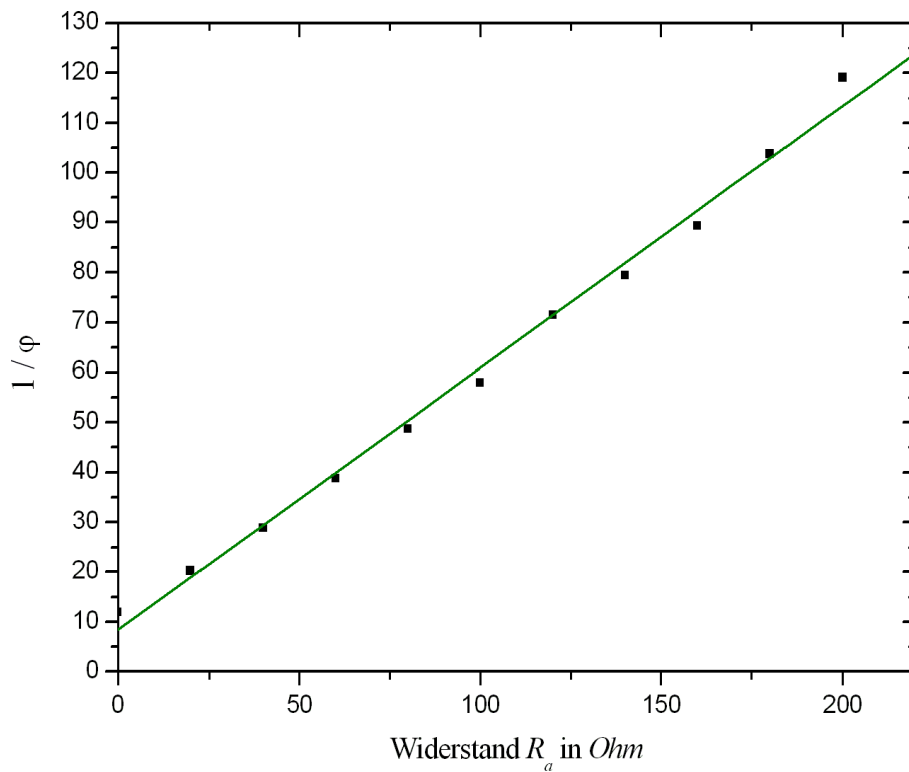
Der Abstand r zwischen Galvanometer und Skala betrug $r = 80.4\text{ cm}$, somit lassen sich unsere gemessenen Auslenkungen a in cm auf der Skala durch

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{a}{r}\right)$$

in die Winkelgröße φ umrechnen. Für diese Berechnung haben wir die Ausschläge nach links und nach rechts bei gleichem Widerstand R_a gemittelt. Weiter erhalten wir aus den Gleichungen (11.6) und (11.7) die Gleichung

$$\varphi = C_I \cdot \frac{U}{R_i + R_a}. \quad (11.9)$$

In der folgenden Abbildung 73 wurde nun $1/\varphi$ gegen den Widerstand R_a aufgetragen:

Abbildung 73: Kehrwert des Winkels φ gegen den Widerstand R_a .

Wir erhalten durch lineare Regression eine Gerade mit einer Steigung von $m = (0.529 \pm 0.014) \Omega^{-1}$ und mit dem Achsenabschnitt $b = 8.406 \pm 1.648$. Nach Gleichung (11.9) folgt nun

$$m = \frac{1}{C_I \cdot U} \quad \Leftrightarrow \quad C_I = \frac{1}{m \cdot U}$$

sowie

$$b = R_i \cdot m \quad \Leftrightarrow \quad R_i = b / m.$$

Wir erwarten dabei einen Fehler von

$$\sigma_{C_I} = \frac{\sigma_m}{m^2 \cdot U}$$

sowie von

$$\sigma_{R_i} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{m}\right)^2 + \left(\frac{b \cdot \sigma_m}{m^2}\right)^2}.$$

Bei unserer Spannung U von $U = 2 \cdot 10^{-5} \text{ V}$ erhalten wir somit die Ergebnisse

$$C_I = 95259 \pm 2528 \frac{1}{\text{A}} \quad \text{und} \quad R_i = 16.02 \pm 3.17 \Omega. \quad (11.10)$$

11.4.2 Schwingfälle

In Abbildung 74 wurden die Umkehrpunkte für die verschiedenen Schwingfälle mit den Außenwiderständen R_a von 500Ω bis 3000Ω logarithmisch gegen die

Zeit t aufgetragen. Die Umkehrpunkte liegen alle auf der Funktion $e^{-\beta t}$, welche die gedämpfte Schwingung einhüllt.

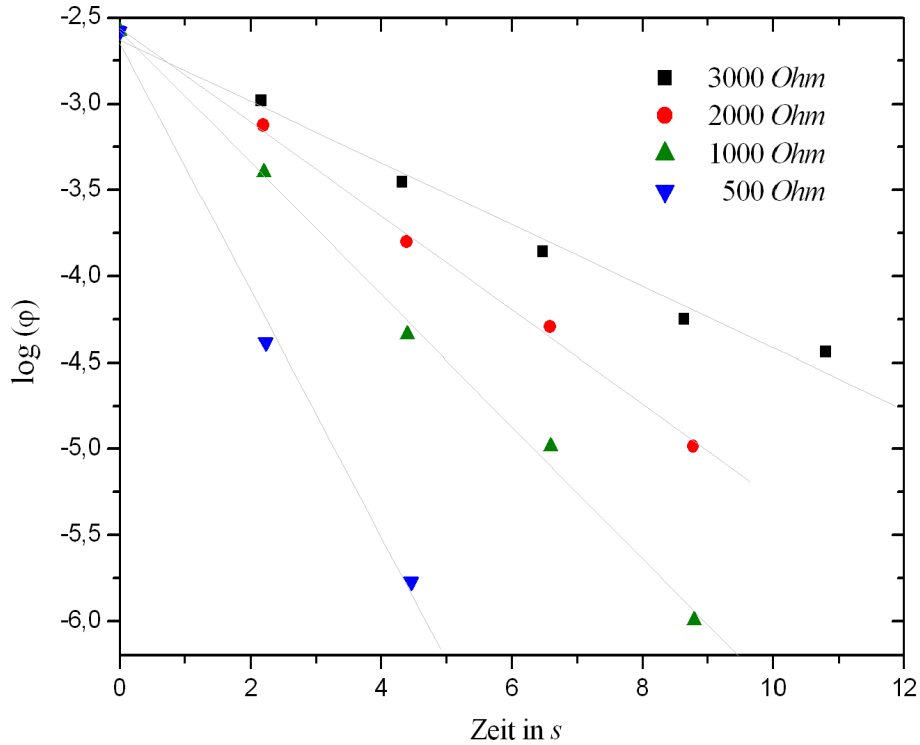


Abbildung 74: Logarithmus der Winkel der Umkehrpunkte gegen die Zeit.

Es gilt nun $\log(e^{-\beta t}) = -\beta t$, somit folgt für die Steigung m gerade

$$m = -\beta.$$

Multipliziert man somit die Steigung m mit der gemessenen Schwingungsdauer T und ändert das Vorzeichen, so erhält man das logarithmische Dekrement $\Lambda = \beta T$. Die Ergebnisse für die Schwingungen mit unterschiedlichen Außenwiderständen R_a sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

R_a	T in s	$m = -\beta$ in s^{-1}	log. Dekrement Λ
3000 Ω	4.32	-0.179 ± 0.010	0.772 ± 0.043
2000 Ω	4.39	-0.273 ± 0.008	1.196 ± 0.036
1000 Ω	4.40	-0.383 ± 0.013	1.685 ± 0.056
500 Ω	4.46	-0.71 ± 0.055	3.195 ± 0.244

Kreisfrequenz ω_0

Für die ungedämpfte Schwingung haben wir eine Schwingungsdauer von $T_0 = 4.44$ s gemessen. Somit ergibt sich für die Kreisfrequenz ω_0 der Wert

$$\omega_0 = 2\pi / T_0 = 1.415 \text{ s}^{-1}.$$

Galvanometerkonstante G , Trägheitsmoment Φ und Luftreibungskoeffizient ρ

Zunächst wird β als Funktion von $1/(R_a + R_i)$ aufgetragen. Dazu nutzen wir die Werte aus obiger Tabelle und aus Gleichung (11.10).

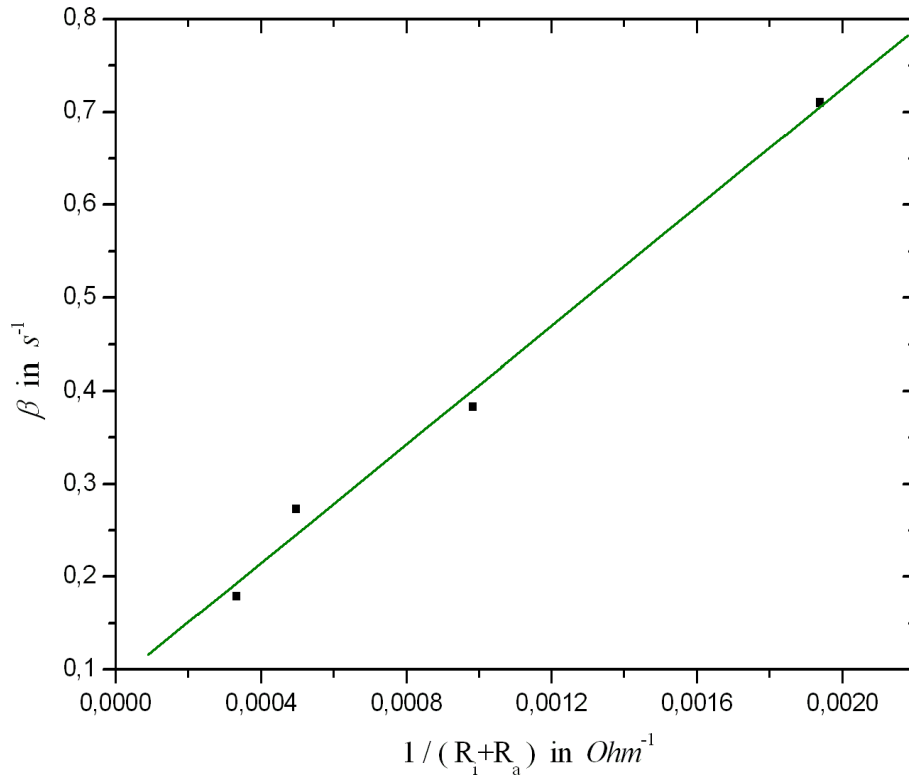


Abbildung 75: β gegen den Kehrwert der Summe von R_a und R_i .

Durch lineare Regression erhalten wir eine Steigung m und einen Achsenabschnitt b von

$$m = (319 \pm 20) \frac{\Omega}{s} \quad \text{sowie} \quad b = (0.087 \pm 0.023) s^{-1}.$$

Nach der umgeschriebenen Definition der Dämpfung erhalten wir nun

$$\beta = \frac{\rho}{2\Phi} + \frac{G^2}{2\Phi(R_a + R_i)} = \frac{G^2}{2\Phi} \cdot \frac{2}{(R_a + R_i)} + \frac{\rho}{2\Phi} = m \cdot \frac{1}{R_a + R_i} + b,$$

dabei ist G die Galvanometerkonstante, Φ das Trägheitsmoment und ρ der Luftreibungskoeffizient. Aus der Stromempfindlichkeit nach (11.6) erhalten wir auch

$$C_I = \frac{G}{D} = \frac{G}{\Phi \omega_0^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{G}{\Phi} = C_I \cdot \omega_0^2.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich zusammen

$$G = \frac{2m}{C_I \cdot \omega_0^2}.$$

Durch G sind wir nun auch in der Lage das Trägheitsmoment Φ zu berechnen, denn es gilt

$$\Phi = \frac{G^2}{2m}.$$

Aus dem Achsenabschnitt erhalten wir somit auch noch den Luftreibungskoeffizienten ρ :

$$\rho = 2b \cdot \Phi.$$

Wir erwarten dabei jeweils die folgenden Fehler:

$$\begin{aligned}\sigma_G &= \sqrt{\left(\frac{2\sigma_m}{C_I \cdot \omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2m \cdot \sigma_{C_I}}{C_I^2 \cdot \omega_0^2}\right)^2}, \\ \sigma_\Phi &= \sqrt{\left(\frac{G \cdot \sigma_G}{m}\right)^2 + \left(\frac{G^2 \cdot \sigma_m}{2m^2}\right)^2}, \\ \sigma_\rho &= \sqrt{(2b \cdot \sigma_\Phi)^2 + (2\Phi \cdot \sigma_b)^2}.\end{aligned}$$

Unsere Ergebnisse sind nun

$$\begin{aligned}G &= (33.45 \pm 2.28) \cdot 10^{-4} \text{ V} \cdot \text{s}, \\ \Phi &= (17.54 \pm 2.63) \cdot 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ \rho &= (3.05 \pm 0.93) \cdot 10^{-9} \text{ J} \cdot \text{s}.\end{aligned}$$

11.4.3 Kriechfälle

Vereinfachung der Bewegungsgleichung

Für extreme Kriechfälle und für $t > 1$ kann Gleichung (11.3) angenähert werden. Es gilt $\omega \approx \beta$ also $\beta/\omega \approx 1$ und somit folgt

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\beta t} \cdot \left(\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} + \frac{\beta}{\omega} \cdot \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \right) \approx \varphi_0 e^{-(\beta-\omega)t}.$$

Innerer Widerstand R_i

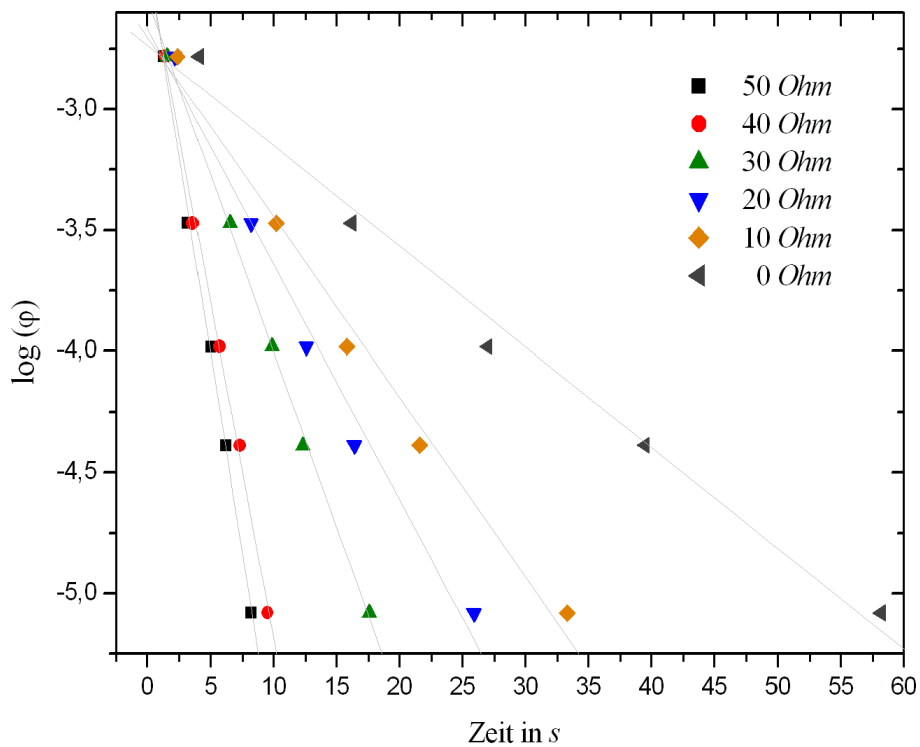
Durch eine logarithmische Auftragung der Verläufe der Kriechfälle gegen die Zeit kann durch diese Näherung β bestimmt werden. Es gilt

$$\log(\varphi_0 e^{-(\beta-\omega)t}) = \log(\varphi_0) + (\omega - \beta)t,$$

somit erhält man durch lineare Regression der Auftragungen eine Steigung von $m = \omega - \beta$. Benutzt man dies und die Beziehung zwischen ω und ω_0 , so erhält man

$$\beta = -\frac{\omega_0^2 + m^2}{2m}.$$

Dieses β wird nun für jeden Außenwiderstand R_a berechnet. Die folgende Abbildung zeigt zunächst die Auftragungen:

Abbildung 76: $\log(\varphi)$ gegen die Zeit für alle Kriechfälle.

Daraus ergeben sich die Steigungen m und damit die folgenden Werte für β :

R_a	Steigung m in s^{-1}	Wert für β in s^{-1}
50 Ω	-0.328	3.214
40 Ω	-0.277	3.749
30 Ω	-0.145	6.961
20 Ω	-0.097	10.326
10 Ω	-0.074	13.504
0 Ω	-0.042	24.127

Die Fehler für m und β betrachten wir nicht weiter, da wir diese in der folgenden linearen Regression sowieso nicht weiter übernehmen könnten.

Durch die Näherung $\beta \approx \beta - \beta_{\text{Luft}}$ erhalten wird mittels

$$\beta - \beta_{\text{Luft}} = \frac{G^2}{2\Phi(R_a + R_i)} \approx \beta$$

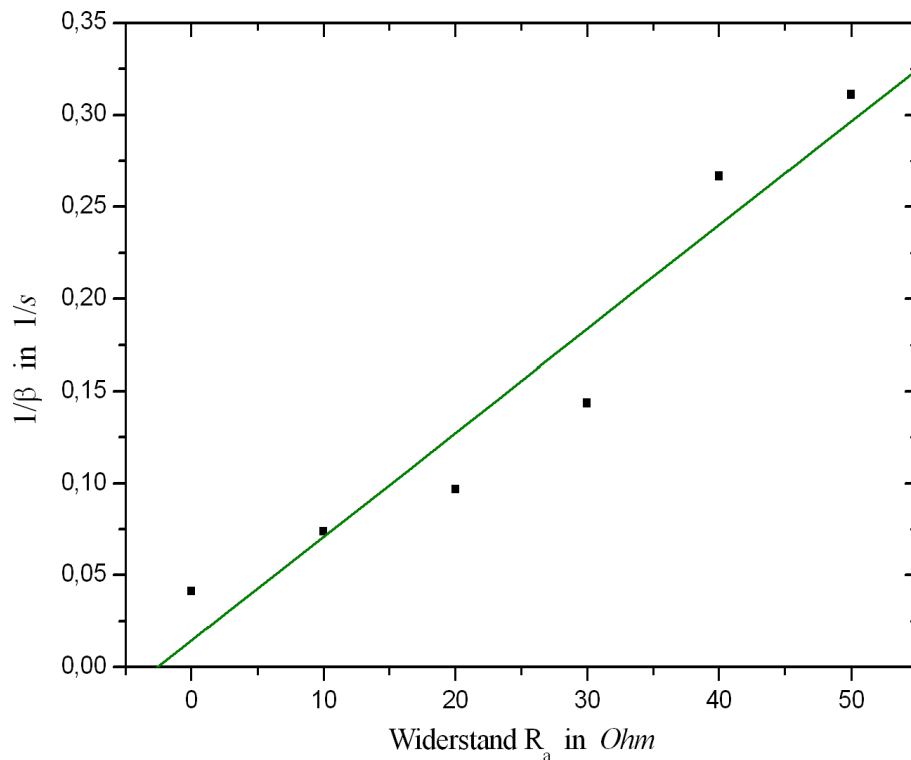
die Gleichung

$$\frac{1}{\beta} = \frac{2\Phi}{G^2} \cdot R_a + \frac{2\Phi}{G^2} \cdot R_i = m' \cdot R_a + b'.$$

Tragen wir nun also $1/\beta$ gegen die jeweiligen Außenwiderstände R_a auf, so folgt

$$R_i = \frac{b'}{m'},$$

dabei ist m' die Steigung und b' der Achsenabschnitt, den man wiederum durch lineare Regression erhält. Die folgende Abbildung zeigt diese Auftragung:

Abbildung 77: $1/\beta$ gegen die Außenwiderstände.

Wir erhalten $m' = 0.0056 \pm 0.00077 \text{ s}/\Omega$ und $b' = 0.0147 \pm 0.02342 \text{ s}$. Für R_i erwarten wir einen Fehler von

$$\sigma_{R_i} = \sqrt{\left(\frac{b' \cdot \sigma_{m'}}{m'^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{b'}}{m'}\right)^2}.$$

Unser Ergebnis ist nun

$$R_i = 2.60 \pm 4.17 \Omega.$$

11.4.4 Aperiodischer Grenzfall

Durch systematisches Ausprobieren haben wir für

$$R_a = 81 \Omega$$

einen aperiodischen Grenzfall erhalten. Hier näherte sich die Messmarke dem Nullpunkt am schnellsten an.

11.4.5 Ballistisches Galvanometer

Ballistische Empfindlichkeit C_B aus den Schwingfällen

Die ballistische Empfindlichkeit C_B erhält man zunächst auch durch die zuvor berechneten Werte. Es gilt

$$C_B = \omega_0 \cdot C_I = (134791 \pm 3574) \frac{1}{As}.$$

Geflossene Ladung Q

Für die geflossene Ladung Q gilt

$$Q = \int I dt = \frac{1}{R_{ges}} \int U dt = \frac{1}{R_a + R_i + R_S} \int U dt,$$

dabei ist $R_S = 23 \Omega$ der Widerstand der Sekundärspule und U ist die induzierte Spannung, die sich aus

$$U = -n_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

ergibt. Dabei ist $n_2 = 400$ die Windungszahl der Sekundärspule und Φ ist hier der induzierte Fluss. Für diesen gilt

$$\Phi = A \cdot B = 2\pi r^2 \cdot B = 2\pi r^2 \cdot n_1 \frac{\mu_0 I}{2\pi l},$$

dabei ist $A = \pi r^2$ die Fläche der Spule mit $r = 0.0275 m$, B das erzeugte Magnetfeld, $n_1 = 2800$ die Windungszahl und $l = 1 m$ die Länge der Primärspule und $I = 0.15 A$ ist die Stromstärke in der Primärspule.

Es ergibt sich somit

$$Q = \frac{n_2}{R_a + R_i + R_S} \cdot \Phi = \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot r^2 \cdot \mu_0 \cdot I}{l \cdot (R_a + R_i + R_S)} = \frac{160 \cdot 10^{-6}}{R_a + 39 \Omega} C \cdot \Omega.$$

Dadurch kann nun für jeden Außenwiderstand R_a die geflossene Ladung bestimmt werden.

Es wurden nun die Werte φ/C für jeden äußeren Widerstand R_a berechnet und anschließend gegen R_a aufgetragen. Dies wurde in der folgenden Abbildung verdeutlicht:

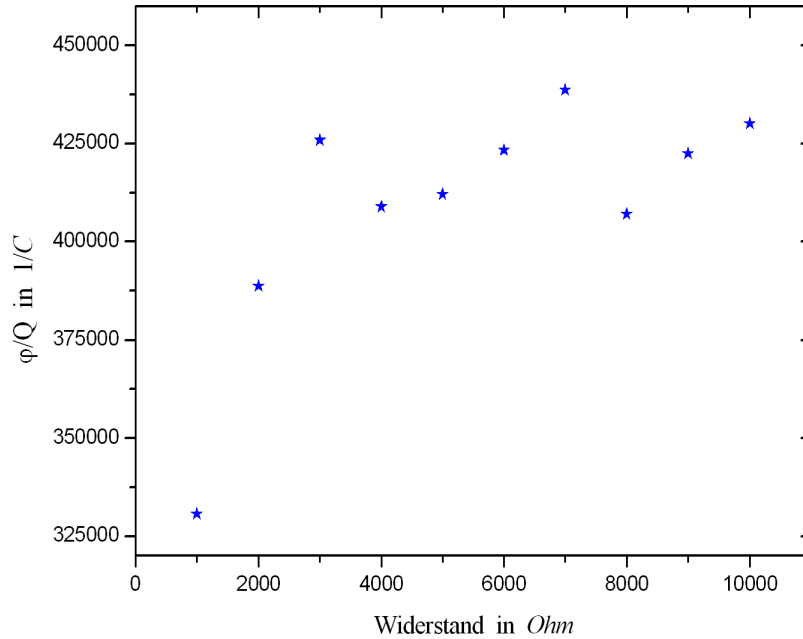


Abbildung 78: Winkel durch geflossene Ladung gegen Außenwiderstände.

Für $R_a \rightarrow \infty$ erhalten wird nun aus dem Versuchsteil mit dem ballistischen Galvanometer die Empfindlichkeit C_B . Wir schätzen diese anhand von Abbildung 78 als

$$C_B = (425000 \pm 25000) \frac{1}{As}.$$

Dies ist eine sehr grobe Schätzung, daher konnten wir zuvor auch auf die Fehlerrechnung verzichten.

Ballistische Empfindlichkeit C_B für große Dämpfungen

Es gilt $C_B = \varphi_{max}/Q$. Für große Dämpfungen wird R_a klein und somit wiederum [nach dem vorherigen Auswertungsteil] Q groß. Daher wird C_B für große Dämpfungen kleiner, dies zeigen auch die Werte für $R_a = 1000 \Omega$ und $R_a = 2000 \Omega$ aus Abbildung 78.

11.5 Diskussion

Bis zum Auswertungsteil 11.4.3 verlief der Versuch wie gewünscht. Wir hatten brauchbare Messwerte zu verarbeiten und auch unsere Ergebnisse scheinen in Ordnung zu sein. Für die folgenden Versuchsteile wurden die Messwerte jedoch immer ungenauer. Bei den Kriechfällen waren zum Teil die Zeiten an den bestimmten Positionen [auch mit drei Stoppuhren] nur schwer exakt zu bestimmen. Beim ballistischen Galvanometer wurde es danach noch sehr viel schwieriger während einer Schwingung den maximalen Ausschlag ablesen zu können. Somit blieben einiger Werte grobe Richtwerte, aber keine exakten Messdaten.

Vergleich der Werte für R_i

Der berechnete inneren Widerstand R_i aus dem ruhenden System scheint nicht schlecht zu sein, er stimmt grob mit mehreren Vorgängerprotokollen überein. Der aus den Kriechfällen berechnete Wert weicht nun leider stark ab. Unsere Messwerte waren hier vermutlich schon zu ungenau, um ein ähnlich gutes Ergebnis zu erhalten. Wir hatten in der Auswertung mehrere lineare Regressionen durchzuführen und wir haben mit vielen Näherungen gerechnet. Somit konnten wir gar kein guten Wert erwarten und können mit unserem ca. sechs mal kleineren Wert auch nicht unzufrieden sein.

Vergleich der Werte für C_B

Wir nehmen an, dass die Größenordnung für den aus den Schwingungen berechnete Wert für C_B mit dem wahren Wert übereinstimmt. Über das ballistische Galvanometer errechneten wir einen Wert, der ungefähr dreimal größer ist. Hier waren unsere Messdaten vermutlich nicht genau genug, da der Ausschlag des Galvanometers mit zunehmenden Außenwiderstand R_a immer kleiner und schlechter abzulesen war. Außerdem mussten wir wieder mehrere lineare Regressionen aus Werten durchführen, die ohnehin schon zum Teil stark fehlerbehaftet waren. Daher schätzen wir unser Ergebnis zwar als nicht besonders gut, aber auch nicht als sehr schlecht ein.

Eigene Kommentare

[Die Durchführung war in Ordnung, die Auswertung war jedoch total fürn Arsch. Durch so viel Rumrechnerei kann man ja wohl kaum auch noch gute Ergebnisse erwarten. Nur mit dem dummen Praktikumsskript und ohne guten Vorgängerprotokollen wäre die Auswertung für uns wohl mal wieder nicht möglich gewesen. Wieder mal tolle Werte berechnet und kein Plan, was diese bedeuten oder aussagen.]_{Daniel}

[Der Versuch ging entgegen unserer Erwartung recht fix über die Bühne. Die Auswertung war leider nicht so erfreulich. Vor allem fehlen Vergleichswerte im Praktikumsskript. Und ich hab seit 4 Wochen Schnupfen.]_{Hauke}

12 Messung großer Widerstände

Versuch durchgeführt am 22. September 2005, Protokoll erarbeitet von Daniel Scholz.

12.1 Einleitung

In diesem Versuch wollen wir uns mit Stromkreisen auseinandersetzen, vor allem mit Schwingkreisen und Impedanzmessung.

Ziel ist es jeweils einen großen unbekannten Widerstand R_x zu messen.

12.2 Theorie

12.2.1 Widerstandsmessung

Herkömmliche Messung

Um die Größe eines Widerstands zu messen, kann man das Ohmsche Gesetz $R = U/I$ benutzen. So besteht zum Beispiel die Widerstandsbestimmung eines Multimeters häufig darin, Spannung und Strom über dem Widerstand zu bestimmen. Bei großen Widerständen stößt man da auf mehrere Probleme. Zum Einen benötigt man sehr hohe Spannungen um einen messbaren Strom zu erzeugen [schwer handhabbar: Blitzentladungen]. Zum Anderen ist dann der Innenwiderstand des Voltmeters in der gleichen Größenordnung wie der des zu messenden Widerstands. Dadurch fließt ein großer Teil des Stroms auch über ihn ab, was die Widerstandsmessung stark verfälscht. Durch einen Vorwiderstand kann man den Messbereich von Ampère- und Voltmeter zwar erweitern, aber auch nur im begrenzten Rahmen. Eine bessere Möglichkeit bietet die **Wheatstonsche Brücke**, da man hier nicht mit den Innenwiderständen von Messgeräten zu kämpfen hat. Sie kann übrigens auch allgemein zur Bestimmung von Kapazitäten und Induktivitäten eingesetzt werden, was natürlich wesentlich genauer ist, als die Berechnung aus den geometrischen Daten:

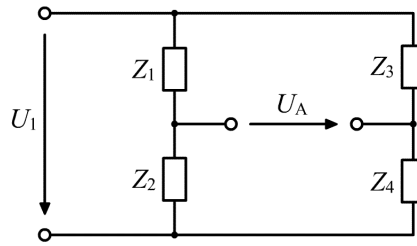


Abbildung 79: Wheatstonsche Brückenschaltung.

Sei Z_1 die gesuchte Impedanz, Z_4 regelbar. Dann gilt im abgeglichen Zustand

$$Z_1 = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_4}.$$

12.2.2 Messung großer Widerstände mit Kondensatoren

Im Versuch betrachten wir noch eine andere Möglichkeit einen unbekannten Widerstand zu messen. Dabei werden Ladungen beobachtet, die von einem geladenen Kondensator über ein R - C -Parallelkreis abfließen. Betrachten wir also den Entladevorgang eines Kondensators mit Kapazität C und Anfangsladung Q_0 über einen unbekannten Widerstand R . Es muss nach der Maschenregel gelten:

$$\begin{aligned} U_C &= -U_R \\ I_C &= \dot{Q}_C = C \cdot \dot{U}_C, \quad \text{also} \\ \dot{Q} &= -C \cdot \dot{U}_R = -C \cdot R \cdot \ddot{Q} \quad \text{und somit} \\ Q(t) &= Q_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{R \cdot C}\right). \end{aligned} \quad (12.1)$$

Misst man nun die Ladung Q zu verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 , so kann man R bestimmen, denn aus

$$\frac{Q(t_1)}{Q(t_2)} = \exp\left(\frac{t_2 - t_1}{R \cdot C}\right)$$

folgt gerade

$$R = \frac{t_2 - t_1}{C \cdot \log\left(\frac{Q(t_1)}{Q(t_2)}\right)}. \quad (12.2)$$

Diese Messung ist aber nur für große Widerstände genau. Bei kleinen ist der Kondensator zu schnell entladen, um exakte Ladungsunterschiede zwischen verschiedenen Zeiten messen zu können.

In unserem Experiment haben wir es aber mit großen Widerständen zu tun. Sowohl der zu bestimmene Widerstand, als auch der Isolationswiderstand des Kondensators, der im Idealfall unendlich ist, können mit der oben genannten Methode bestimmt werden. Dabei muss der Isolationswiderstand separat bestimmt werden, da sonst nur der Gesamtwiderstand des Systems messbar ist [und nicht der zu messende Einzelwiderstand].

Nun müssen wir uns damit beschäftigen, wie wir die Ladung überhaupt messen können.

Analoger Stromintegrator

Anstelle einer Ladungsmessung mit einem ballistischem Galvanometer wie im Versuch 11 benutzen wir einen analogen Stromintegrator [siehe Abbildung 80]. Er ist in der Lage, eine Potenzialdifferenz tausendfach zu verstärken und am Ausgang bereitzustellen.

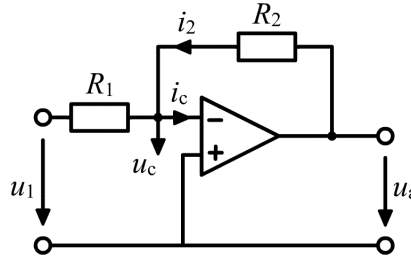


Abbildung 80: Stromintegrator

In der Abbildung bezeichnet R_1 einen ohmschen Widerstand und R_2 eine Kapazität, u_1 Eingangs- und u_a Ausgangsspannung. Wir wollen nun die Ausgangsspannung u_a berechnen. Aufgrund der Kirchhoffschen Regel gilt

$$I_{R_1} + I_{R_2} = 0,$$

I_{R_2} ist der Strom über den Kondensator, somit gilt

$$I_{R_2} = \dot{Q}_{R_2} = R_2 \cdot \dot{u}_a.$$

Mit $I_{R_1} = u_1/R_1$ folgt

$$u_a = -\frac{1}{R_1 \cdot R_2} \int_{t_0}^{t_1} u_1 dt \sim \int I_R.$$

Offensichtlich ist die Ausgangsspannung proportional zum Integral über dem Eingangsstrom, das heißt zur geflossenen Ladung. Zur Eichung des Stromintegrators bestimmt man folglich diese Proportionalitätskonstante G .

Nun wissen wir also, wie unsere Versuchsanordnung funktioniert. Wir haben es mit einem R - C -Parallelkreis zu tun, bei dem der Ladungsabfall mit dem analogen Stromintegrator gemessen wird. Da nach jeder Ladungsmessung der Kondensator entladen ist, muss er für weitere Messungen zu anderen Zeitpunkten wieder neu aufgeladen werden.

Um möglichst wenige Fehler zu machen, muss man beachten, dass man Induktion zwischen den Leitern verhindert. Die Eichmessung sollte deshalb separat aufgebaut werden und mit kurzen, von einander entfernten Kabeln durchgeführt werden. Des Weiteren beeinflusst die Luftfeuchtigkeit den Isolationswiderstand, da Ladungen über die feuchte Luft abfließen können. Sie erhöht ebenfalls die zu bestimmende Dielektrizitätskonstante systematisch. Diese wird bestimmt, indem wir die die Kapazitätsberechnung nach Kirchhoff benutzen, welche die Randeffekte berücksichtigt. Sie wird mit der im Versuch berechneten Kapazität $C = Q/U$ gleichgesetzt:

$$C_n = (n-1)\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot \left(\frac{\pi r^2}{d} + r \cdot \log \left(\frac{16\pi r}{d} - 1 \right) \right), \quad (12.3)$$

dabei ist n die Plattenanzahl, r der Plattenradius, d der Plattenabstand und wir nehmen als Näherung $\varepsilon_r = 1$ an [nicht ganz korrekt für feuchte Luft]. In unserem Falle gilt $n = 65$, $r = 10 \text{ cm}$ und $d = 0.5 \text{ cm}$.

12.2.3 R - C und R - L - C -Parallelkreis

Bei unseren Versuchen arbeiten wir mit Parallelschwingkreisen, welche von einem Impulsgenerator gespeist werden:

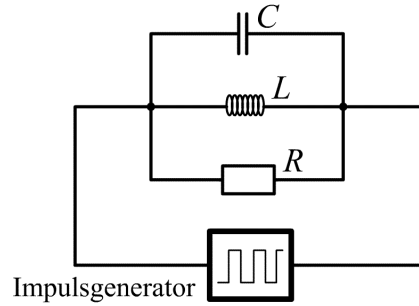


Abbildung 81: Parallelschwingkreis.

Den R - C -Kreis haben wir in Kapitel 12.2.2 schon besprochen. Wird eine konstante Spannung U_0 angelegt, so lädt sich der Kondensator auf. Entkoppelt man ihn wieder, so verhält sich die Entladung wie oben berechnet:

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{R \cdot C}\right).$$

Also entlädt sich der Kondensator wie folgt:

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C} = U_0 \exp\left(-\frac{t}{R \cdot C}\right).$$

Der R - L - C -Kreis weist eine Analogie zum mechanischen Schwinger auf, es ergibt sich ebenso eine Schwingungsgleichung:

$$\begin{aligned} U_C + U_R &= U_0 + U_L, \\ \frac{Q}{C} + R \cdot I + L \frac{dI}{dt} &= U_0, \\ \ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{CL} Q &= \frac{U_0}{L}. \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine gedämpfte harmonische Schwingung, die für $t \rightarrow \infty$ gegen Q_0 strebt. Ist der Schwingkreis abgeklemmt, also $Q_0 = 0$, dann erhalten wir offensichtlich

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0,$$

dabei gilt

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (12.4)$$

Weiterhin kann man das logarithmische Dekrement

$$\Lambda = \beta T = \frac{R}{2L} \cdot T \quad (12.5)$$

bestimmen.

Hoch- und Tiefpass

Ein elektrischer Hochpass ist eine Schaltung, die hohe Frequenzen ω praktisch ungedämpft durchlässt, tiefe Frequenzen aber unterdrückt. Das Gegenstück dazu ist der Tiefpass.



Abbildung 82: links Hochpass, rechts Tiefpass.

Man macht sich ganz schnell klar, dass gilt:

$$U_a = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} \cdot U_e.$$

Durch Bildung des komplex konjugierten, des Betrags und der Phasenverschiebung φ erhält man

$$\begin{aligned} |U_a| &= \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot |U_e|, \\ \tan \varphi &= \frac{1}{\omega RC}. \end{aligned}$$

Man sieht anhand dieser Gleichung, dass das Verhältnis von $|U_a|/|U_e|$ für $\omega = 0$ Null ist und mit wachsendem ω gegen 1 strebt. Die Phasenverschiebung φ sinkt von 90° bei $\omega = 0$ bis auf Null.

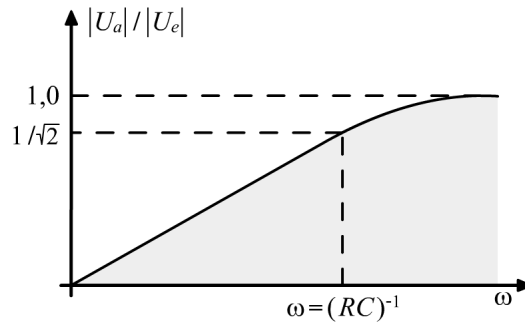


Abbildung 83: Verhältnis der Spannungen zur Frequenz.

Ganz äquivalent kann man den Tiefpass berechnen.

$$\begin{aligned} |U_a| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot |U_e|, \\ \tan \varphi &= -\omega RC. \end{aligned}$$

Man erkennt dann, dass hier das Verhältnis $|U_a|/|U_e|$ von 1 bei $\omega = 0$ auf Null sinkt für $\omega \rightarrow \infty$. Die Phasenverschiebung geht von Null auf -90° .

12.3 Versuchsdurchführung

12.3.1 Messungen mit dem Stromintegrator

Zunächst muss der Stromintegrator geeicht werden, indem wir Stromstöße bei einer bestimmten Spannung für unterschiedliche Zeitintervalle messen.

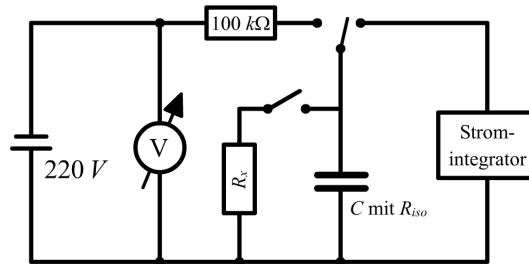


Abbildung 84: Versuchsaufbau zum Messkreis.

Danach wird der auf 220 V aufgeladenen Kondensator sofort über einen Messkreis ohne Widerstand entladen und die dabei geflossene Ladung notiert. Danach wird der zu messende Widerstand zugeschaltet, der Kondensator aufgeladen und es wird die Ladung notiert, die nach verschiedenen Zeiten noch auf dem Kondensator vorhanden ist. Zur Bestimmung des Isolatorwiderstands wird diese Messung nochmal ohne den großen Widerstand wiederholt.

12.3.2 Messungen zum Schwingkreis

Bei dieser Messreihe werden Spannungsverläufe $U(t)$ mit einem Impulsgenerator erzeugt und mit einem Oszilloskop gemessen. Dabei werden die folgenden Elemente verbunden:

- (1) Keine weiteren Elemente, Impulsgenerator zur Kontrolle alleine.
- (2) Impulsgenerator mit Plattenkondensator.
- (3) Impulsgenerator mit Plattenkondensator und einem $2\text{ M}\Omega$ Widerstand parallel geschaltet.
- (4) Impulsgenerator mit Plattenkondensator und dem unbekannten Widerstand R_x parallel geschaltet.
- (5) Impulsgenerator mit Plattenkondensator und einer Drosselspule parallel geschaltet.
- (6) Impulsgenerator mit Plattenkondensator und einer Luftspule parallel geschaltet.
- (7) Impulsgenerator mit kommerziellem Kondensator und $2\text{ M}\Omega$ Widerstand parallel geschaltet.

Als Letztes müssen mit dem Multimeter noch die notwendigen Daten wie Innenwiderstände der Messgeräte, Widerstände der Elemente in den Schaltungen und die Kapazitäten der Kondensatoren aufgenommen werden.

12.4 Auswertung

12.4.1 Bestimmung der Eichkonstanten

Der Eichvorgang am Stromintegrator wurde durch kurze Spannungsstöße bekannter Dauer Δt durchgeführt. Es bezeichne nun x den Wert auf der Digitalanzeige des Stromintegrators in der Einheit Skalenteile $[Sk t]$. Dann erhält man die gesuchte Proportionalitätskonstante G durch folgende Gleichung:

$$Q = \frac{1}{R_v} \int U_t dt = \frac{U_t}{R_v} \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad G = \frac{Q}{x} = \frac{U_t \cdot \Delta t}{R_v \cdot x},$$

dabei ist $U_t = 1.238 V$ die Spannung des Eichgenerators und $R_v = 100 k\Omega$ der Eingangswiderstand des Ladungsmessgerätes¹. Wir erhielten dabei folgende Werte:

Dauer Δt in s	x in $Sk t$	G in $C/Sk t$
0.0216	2.18	1.229
0.0268	2.70	1.227
0.0520	5.27	1.222
0.0640	6.24	1.234
0.0720	7.28	1.224
0.0870	8.82	1.221

Der Mittelwert mit Standardabweichung liefert uns nun das Ergebnis

$$G = (1.22612 \pm 0.00491) \cdot 10^{-7} \frac{C}{Sk t}.$$

12.4.2 Berechnung von ε_0 und Kapazität des Plattenkondensators

Nach Gleichung (12.3) gilt

$$C = \frac{Q}{U} = (n-1)\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot \left(\frac{\pi r^2}{d} + r \cdot \log \left(\frac{16\pi r}{d} - 1 \right) \right)$$

und somit folgt mit der Näherung $\varepsilon_r = 1$ gerade

$$\varepsilon_0 = \frac{Q}{U \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{\pi r^2}{d} + r \cdot \log \left(\frac{16\pi r}{d} - 1 \right) \right)}.$$

In unserem Fall gilt wie unter 12.2.2.1 schon beschrieben $n = 65$, $r = 10 cm$ und $d = 0.5 cm$. Weiter ist $U = 200 V$ die verwendete Spannung und Q die Ladungsmenge, die wir nun durch die Eichkonstante G berechnen können. Es ergibt sich nun

$$\varepsilon_0 = \frac{Q}{98199 \frac{C}{Vm}} \frac{As}{C} = \frac{G \cdot Q'}{98199 \frac{C}{Vm}} \frac{As}{C},$$

¹ Beide Werte nach Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 109.

dabei ist $Q' = Q/G$ die gemessene Ladungsmenge in Skt .

Es sei nun $C_{Pl} = Q/U$ die Kapazität des Plattenkondensators. Unsere berechneten Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle angegeben, die Fehler ergeben sich dabei jeweils aus dem Fehler von G :

Q' in Skt	Q in nC	C_{Pl} in nF	ε_0 in AS/Vm
7.13	874.2 ± 3.5	3.974 ± 0.016	$(8.903 \pm 0.036) \cdot 10^{-12}$
7.14	875.5 ± 3.5	3.979 ± 0.016	$(8.915 \pm 0.036) \cdot 10^{-12}$
7.13	874.2 ± 3.5	3.974 ± 0.016	$(8.903 \pm 0.036) \cdot 10^{-12}$
7.05	864.4 ± 3.5	3.929 ± 0.016	$(8.803 \pm 0.035) \cdot 10^{-12}$
7.17	879.1 ± 3.5	3.996 ± 0.016	$(8.952 \pm 0.036) \cdot 10^{-12}$
7.05	864.4 ± 3.5	3.929 ± 0.016	$(8.803 \pm 0.035) \cdot 10^{-12}$
7.09	869.3 ± 3.5	3.951 ± 0.016	$(8.853 \pm 0.035) \cdot 10^{-12}$
7.05	864.4 ± 3.5	3.929 ± 0.016	$(8.803 \pm 0.035) \cdot 10^{-12}$

Die gewichteten Mittelwerte ergeben nun

$$C_{Pl} = 3.9574 \pm 0.0056 \text{ nF} \quad \text{und} \\ \varepsilon_0 = (8.8659 \pm 0.0125) \cdot 10^{-12} \frac{AS}{Vm}.$$

Der Literaturwert² ist $\varepsilon_0 = 8.854188 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$, somit haben wir ein hervorragendes Ergebnis erzielt.

12.4.3 Isolationswiderstand R_{iso} und unbekannter Widerstand R_x

Nun werden die gemessenen Ladungsmengen logarithmisch gegen die Zeit aufgetragen und durch lineare Regression wird die Steigung m bestimmt. Gleichung (12.2) zeigt nun, dass für den verwendeten Widerstand R dann

$$R = - \frac{1}{m \cdot C_{Pl}} \quad (12.6)$$

gilt, dabei ist C_{Pl} die Kapazität des Kondensators.

Nach dieser Methode wird zunächst der Isolationswiderstand R_{iso} bestimmt. Die folgende Abbildung zeigt die beschreibende lineare Regression:

² Nach D. Meschede (2001): "Gerthsen Physik", 21. Auflage, Springer Verlag Berlin.

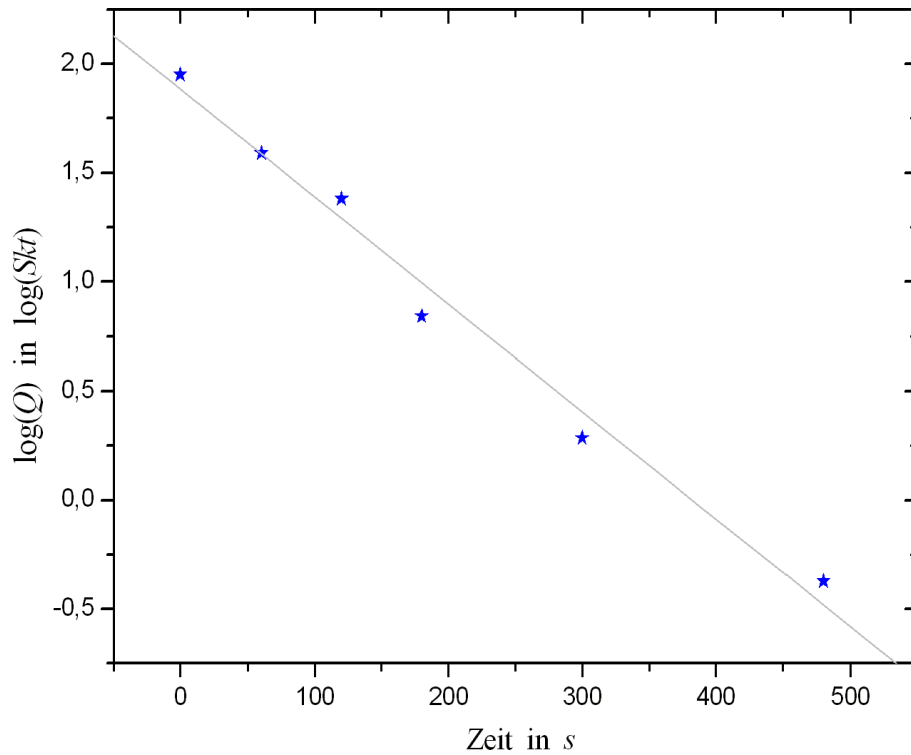


Abbildung 85: Logarithmische Auftragung der Ladungsmengen gegen die Zeit.

Wir erhalten die Steigung

$$m_{iso} = -0.004920 \pm 0.00032 \frac{Skt}{s}$$

und können nun durch Gleichung (12.6) den Widerstand R_{iso} mit dem Fehler

$$\sigma_{R_{iso}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{m_{iso}}}{m_{iso}^2 \cdot C_{Pl}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{C_{Pl}}}{m_{iso} \cdot C_{Pl}^2}\right)^2}$$

bestimmen. Wir erhalten

$$R_{iso} = 51.360 \pm 3.341 \text{ G}\Omega$$

Durch die zweite Messung mit parallel geschaltetem Widerstand R_x können wir nun analog den Widerstand $R = R_x + R_{iso}$ berechnen.

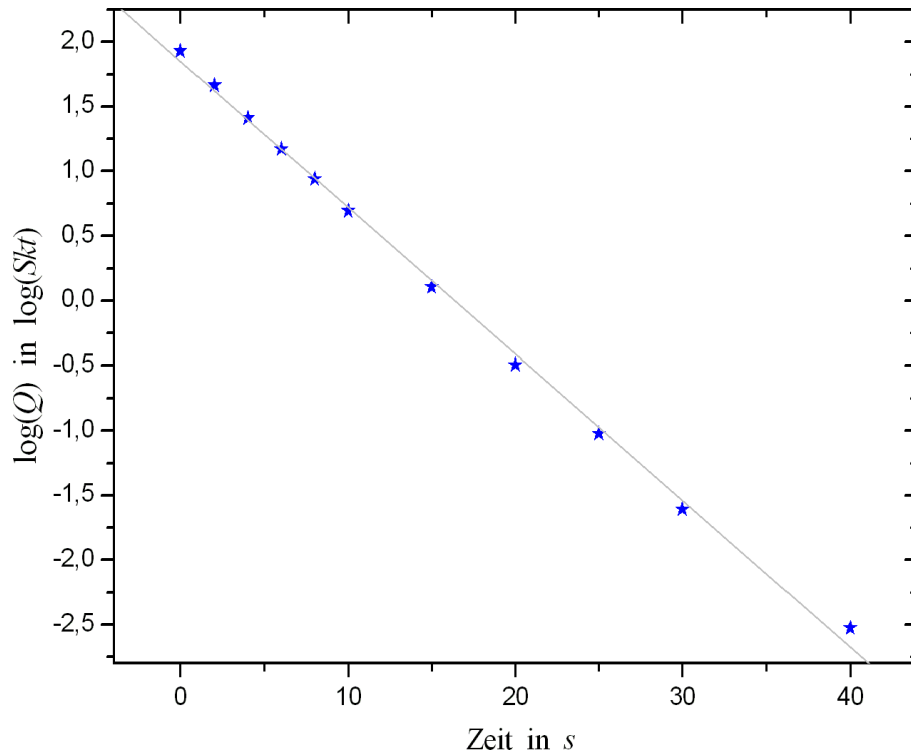


Abbildung 86: Logarithmische Auftragung der Ladungsmengen gegen die Zeit.

Wir erhalten hier eine Steigung von

$$m = -0.11298 \pm 0.00177 \frac{Skt}{s}$$

und können damit nun R berechnen:

$$R = 2.237 \pm 0.035 \text{ } G\Omega.$$

Für den gesuchten Widerstand R_x gilt

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{iso}} + \frac{1}{R_x} \quad \Leftrightarrow \quad R_x = \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_{iso}}}.$$

Wir erwarten dabei einen Fehler von

$$\sigma_{R_x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R^2 \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_{iso}} \right)^2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{R_{iso}}}{R_{iso}^2 \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_{iso}} \right)^2} \right)^2}$$

und erhalten damit das Endergebnis

$$R_x = 2.338 \pm 0.103 \text{ } G\Omega.$$

12.4.4 Spannungsverläufe mit dem Impulsgenerator

Die Ausdrücke der verschiedenen Spannungsverläufe **(1)** bis **(7)** wie in der Versuchsdurchführung beschrieben liegen im Anhang bei.

Verlauf **(1)** zeigt den Spannungsverlauf des Impulsgenerators, bei dem in bestimmten Zeitintervallen kurze Spannungsschübe erzeugt werden. **(2)** zeigt den Verlauf für einen Kondensator, wie erwartet ist ein exponentieller Abfall der Spannung zu erkennen. Bei **(3)** ist der Verlauf ähnlich zu **(2)**, diesmal war ein Widerstand parallel geschaltet und dadurch entlädt sich der Kondensator schneller. Schaltet man einen sehr großen Widerstand parallel mit dem Kondensator, so ergibt sich der Verlauf wie er in **(4)** zu sehen ist. Bei **(5)** und **(6)** sind abklingende harmonische Schwingungen zu sehen. Dieser Spannungsverlauf war ebenfalls zu erwarten, da es sich hierbei um Schwingkreise handelt. In **(7)** ist abschließend der Spannungsverlauf eines kommerziellen Kondensators mit einem parallel geschalteten Widerstand zu sehen. Es ist eine Ähnlichkeit zu den Verläufen **(2)** und **(3)** zu beobachten, wahrscheinlich haben beide Kondensatoren ähnliche Kapazitäten.

12.4.5 Eingangswiderstand des Oszilloskops und Kapazität C_{Pl}

Aus den Spannungsverläufen **(2)** und **(3)** soll nun der Eingangswiderstand R_0 des Oszilloskops sowie erneut die Kapazität C_{Pl} des Plattenkondensators berechnet werden.

Nach Gleichung (12.1) gilt auch

$$\log(U(t)) = \log(U_0) - \frac{1}{R \cdot C} \cdot t.$$

Trägt man die Spannungen also logarithmisch gegen die Zeit auf, so erhält man durch lineare Regression die Steigung $m = -1/R \cdot C$. Dies führen wir nun für **(2)** und **(3)** durch.

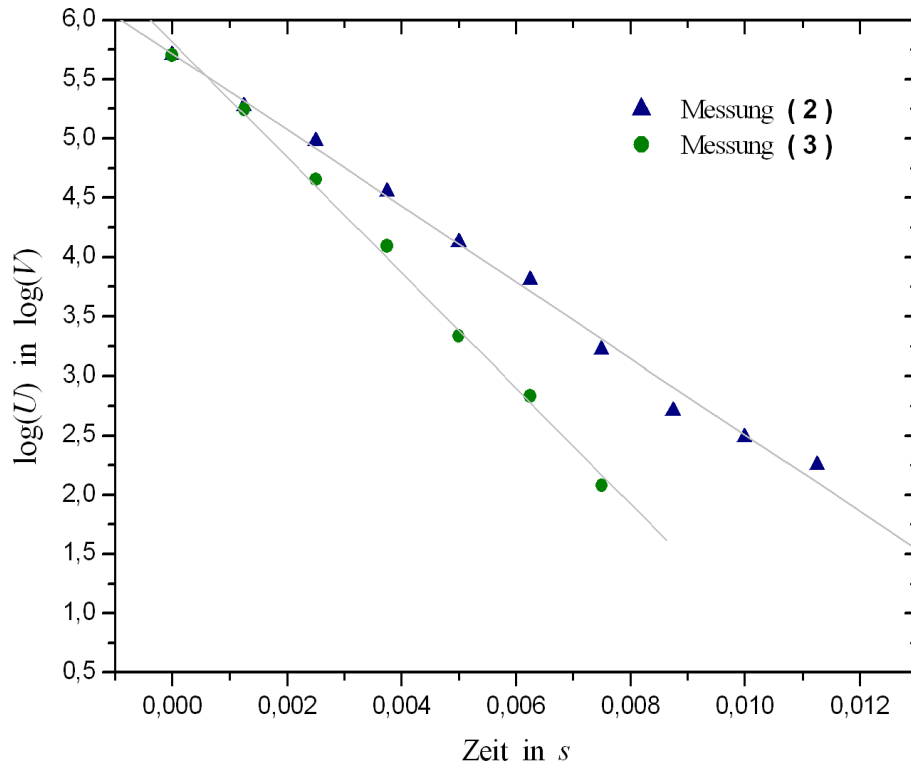


Abbildung 87: Logarithmische Auftragung der Spannung gegen die Zeit.

Durch lineare Regression ermittelten wir die Steigung

$$\alpha = -321.19 \pm 9.20 \frac{\log(V)}{s}$$

für Verlauf **(2)** und analog

$$\beta = -486.35 \pm 13.74 \frac{\log(V)}{s}$$

für **(3)**. Es gilt nun

$$-\alpha = R_0 \cdot C_{Pl} \quad \text{und} \quad -\beta = R \cdot C_{Pl}, \quad (12.7)$$

dabei ist R der Gesamtwiderstand bei Messung **(3)** und es gilt

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_E} \quad (12.8)$$

mit dem parallel geschalteten Widerstand $R_E = 2 \, M\Omega$. Durch Division der Gleichungen aus (12.7) und durch Ersetzen des Gesamtwiderstandes R nach (12.8) folgt nun

$$R_0 = R_E \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) = 679176 \, \Omega. \quad (12.9)$$

Wir erhalten dabei einen Fehler von

$$\sigma_{R_0} = \sqrt{\left(\frac{R_E \cdot \sigma_\alpha}{\beta} \right)^2 + \left(\frac{R_E \cdot \alpha \cdot \sigma_\beta}{\beta^2} \right)^2} = 53139 \, \Omega.$$

Nun kann auch sofort die Kapazität C_{Pl} berechnet werden:

$$C_{Pl} = \frac{-\alpha}{R_0} = 472.91 \mu F,$$

es ergibt sich dazu der Fehler

$$\sigma_{C_{Pl}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{\alpha \cdot \sigma_{R_0}}{R_0^2}\right)^2} = 39.4 \mu F.$$

Unterschiede der Kapazitäten

Uns fiel auf, dass hier die Kapazität des Plattenkondensators in einer ganz anderen Größenordnung als die zuvor berechnete Kapazität liegt.

Eine Antwort auf dieses Problem brachte uns der folgende Artikel:

”Die meisten elektrischen Lasten [...] enthalten eine Reaktanzkomponente. Der reaktive Teil der Last variiert mit der Frequenz. Zum Beispiel nimmt die reaktive Kapazität eines Kondensators mit zunehmender Frequenz ab.”³

Der Unterschied zwischen den Kapazitäten ist also durch die Benutzung des Impulsgebers zu erklären.

12.4.6 Bestimmung des unbekannten Widerstandes R_x

Analog zu dem in Kapitel 12.4.5 beschriebenen Verfahren lässt sich nun auch der unbestimmte Widerstand R_x aus dem Spannungsverlauf (4) bestimmen, wir führen jedoch zuvor die folgende Fehlerabschätzung durch:

Ersetzt man R_E in Gleichung (12.9) durch R_x , so erhält man

$$\alpha = \beta \left(\frac{R_0}{R_x} + 1 \right).$$

Wird nun R_x immer größer, so folgt $\alpha \approx \beta$ und dadurch wird auch der Fehler immer größer. Es ist bekannt, dass R_x ein sehr großer Widerstand ist, somit würden wir einen enorm großen Fehler erhalten.

Diese Fehlerbetrachtung zeigt, dass es keinen Sinn macht durch den Spannungsverlauf (4) den unbekannten Widerstand R_x zu bestimmen.

12.4.7 Kapazität C_{kom} des kommerziellen Kondensators

Wiederrum analog zu Kapitel 12.4.5 unter der Verwendung von R_0 sind wir nun auch in der Lage aus dem Spannungsverlauf (7) die Kapazität C_{kom} des kommerziellen Kondensators zu bestimmen. Wir tragen unsere Messdaten also

³ Nach <http://www.batteryuniversity.com/parttwo-42A-german.htm>. Aufgerufen am 22. September 2005.

wieder logarithmisch auf und führen eine lineare Regression durch. Aus der Steigung m dieser Regression erhalten wir

$$C_{kom} = \frac{-m}{R_0} = 319.52 \pm 25.86 \mu F.$$

12.4.8 Induktivität und Verlustwiderstand der Spulen

Die Spannungsverläufe **(5)** und **(6)** zeigen wie schon erwähnt die Schwingkreise mit der Drossel- und der Luftspule. Daraus soll nun jeweils die Induktivität L und der Verlustwiderstand R bestimmt werden.

Für das logarithmische Dekrement Λ dieser Schwingungen gilt

$$\Lambda = \frac{R}{2L} \cdot T, \quad (12.10)$$

dabei ist T die Schwingungsdauer. Nach Gleichung (12.5) und nach den Substitutionen aus (12.4) folgt nun

$$L = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \beta^2} = \frac{1}{C} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2 + \Lambda^2}, \quad (12.11)$$

dabei ist C die Kapazität des Plattenkondensators.

Um zunächst das logarithmische Dekrement Λ zu berechnen, tragen wir die Maxima der Schwingungen logarithmisch gegen die Zeit auf und führen ein letztes mal lineare Regressionen durch:

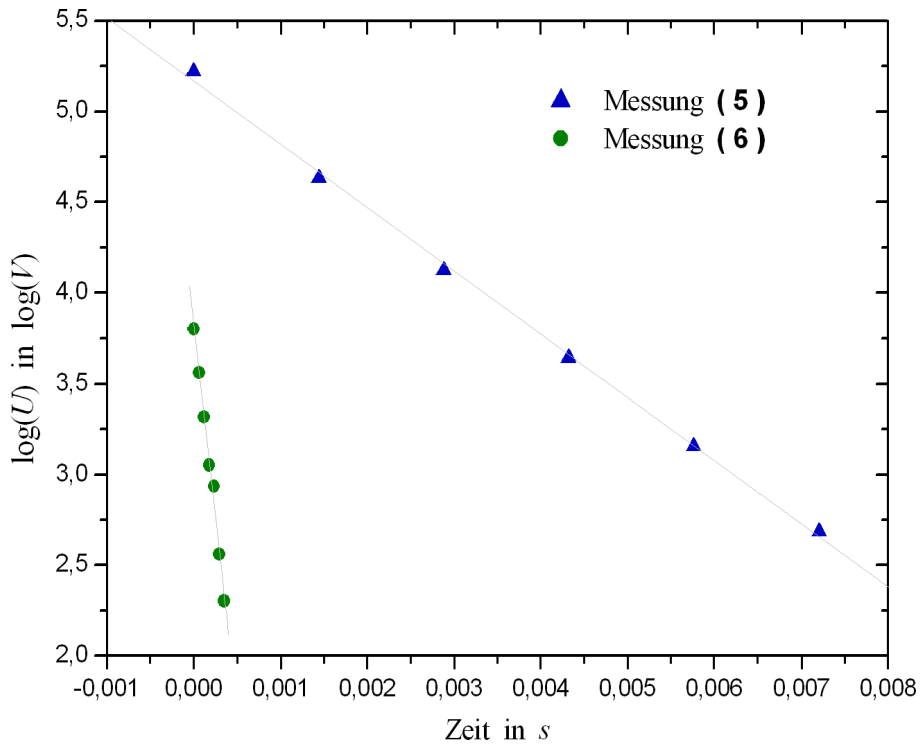


Abbildung 88: Logarithmische Auftragung der Maxima gegen die Zeit.

Durch die Steigungen m ergibt sich nun

$$\Lambda = -m \cdot T$$

mit der Schwingungsdauer T . Wir berechneten:

	T in ms	m in $\log(V)/s$	log. Dekrement Λ
Drosselspule	1.4412	-348.4 ± 6.8	0.502 ± 0.010
Luftspule	0.05788	-4247 ± 170	0.246 ± 0.010

Nach Gleichung (12.11) kann nun die Induktivität mit dem Fehler

$$\sigma_L = \sqrt{\left(\frac{T^2 \cdot \sigma_C}{C^2 \cdot (4\pi + \Lambda)}\right)^2 + \left(\frac{T^2 \cdot \sigma_\Lambda}{C \cdot (4\pi + \Lambda)^2}\right)^2}$$

berechnet werden. Weiter erhalten wir danach aus (12.10) den Verlustwiderstand der Spulen mit dem Fehler

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot L \cdot \sigma_\Lambda}{T}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \Lambda \cdot \sigma_L}{T}\right)^2}.$$

Unsere Berechnungen ergaben:

	Induktivität	Verlustwiderstand
Drosselspule	$13.21 \pm 0.02 H$	$9205 \pm 181 \Omega$
Luftspule	$0.0214 \pm 0,0001 H$	$181.9 \pm 7.3 \Omega$

Induktivität der Luftspule aus deren Daten

Die Selbstinduktivität L einer Zylinderspule der Länge $l = 1 m$ mit n Windungen und der Querschnittsfläche A ist⁴

$$L = \mu_0 A l \cdot \left(\frac{n}{l}\right)^2.$$

Die verwendete Luftspule hatte die Länge $l = 1 m$, sie hatte $n = 2800$ Windungen und einen Durchmesser von $0.0508 m$. Daraus berechnet sich die Induktivität

$$L = 0.01997 H.$$

12.5 Diskussion

Zunächst einmal ist festzuhalten, dass wir mit der Versuchsdurchführung sehr zufrieden waren, alles lief sehr viel besser und schneller, als erwartet. Dies lag auch an unserem Assistenten, welcher ebenfalls sehr gut vorbereitet war und uns Geräte und Schaltkreise gut erklären konnte – Danke dafür. So waren wir schon während der Durchführung mit unseren Messwerten zufrieden, anders als

⁴ Nach P.A. Tipler (2004): "Physik". 1. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

bei den Versuchen zuvor.

Gerade der Versuchsteil mit dem Ladungsmessgerät lieferte durchweg sehr zufriedenstellende Ergebnisse, es waren nur übliche Messungenauigkeiten der Geräte und geringe äußere Störungen festzustellen.

Auch die Spannungsverläufe als Ausdrücke des Oszilloskops waren wie erwartet, jedoch hatten diese eine so schlechte Auflösung, dass dies zu groben Ablesefehler führte. Somit scheinen unsere Werte zwar nicht schlecht, jedoch nicht so gut wie im vorherigen Versuchsteil zu sein.

Vergleich der Werte für die Kapazität C_{Pl} des Plattenkondensators.

Wir berechneten die Kapazität $C_{Pl} \approx 3.95 \text{ nF}$ und mit dem Multimeter haben wir eine Kapazität von $C_{Pl} = 4.1 \text{ nF}$ gemessen. Auch dieses Ergebnis ist also sehr zufriedenstellend.

Vergleich der Kapazitäten C_{Pl} und C_{kom}

Es ist auffällig, dass die Kapazität C_{Pl} des sehr großen Plattenkondensators ungefähr gleich der Kapazität C_{kom} des kleinen kommerziellen Kondensators ist.

Dies ist dadurch zu erklären, dass bei dem Plattenkondensator Luft als Dielektrikum verwendet wird und dass es sich bei dem kommerziellen Kondensator um einen Folienkondensator handelt, bei welchem Folien eng aufeinander gewickelt wurden. Durch den zusätzlichen Einsatz eines Dielektrikums mit einem sehr hohen Wert für ϵ_r kann somit ein sehr kleiner Kondensator mit vergleichsweise hoher Kapazität hergestellt werden.

Vergleich der Werte für die Induktivität der Luftspule

Die aus dem Spannungsverlauf berechnete Induktivität der Luftspule weicht nur um 7 % von der aus den Daten der Spule berechnete Induktivität ab. Der erste Wert wurde über den Ausdruck des Oszilloskops berechnet und weist schon daher einen Ablesefehler auf [siehe oben]. Somit ist auch dies ein super Ergebnis.

Eigene Kommentare

[Versuch sehr Spaßig, Auswertung übertrieben. Wir waren auf eine schwierige Auswertung vorbereitet und hatten genügend Zeit dafür. Am Ende ist nun meiner Meinung nach ein sehr super Protokoll bei rumgekommen, jedoch war der Aufwand enorm. Ich habe sehr viel dabei gelernt und konnte auch alle Auswertungsschritte durchführen, jedoch halte ich eine Auswertung mit einem derart großen Umfang für dieses Praktikum für viel zu übertrieben.]_{Daniel}

[Der Versuch war einer der besten den wir bisher hatten, obwohl wir im Vorfeld nur schlechtes gehört hatten. Nachdem alles aufgebaut war, waren die Messungen recht fix durchgeführt. Ich denke es wäre wünschenswert einen Computer beim Versuch stehen zu haben, weil die Auswertung der ausgedruckten Daten ein wenig mühsam ist, und hier auch Fehler durch ungenaues Ablesen zustande kommen. Die Auswertung war nicht so spassig, weil sehr viele Formeln noch hergeleitet werden mussten, und wir Schwingkreise in unserer Physik Vorlesung nur sehr kurz und oberflächlich behandelt haben.]_{Hauke}

13 Die spezifische Elektronenladung

Versuch durchgeführt am 23. September 2005, Protokoll erarbeitet von Hauke Rohmeyer.

13.1 Einleitung

Die Ladung e oder die Masse m_e eines Elektrons lassen sich schwer einzeln bestimmen, da sie bei physikalischen Phänomenen meistens zusammen, als zwei Unbekannte einer Gleichung, vorkommen. Der Quotient e/m_e aus ihnen wird **spezifische Elektronenladung** genannt und ist einfacher zu bestimmen, da damit aus den zwei Unbekannten eine gemacht worden ist.

13.2 Theorie

13.2.1 Elektronenkanone

Die folgende Abbildung zeigt schematisch den Aufbau einer Elektronenkanone.

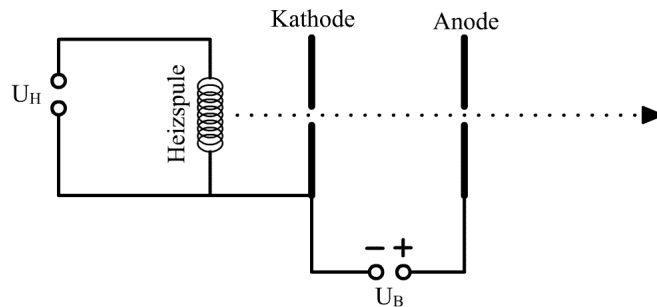


Abbildung 89: Aufbau einer Elektronenkanone.

Die Heizspule wird durch die Spannung U_H aufgeheizt und emittiert Elektronen. Diese kommen in das durch die Spannung U_B aufgebaute Feld und werden in Richtung Anode beschleunigt, wo sie durch ein kleines Loch austreten. Die durch U_B hervorgerufene Energie eU_B ist mit der kinetischen Energie der Elektronen E_{kin} vergleichbar:

$$eU_B = E_{kin} = \frac{1}{2}m_e v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eU_B}{m_e}},$$

dabei ist v die Austrittsgeschwindigkeit, e die Ladung und m_e die Masse eines Elektrons.

Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, somit tendieren auch die Elektronen dazu auseinander zu fliegen. Um den Strahl fokussiert zu halten wird er zwischen Kathode und Anode durch einen negativ geladenen Zylinder, einem sogenannten **Wehneltzylinder**, geleitet. Die negative Ladung des Zylinders hält die Elektronen auf seiner Symmetriachse fokussiert. Mit einem Wehneltzylinder kann man auch sehr gut die Intensität des Strahles regulieren, denn je größer seine Oberflächenladung, desto mehr Elektronen werden auf einer Bahn durch das Loch in der Anode gehalten. Dies wird u.a. im Fernseher genutzt.

Zusätzlich zur Fokussierung mit dem Wehneltzylinder findet in dem Glaszylinder, der mit Argon gefüllt ist, noch die Gasfokussierung statt. Durch Zusammenstöße mit den Elektronen werden die Argonatome negativ ionisiert. Die negativen Argonionen werden durch den Elektronenstrahl auseinandergedrückt und bilden so eine negativ geladenen Röhre um den Elektronenstrahl. Da die Argonionen träger als die Elektronen sind, fokussiert diese Röhre den Elektronenstrahl nach dem selben Prinzip wie der Wehneltzylinder.

Elektronen sind sehr klein, zu klein um sie mit dem bloßen Auge sehen, geschweige denn im Flug beobachten zu können. Die Elektronen haben allerdings genug kinetische Energie, um Gasmoleküle, mit denen sie zusammenstoßen, anzuregen. Wenn die angeregten Moleküle wieder in den Grundzustand zurückfallen, strahlen sie Licht ab. Deswegen ist der Elektronenstrahl als "Fadenstrahl" sichtbar.

13.2.2 Die Helmholtzspule

Die Helmholtzspule besteht aus zwei identischen, dünnen Spulen, deren Abstand zueinander gleich ihrem Radius ist. Dieser Aufbau gewährt ein möglichst homogenes Magnetfeld zwischen den Spulen.

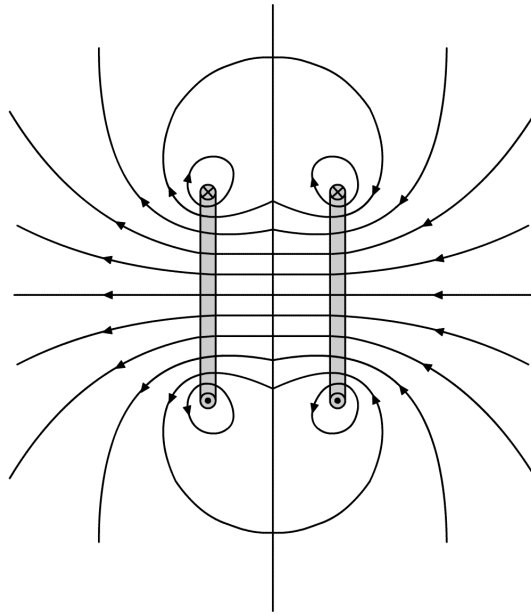


Abbildung 90: Magnetfeld eines Helmholtzspulenpaares.

Wir legen das Koordinatensystem so, dass die z -Achse entlang der Symmetriachse der Spulen verläuft und der Ursprung sich im Schwerpunkt befindet. Das Magnetfeld zeigt wegen der Symmetrie innerhalb immer in z -Richtung, außerdem ist es zylindersymmetrisch. Das Magnetfeld im Ursprung auf der z -Achse kann mittels Superposition von zwei dünnen Spulen berechnet werden und ergibt sich zu

$$B_{\vec{e}_z} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r n I R^2 \left[\left(R^2 + \left(z - \frac{R}{2} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} + \left(R^2 + \left(z + \frac{R}{2} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right],$$

dabei ist R der Radius der Spulen. Abbildung 91 zeigt das Magnetfeld der Spule auf der x - y -Ebene bei $z = 0$ in Abhängigkeit vom Abstand zum Ursprung. Dies sind die theoretischen Werte für eine Helmholtzspule mit Radius $R = 0,12 \text{ m}$ und Windungszahl $n = 200$ welche von einem Strom von $I = 1 \text{ A}$ durchflossen wird. In Luft kann $\mu_r \approx 1$ angenommen werden.

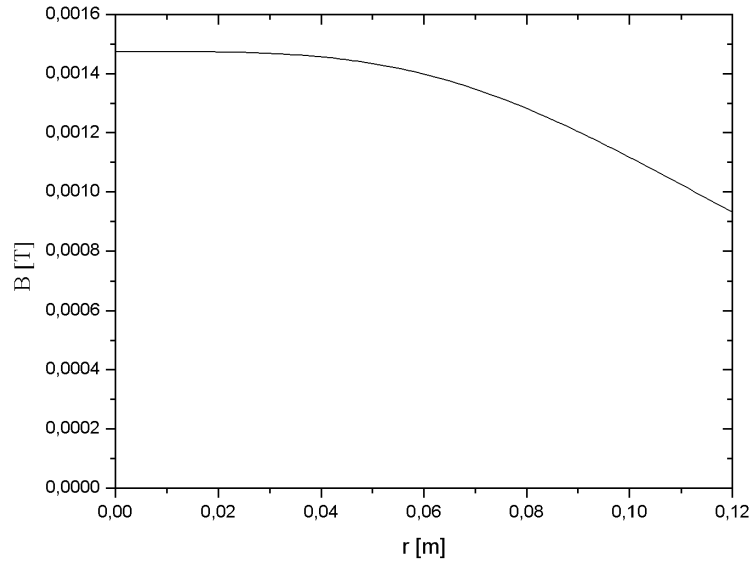


Abbildung 91: Magnetfeld auf der x-y-Ebene einer Helmholtzspule.

Im Inneren kann das Magnetfeld durch

$$B = \frac{8}{\sqrt{125}} \mu_0 \mu_r \frac{nI}{R} \quad (13.1)$$

angenähert werden, wobei n die Windungszahl und R der Radius der Spule und I die Stromstärke ist. Diese Annäherung gilt exakt im Ursprung. Wie gut sie weiter außen ist illustriert Abbildung 91. Die Elektronen sollten ihre Bahnen am Besten nicht außerhalb des halben Radius beschreiben.

13.2.3 Elektronen im Magnetfeld - Bestimmung von e/m_e

Bewegt sich eine Elektron in einem Magnetfeld, so wird es durch die Lorentzkraft abgelenkt:

$$\vec{F}_L = e \cdot \vec{v} \times \vec{B}.$$

e ist hierbei wieder die Ladung des Elektrons, v seine Geschwindigkeit und B das Magnetfeld. Interessant ist hierbei vor allem, dass \vec{F}_L immer senkrecht zu \vec{v} steht, den Betrag von \vec{v} also nicht verändert.

Zur Bestimmung von e/m_e werden Elektronen durch eine Elektronenkanone in das Magnetfeld einer Helmholtzspule geschossen. Legt man das Koordinatensystem so, wie oben, dann werden die Elektronen auf der x-y-Ebene in das Magnetfeld gebracht, wodurch \vec{v} senkrecht auf \vec{B} steht und deshalb $|\vec{v} \times \vec{B}| = v \cdot B$ gilt. \vec{F}_L steht senkrecht zu \vec{v} und hält die Elektronen auf einer Kreisbahn. Um ein Elektron mit Masse m_e und Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r zu halten, braucht man eine Kraft von

$$F = m_e \frac{v^2}{r}$$

um der Zentripetalkraft entgegenzuwirken. Genau dies muss die Lorentzkraft leisten [es sind ja keine anderen Kräfte da], es gilt also

$$m_e \frac{v^2}{r} = F_L = evB \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{r} = \frac{e}{m_e} B. \quad (13.2)$$

Wir kennen v : Die Austrittsgeschwindigkeit aus der Elektronenkanone, und wir kennen das Magnetfeld der Spule B in ausreichender Näherung. Somit können wir e/m_e berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{e}{m_e} &= \frac{v}{Br} = \sqrt{\frac{2eU_B}{m_e}} \frac{\sqrt{125}}{8} \frac{R}{\mu_0 \mu_r n I} \frac{1}{r} \\ \Rightarrow \frac{e^2}{m_e^2} &= \frac{2eU_B}{m_e} \frac{125}{64} \frac{R^2}{(r\mu_0 \mu_r n I)^2} \\ \Rightarrow \frac{e}{m_e} &= \frac{125}{32} \frac{U_B R^2}{(r\mu_0 \mu_r n I)^2}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

13.2.4 Elektronen im elektrischen Feld - Das Oszilloskop

Befindet sich ein Elektron in einem elektrischen Feld \vec{E} [z.B. zwischen den Platten eines Kondensators], dann wirkt auf es die Kraft

$$F_E = e \cdot \vec{E}.$$

Diese Tatsache macht man sich im Oszilloskop zu nutze.

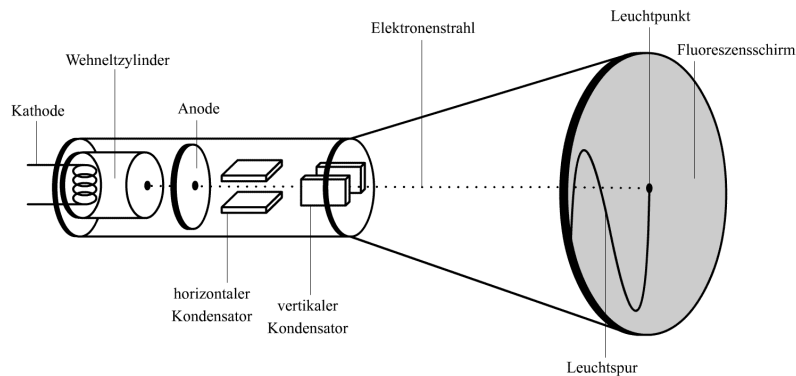


Abbildung 92: Schematischer Aufbau eines Oszilloskops.

Die Abbildung zeigt schematisch den Aufbau eines Oszilloskops. Eine Elektronenkanone schießt Elektronen zwischen den Platten von zwei Kondensatoren auf einen Fluoreszenzschirm, welcher dadurch zum Leuchten gebracht wird. Die Kondensatoren sind senkrecht zueinander angebracht. Legt man an ihnen eine Spannung an, so beschleunigen sie die Elektronen zur Seite und der Punkt auf dem Fluoreszenzschirm wird vertikal bzw. horizontal verschoben. Auf diese Weise kann man die Abhängigkeit einer Spannung von einer anderen darstellen.

Benutzt man für den vertikalen Kondensator eine Sägezahnspannung, so ist die vertikale Ablenkung periodisch linear zur Zeit. Dadurch kann die Zeitabhängigkeit, einer am horizontalen Kondensator angelegten Spannung, dargestellt werden. Ist die angelegte Spannung periodisch, so kann man durch Variation der

vertikalen Ablenkung ein stehendes Bild erzeugen. Das bedeutet, dass der Elektronenstrahl bei jedem vertikalen Durchgang den gleichen Weg beschreibt.

13.3 Versuchsdurchführung

Es wird für konstante Spulenströme zu verschiedenen Spannungen U_B in der Elektronenkanone und für konstante Spannung zu verschiedenen Spulenströmen jeweils der Durchmesser des Elektronenstrahl-Kreises gemessen. Es sollten mindestens 25 Wertepaare aufgenommen werden.

13.4 Auswertung

Nach Gleichung (13.3) können wir nun e/m_e mit den von uns gemessenen Werten berechnen. Der Fehler σ_{e/m_e} ergibt sich durch das Gesetz der Fehlerfortpflanzung zu

$$\begin{aligned}\sigma_{e/m_e} &= \sqrt{\sigma_{U_B}^2 \left(\frac{\partial e/m_e}{\partial U} \right)^2 + \sigma_I^2 \left(\frac{\partial e/m_e}{\partial I} \right)^2 + \sigma_r^2 \left(\frac{\partial e/m_e}{\partial r} \right)^2} \\ &= \sqrt{\sigma_{U_B}^2 \left(\frac{a}{r^2 I^2} \right)^2 + \sigma_I^2 \left(\frac{2Ua}{r^2 I^3} \right)^2 + \sigma_r^2 \left(\frac{2Ua}{r^3 I^2} \right)^2}\end{aligned}$$

mit $a = 125R^2/(32\mu_0^2 n^2)$.

Bei der Spannungsmessung kam ein „METRAMax 12“ Multimeter zum Einsatz. Dieses Gerät hat einen systematischen Fehler von $\pm 0,5\%$ vom Maximalausschlag¹. Der Messbereich lag bei 400 V , somit ergibt sich eine Abweichung von $\pm 2\text{ V}$. Hinzu kommt noch unser Ablesefehler von $0,4\text{ V}$, somit ergibt sich $\sigma_{U_B} = 2,4\text{ V}$. Bei der Strommessung verwendeten wir ein „M2012“ Multimeter, welches einen Messfehler von $\pm 1\%$ des Maximalausschlages hat². Der Messbereich lag bei 2 A . Der Ablesefehler lag bei $\pm 0,004\text{ A}$, somit ergibt sich $\sigma_I = 0,024\text{ A}$. Wir schätzten $\sigma_r = 1\text{ mm}$. Folgende Tabellen zeigen unsere Messwerte und Ergebnisse.

Konstante Spannung

Bei einer konstanten Spannung von $U_B = 140,2\text{ V}$ erhielten wir folgende Werte:

¹ Nach <http://www.praktikum.physik.uni-goettingen.de/Anleitung/multimeter%20metramax12%20ba.d.pdf>, aufgerufen am 25.09.05

² Nach P. Schaaf (2005): „Das Physikalische Praktikum“. Universitätsdrucke Göttingen.

I [A]	r [mm]	e/m_e [C/kg]	σ_{e/m_e} [C/kg]
0,801	35,15	$1,63 \cdot 10^{11}$	$0,14 \cdot 10^{11}$
0,758	37	$1,64 \cdot 10^{11}$	$0,14 \cdot 10^{11}$
0,72	39	$1,64 \cdot 10^{11}$	$0,15 \cdot 10^{11}$
0,681	41,2	$1,64 \cdot 10^{11}$	$0,15 \cdot 10^{11}$
0,64	43,5	$1,66 \cdot 10^{11}$	$0,15 \cdot 10^{11}$
0,6	46,65	$1,65 \cdot 10^{11}$	$0,16 \cdot 10^{11}$
0,56	50,25	$1,63 \cdot 10^{11}$	$0,16 \cdot 10^{11}$
0,52	54,25	$1,62 \cdot 10^{11}$	$0,17 \cdot 10^{11}$

Bei einer konstanten Spannung von $U_B = 170\text{ V}$ erhielten wir folgende Werte:

I [A]	r [mm]	e/m_e [C/kg]	σ_{e/m_e} [C/kg]
0,9	34,25	$1,65 \cdot 10^{11}$	$0,14 \cdot 10^{11}$
0,849	36	$1,68 \cdot 10^{11}$	$0,14 \cdot 10^{11}$
0,799	38,2	$1,68 \cdot 10^{11}$	$0,14 \cdot 10^{11}$
0,751	40,65	$1,68 \cdot 10^{11}$	$0,14 \cdot 10^{11}$
0,701	43,6	$1,68 \cdot 10^{11}$	$0,15 \cdot 10^{11}$
0,648	47,25	$1,67 \cdot 10^{11}$	$0,15 \cdot 10^{11}$
0,598	51,75	$1,63 \cdot 10^{11}$	$0,15 \cdot 10^{11}$
0,552	56,15	$1,63 \cdot 10^{11}$	$0,16 \cdot 10^{11}$

Konstanter Strom

Bei einem konstanten Strom von $I = 0,7\text{ A}$ erhielten wir folgende Werte:

U [V]	r [mm]	e/m_e [C/kg]	σ_{e/m_e} [C/kg]
246,8	53,35	$1,63 \cdot 10^{11}$	$0,13 \cdot 10^{11}$
120,3	36,85	$1,67 \cdot 10^{11}$	$0,15 \cdot 10^{11}$
141	39,75	$1,68 \cdot 10^{11}$	$0,15 \cdot 10^{11}$
163	43	$1,66 \cdot 10^{11}$	$0,14 \cdot 10^{11}$
181,2	45,25	$1,66 \cdot 10^{11}$	$0,14 \cdot 10^{11}$
201,2	47,8	$1,65 \cdot 10^{11}$	$0,14 \cdot 10^{11}$
220,2	50,25	$1,64 \cdot 10^{11}$	$0,14 \cdot 10^{11}$

Bei einem konstanten Strom von $I = 0,62\text{ A}$ erhielten wir folgende Werte:

U [V]	r [mm]	e/m_e [C/kg]	σ_{e/m_e} [C/kg]
113,4	40,75	$1,64 \cdot 10^{11}$	$0,16 \cdot 10^{11}$
130	43,15	$1,67 \cdot 10^{11}$	$0,16 \cdot 10^{11}$
145,3	45,75	$1,66 \cdot 10^{11}$	$0,16 \cdot 10^{11}$
160,1	48,25	$1,65 \cdot 10^{11}$	$0,15 \cdot 10^{11}$
175,4	50,75	$1,63 \cdot 10^{11}$	$0,15 \cdot 10^{11}$
191,2	53,25	$1,62 \cdot 10^{11}$	$0,15 \cdot 10^{11}$
205,3	54,75	$1,64 \cdot 10^{11}$	$0,15 \cdot 10^{11}$

Der Literaturwert³ liegt bei $1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$. Somit liegen fast alle Fehler der Einzelmessungen im erwünschten Bereich. Eine Berechnung des gewichteten Mittelwertes würde hier unsinnig sein, da die Messwerte alle einen erheblichen systematischen Fehler aufweisen.

13.4.1 Berechnung der Flussdichte

Nimmt man ein Wertepaar von U_B und r , kann man bei gegebenem $e/m_e = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$ die Flussdichte B am Ort der Elektronenkreisbahn ausrechnen. Dazu stellt man Gleichung (13.2) nach B um, setzt v ein und erhält für $U = 140,2 \text{ V}$ und $r = 0,0035 \text{ m}$ die Flussdichte

$$B = \frac{v}{r} \frac{m_e}{e} = \sqrt{\frac{2eU_B}{m_e}} \frac{m_e}{er} = 1,14 \text{ mT}.$$

Nimmt man dagegen Gleichung (13.1), die die theoretische Flussdichte im Mittelpunkt der Helmholtzspulen beschreibt, so erhält man mit $n = 200$ und $R = 0,122 \text{ m}$ für $I = 0,801 \text{ A}$ die Flussdichte

$$B = \frac{8}{\sqrt{125}} \mu_0 \mu_r \frac{nI}{R} = 1,18 \text{ mT}.$$

Man erkennt, dass die Flussdichte schon bei einem Radius von 35 mm kleiner wird.

13.5 Fehlerdiskussion

13.5.1 Streuung der Ergebnisse in Abhängigkeit vom Radius

Um systematische Fehler erkennen zu können, tragen wir nun noch einmal alle Ergebnisse für e/m_e in Abhängigkeit vom gemessenen Radius der Elektronenkreisbahn auf.

³ Nach D.Meschede (2002): „Gerthsen Physik“, 21. Auflage, Springer-Verlag Berlin.

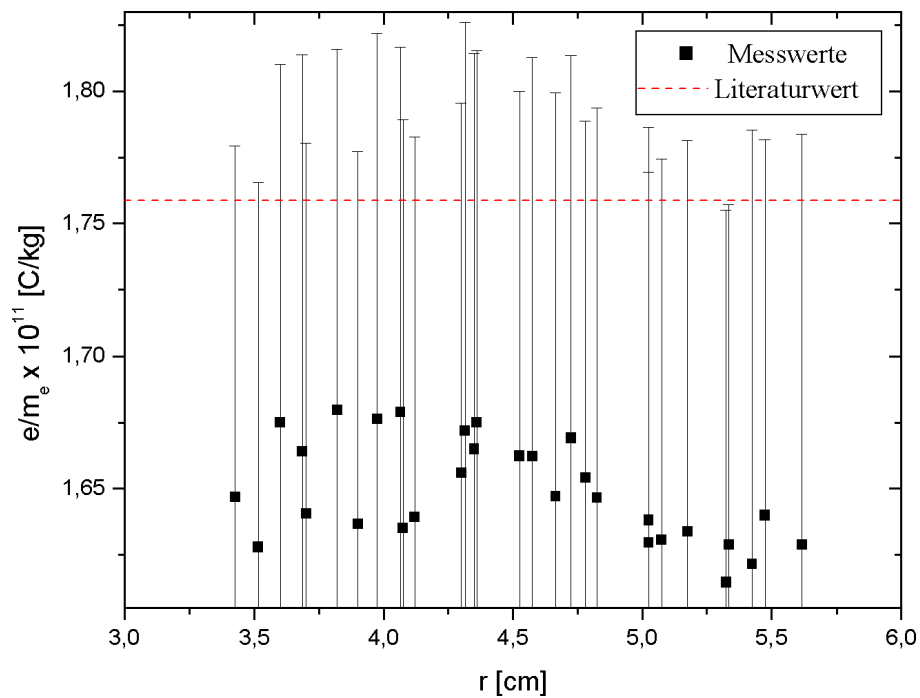


Abbildung 93: Streuung der Ergebnisse in Abhängigkeit vom Radius.

Man erkennt, dass die Messwerte mit zunehmendem Radius stärker vom Literaturwert abweichen. Dieses Ergebnis ist unlogisch, da für die Flussdichte in der Helmholtzspule $B < 1\text{ T}$ gilt. Wenn man Gleichung (13.2) jedoch nach e/m_e umstellt, steht B im Nenner. Somit müsste e/m_e bei größeren Radien ebenfalls größer werden.

Eigene Kommentare

[Der Versuch war megast kurz und die Auswertung war so wie ich mir das vorstelle.]_{Daniel}

[Der Versuch war wirklich sehr kurz, auch wenn wir anfangs ein paar Probleme mit der Heizung hatten. Auch die Auswertung war ein Traum.]_{Hauke}

14 Magnetfeld von Spulen

Versuch durchgeführt am 26. September 2005, Protokoll erarbeitet von Daniel Scholz.

14.1 Einleitung

In diesem Versuch werden wir die Magnetfelder von unterschiedlichen Spulen mit zwei Messverfahren ausmessen und diese beiden Verfahren auf ihre Tauglichkeit untersuchen. Dabei betrachten wir eine lange und eine kurze Spule sowie ein Helmholtzspulenpaar.

Für die Messverfahren nutzen wir eine Hallsonde und eine Induktionsspule.

14.2 Theorie

14.2.1 Magnetfelder

Jede bewegte Ladung erzeugt ein Magnetfeld, welches von dieser ausgeht. Eine große Bündelung solcher bewegter Ladungen kann man in einer Spule erreichen, in der sehr viele Windungen eng aneinander liegen. Maße für die Stärke dieses Magnetfeldes sind die *magnetische Erregung*¹ \vec{H} und die *Kraftflussdichte* \vec{B} , die durch

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

miteinander in Beziehung stehen. μ_0 ist hierbei die *Influenzkonstante* und μ_r ist eine materialspezifische Permeabilitätskonstante des Stoffes, der in die Spule eingebracht wird. Befindet sich in der und um die Spule nur Luft, so kann $\mu_r \approx 1$ angenommen werden, dies wird im gesamten Versuch der Fall sein.

Der magnetische Fluss

Der magnetische Fluss Φ ist gegeben durch eine Fläche A , die von der Kraftflussdichte \vec{B} durchdrungen wird:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

¹ In älteren Büchern heißt diese Größe auch oft magnetische Feldstärke, derzeit verwendet man jedoch die Bezeichnung der Erregung.

Da jedes Magnetfeld quellenfrei ist, sind die Magnetfeldlinien immer geschlossen und besitzen keinen Anfangs- oder Endpunkt. Somit ergibt sich nach dem Gaußschen Satz

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Daraus folgt, dass das Integral über einen geschlossenen Weg c im Gegensatz zum elektrischen Feld nicht gleich Null ist. Es gilt das Ampèresche Gesetz

$$\int_c \vec{H} \, d\vec{l} = I,$$

wobei I die Stromstärke in dem Leiter ist, der von der geschlossenen Kurve c eingeschlossen wird. Aus dieser Gleichung ergeben sich einige Formeln zum Beschreiben von magnetischen Feldern:

- (1) Das Feld außerhalb eines geraden Stromleiters ergibt sich zu

$$\vec{B}(r) = \mu_0 \mu_r \frac{I}{2\pi r},$$

wobei r der Abstand zum Leiter ist.

- (2) Im Inneren einer Spule der Länge L mit N Windungen, in der das Feld als homogen angesehen wird, lautet die Kraftflussdichte

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \frac{IN}{L}.$$

- (3) Reiht man mehrere Spulen aneinander, so verhalten sie sich wie eine einzige Spule mit den addierten Windungszahlen und Längen der einzelnen Spulen.

Induktionsgesetz

Bei einem zeitlich veränderten Fluss wird eine Spannung induziert, die der Ursache entgegenwirkt, die also beim Abschalten einer Spannungsquelle noch eine kurze Zeit den Stromfluss aufrecht hält. Dies ist das **Induktionsgesetz**, welches sich mathematisch zu

$$U_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \, d\vec{A}$$

ergibt.

14.2.2 Magnetfelder einer Kreisschleife

Um das Magnetfeld einer stromtragenden geschlossenen Leiterschleife c mit dem Linienstrom I zu berechnen, nutzt man häufig das **Biot-Savartsche Gesetz**

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{\vec{e}_t \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \, dl.$$

Es soll nun das Magnetfeld auf der Symmetrieachse [hier die z Achse] eines stromdurchflossenen Ringes vom Radius R mit dem Linienstrom I berechnet werden.

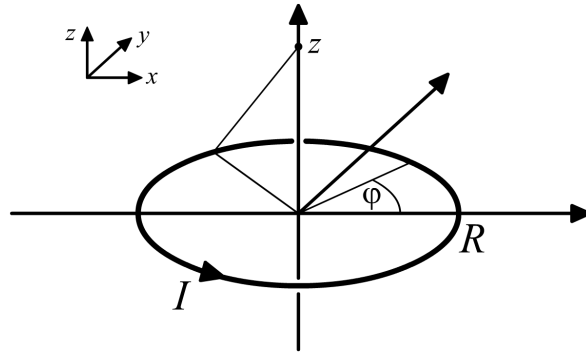


Abbildung 94: Stromdurchflossener Ring

In Zylinderkoordinaten gilt nun $dl = R d\varphi$ sowie

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_t = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

damit ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} \vec{e}_t \times (\vec{r} - \vec{r}_0) &= \begin{pmatrix} z \cos \varphi \\ z \sin \varphi \\ R \end{pmatrix}, \\ |\vec{r} - \vec{r}_0|^3 &= (R^2 + z^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Es folgt nun

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Rz \cos \varphi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi = 0, \\ B_y &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Rz \sin \varphi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi = 0, \\ B_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (14.1)$$

14.2.3 Magnetfelder einer Spule

Aus dem Ergebnis einer Kreisschleife soll nun das Magnetfeld einer Spule der Länge L mit N Windungen berechnet werden.

Unter der Annahme, die Spule sei homogen gewickelt, lässt sich eine Größe n einführen, die die Windungsdichte beschreibt:

$$n := \frac{N}{L}.$$

Betrachtet wir nun die Überlagerung von infinitesimal dünnen gestapelten Ringen, die jeweils den Strom dI führen, so erhalten wir die differentielle Stromdichte

$$\frac{dI}{dz} = nI \quad \Leftrightarrow \quad dI = nI dz.$$

Es gilt dann also

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} R^2 \int \frac{dI}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (14.2)$$

und um die Stärke des Gesamtmagnetfeldes zu bestimmen, ist über die Gesamtlänge der Spule zu integrieren. Dazu wird das Magnetfeld an der Stelle a auf der z Achse betrachtet, wobei a den Abstand von dem Spulenende beschreibt. Man erhält dann unter Verwendung der Gleichung (14.2) das Integral

$$\begin{aligned} B_z(a) &= \frac{\mu_0}{2} n I R^2 \int_{L-a}^a \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I N}{2L} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{L-a}{\sqrt{R^2 + (L-a)^2}} \right). \end{aligned} \quad (14.3)$$

Ohne die Influenzkonstante μ_0 ergibt sich nun durch $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ gerade

$$H_z(a) = \frac{IN}{2L} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{L-a}{\sqrt{R^2 + (L-a)^2}} \right). \quad (14.4)$$

Zwei Spezialfälle dieser Formel sind nun die folgenden:

- (1) Im Mittelpunkt der Spule, also bei $a = L/2$, ergibt sich für $L \gg R$ die bekannte Näherung

$$H_{Mitte} = \frac{IN}{L}.$$

- (2) Am Rande der Spule, also bei $a = 0$, ergibt sich ebenfalls für $L \gg R$ der Ausdruck

$$H_{Rand} = \frac{IN}{2L}.$$

14.2.4 Die Hallsonde

Die Hallsonde ist ein sehr einfaches Gerät um die Stärke eines Magnetfeldes zu bestimmen.

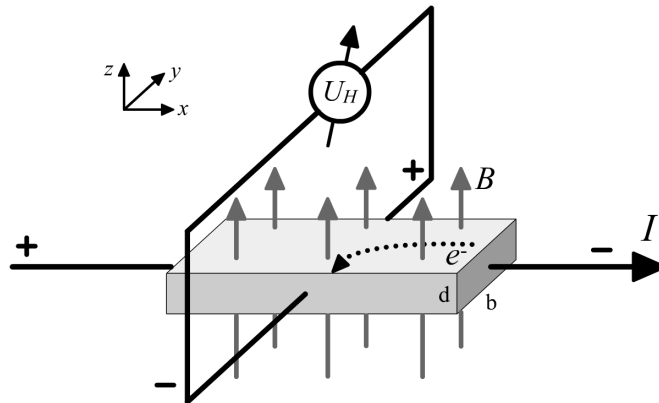


Abbildung 95: Beispiel einer Hallsonde

Sie besteht aus einem quaderförmigen Halbleiter, durch den ein Strom fließt. Wirkt nun senkrecht darauf ein magnetisches Feld, so werden die Elektronen durch die auf sie wirkende Lorentzkraft senkrecht zur Fließrichtung abgelenkt. Es findet also eine Ladungstrennung auf dem Quader statt, wodurch ein elektrisches Feld in y Richtung entsteht. Wie in Abbildung 95 zu erkennen ist, wird an den Seiten der Sonde die Spannung U_H , die **Hallspannung**, abgegriffen. Je stärker nun die magnetische Flussdichte ist, umso mehr werden die Elektronen abgelenkt und desto größer ist auch die Hallspannung. Damit die Sonde auch die komplette magnetische Feldstärke misst und nicht nur Komponenten davon, muss man sie möglichst senkrecht vom magnetischen Feld durchdringen lassen.

Rechnerisch bedeutet dies nun: In einem Zeitraum Δt bewegen sich

$$\Delta N = nAv\Delta t$$

Ladungsträger durch die Querschnittsfläche A des Quaders, dabei ist n die Anzahl freier Elektronen und v die Geschwindigkeit der Elektronen in x Richtung. Daraus ergibt sich die Stromstärke durch die Fläche A zu

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnvA.$$

Wenn nun die Lorentzkraft eines Magnetfeldes die Elektronen verschiebt, tut sie das so lange, bis das entstehende elektrische Feld die Lorentzkraft kompensiert und die Elektronen wieder geradlinig durch die Sonde fließen. In y Richtung kann dann die Hallspannung abgegriffen werden, nämlich

$$U_H = E_y \cdot b = v \cdot B \cdot b,$$

dabei ist E_y das elektrische Feld in y Richtung und b ist die materialspezifische Beweglichkeit der Ladungsträger.

Man erkennt nun, dass die Spannung proportional zur magnetischen Flussdichte ist und somit kann man mit einer geeichten Hallsonde die Stärke des B Feldes bestimmen.

14.2.5 Eichung eines Galvanometers

Ein ballistisches Galvanometer ist ein Messinstrument, mit dem auch sehr kleine Ströme gemessen werden können. Da dieses Gerät meist nur dazu verwendet wird um festzustellen, ob ein Strom fließt oder nicht, müssen wir das Galvanometer zunächst eichen.

Wird durch ein ballistisches Galvanometer ein kurzer Stromstoß geschickt, so führt es einen Stoßausschlag aus. Die Drehspule des Galvanometers schwingt aus ihrer Ruhelage zu einem Umkehrpunkt und kehrt dann schwingend oder je nach Dämpfung auch kriechend in die Gleichgewichtslage zurück. Der Umkehrpunkt ist hierbei ein Maß für die geflossene Ladung:

$$Q = \int I dt.$$

Der Ausschlag φ des Zeigers ist dabei proportional zu Q , es gibt also eine Konstante m mit

$$\varphi = m \cdot Q.$$

Um nun die Konstante m zu finden, braucht es einer Eichung durch verschiedene Stromstöße konstanter Länge. Die Stromstärke, die dabei durch das Galvanometer fließt, wird durch die folgenden Schaltung angedeutet:

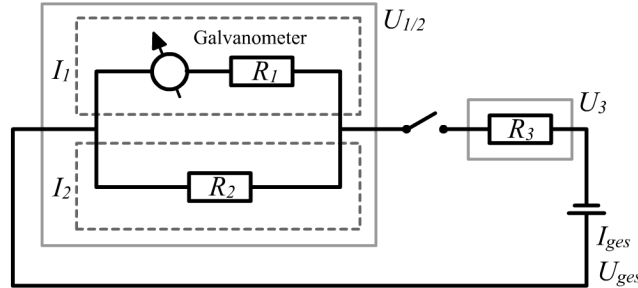


Abbildung 96: Schaltskizze zur Stromstärke des Galvanometers

Zunächst lässt sich der Gesamtwiderstand berechnen, es gilt

$$R_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + R_3$$

und in unserem Versuch ist $R_1 = 1\text{ k}\Omega$, $R_2 = 1\text{ }\Omega$ und $R_3 = 1\text{ k}\Omega$ [siehe dazu auch Abbildung 97 zum Versuchsaufbau]. Weiter verwenden wir die Gesamtspannung $U_{ges} = 2\text{ V}$, dadurch lässt sich nun die Gesamtstromstärke berechnen:

$$I_{ges} = \frac{U_{ges}}{R_{ges}} \approx 1.998 \cdot 10^{-3}\text{ A}.$$

Durch diese Größen erhalten wir nun den Strom I_1 , der durch das Galvanometer fließt:

$$I_1 = I_{ges} \cdot \left(\frac{R_1 + R_2 + R_{ges}}{R_2} \right) \approx 1.996 \cdot 10^{-6}\text{ A},$$

dabei wurde der Widerstand des Galvanometers in der Hoffnung unberücksichtigt gelassen, dass er sich als klein gegenüber $1\text{ k}\Omega$ herausstellt.

Die in dem Zeitintervall Δt durch das Galvanometer geflossene Ladung Q kann nun einfach durch

$$Q = I_1 \cdot \Delta t$$

berechnet werden. Durch lineare Regression verschiedener Messwerte kann nun die Konstante m bestimmt werden.

14.2.6 Messung des Magnetfeldes mit einer Induktionsspule

Man kann Magnetfelder statt mit einer Hallsonde auch mit Hilfe einer kleinen Induktionsspule ausmessen. Diese hält man parallel zu dem zu messenden Feld und erzeugt durch Ein- oder Ausschalten des Feldes einen Spannungsstoß in der Induktionsspule.

Nach dem Induktionsgesetz lässt sich nun ein direkter Zusammenhang zwischen Galvanometerausschlag φ und dem magnetischen Fluss Φ herstellen:

$$\varphi = m \int_{t_0}^{t_1} I dt = \frac{m}{R} \int_{t_0}^{t_1} U dt$$

$$= \frac{mN_{ind}}{R} \int_{t_0}^{t_1} \dot{\Phi} dt = \frac{mN_{ind}}{R} (\Phi(t_1) - \Phi(t_0)),$$

dabei ist m die Eichungskonstante des Galvanometers, N_{ind} die Anzahl der Windungen der Induktionsspule und $R = R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ der Widerstand im Galvanometerteilkreis. Für $\Phi(t_0) = 0$ und $\Phi(t_1) = \Phi$ ergibt sich also

$$\Phi = \frac{\varphi R}{mN_{ind}}.$$

Da ein homogenes Magnetfeld B untersucht wird, welches stets dieselbe Querschnittsfläche A_{ind} der Induktionsspule durchsetzt, gilt für die Stärke des Magnetfeldes durch $\Phi = B \cdot A_{ind}$ gerade

$$B = \frac{\Phi}{A_{ind}} = \frac{\varphi R}{A_{ind} m N_{ind}} = \frac{4\varphi R}{\pi D_{ind}^2 m N_{ind}}, \quad (14.5)$$

dabei ist D_{ind} der Durchmesser der Induktionsspule.

14.2.7 Bestimmung der Influenzkonstanten μ_0

Aus der Messung mit einer Hallsonde

Verwendet man eine Hallsonde, um die magnetische Erregung H einer Spule zu untersuchen, so kann die Influenzkonstante μ_0 durch

$$\mu_0 = \frac{B}{H}$$

bestimmt werden, dabei ist B das theoretisch erwartete Magnetfeld der Spule aus (14.3).

Aus der Messung mit einer Induktionsspule

Verwendet man eine Induktionsspule und dazu Formel (14.5), um das Magnetfeld B einer Spule zu untersuchen, so kann die Influenzkonstante μ_0 wieder durch

$$\mu_0 = \frac{B}{H}$$

bestimmt werden, dabei ist H die theoretisch erwartete magnetische Erregung einer Spule aus (14.4).

14.3 Versuchsdurchführung

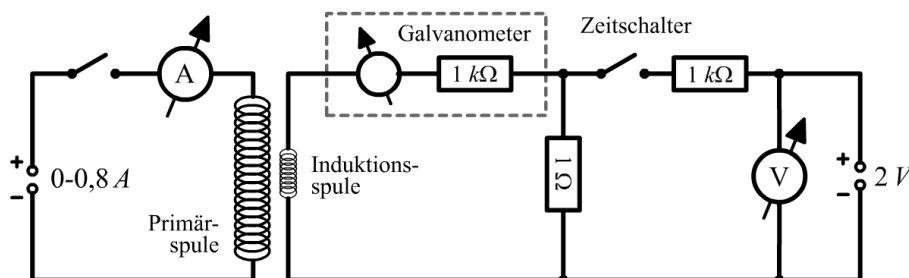


Abbildung 97: Schaltskizze zum Versuchsaufbau

Zunächst muss das Galvanometer geeicht werden. Dazu wird die Induktionsspule in die Mitte der Primärspule gebracht und über einen Zeitschalter verschiedene kurze Stromstöße konstanter und bekannter Länge durch das Galvanometer geschickt, um dabei den Zeigerausschlag zu messen.

Anschließend wird der Primärkreis unter Strom gesetzt $[0.5\text{ A}]$ und die sich einstellenden Ausschläge beim Ein- und Ausschalten des Sekundärkreises bestimmt. Die Stromstärke wird hierbei auf kleine Ampèrebereiche begrenzt, da sich sonst sehr hohe Induktionsspannungen am Schalter aufbauen, die zum Funken Schlag führen können. Diese Messung wird bei einer Schrittweite von 2 cm auf der gesamten Längsachse der Spule durchgeführt.

Danach wird diese Messung für unterschiedliche Stromstärken zwischen 0.1 und 0.8 A wiederholt, dabei befindet sich die Induktionsspule jedoch nur in der Mitte der Spule. Es wird dabei nun die lange und die kurze Luftspule verwendet. Aus diesen Messungen soll später jeweils die Influenzkonstante μ_0 bestimmt werden.

Mit Hilfe der Hallsonde werden die Magnetfelder der langen und kurzen Spulen sowie der Helmholtzspule in Abhängigkeit der Position auf der Längsachse gemessen. Die Schrittweite beträgt hierbei 1 cm und die Stromstärke ist wieder 0.5 A .

Es darf nicht vergessen werden, dass alle nötigen Spulendaten für die Auswertung notiert werden müssen.

14.4 Auswertung

14.4.1 Eichung des Galvanometers

Wie schon unter 14.2.5 beschrieben, können wir durch

$$Q = 1.996 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot \Delta t$$

die geflossene Ladung berechnen, die in den festen Zeitintervallen Δt geflossen ist. Die jeweiligen Ausschläge konnten somit gegen diese Ladung aufgetragen werden, um aus einer linearen Regression die Eichkonstante m zu erhalten.

Wir erhielten das Ergebnis

$$m = 18245200 \pm 135985 \frac{C}{Sk}$$

[dabei wurde auf eine Auftragung der Werte verzichtet, da dieser Auswertungsteil zum wiederholten Male durchgeführt wurde und es nichts Spannendes zu beobachten gibt].

14.4.2 Lange Luftspule

Durch die Eichkonstante m können wir nun nach der in 14.2.6 hergeleiteten Gleichung

$$B = \frac{\varphi R}{A_{ind} m N_{ind}} = \frac{4\varphi R}{\pi D_{ind}^2 m N_{ind}} \quad (14.6)$$

aus den Messungen mit der Induktionsspule die Kraftflussdichte B für jede Position im Inneren der Spule bestimmen. Es gilt dabei $R = 1\text{ k}\Omega$, $N_{ind} = 369$ und

$$D_{ind} = 5.9 \text{ cm.}$$

Neben der Induktionsspule haben wir das Magnetfeld der langen Spule auch mit der Hallsonde ausgemessen. Die Werte wurden in der Einheit G für Gauß angezeigt und sind durch $T = 10^{-4} \cdot G$ in Tesla umzurechnen. Außerdem hatte die Hallsonde einen Offset von $4.9 G$, dieser Wert war also von unseren Messdaten zu subtrahieren.

Wie das theoretische Magnetfeld aussehen sollte, zeigt Gleichung (14.3). Die Homogenität im Inneren der Spule kann durch

$$B_{Mitte} = \frac{\mu_0 I N}{L}$$

angenähert werden. Wir verwendeten eine Stromstärke I von $0.5 A$, die Spule hatte $N = 829$ Windungen und eine Länge L von 44.9 cm . Alle berechneten Werte sind nun in der folgenden Abbildung zu sehen:

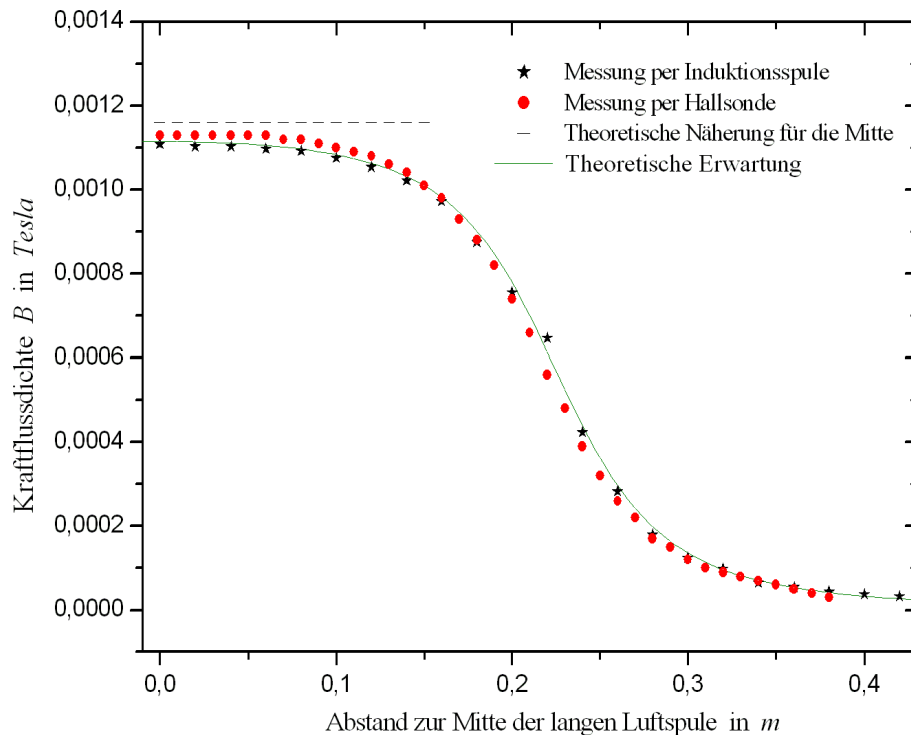


Abbildung 98: Das Magnetfeld der langen Luftspule entlang der Längsachse.

Beide Messungen, also die Messung mit der Induktionsspule sowie die Messung mit der Hallsonde, entsprechen sehr gut der theoretischen Erwartung. Es sind maximale Abweichungen von 5 % zu erkennen, was ein deutlich besseres Ergebnis ist, als wir vermutet hätten. Auch die erwartete Homogenität im Inneren der Spule wurde jeweils fast erreicht. Dadurch kann nun auch keine Aussage darüber getroffen werden, welche Messmethode als zuverlässiger erscheint, beide scheinen bei uns sehr gut verlaufen zu sein.

Aus allen Messungen können wir nun auch die Influenzkonstante μ_0 berechnen, dazu müssen wir für jede Position das berechnete B Feld durch das theoretische

H Feld teilen [siehe Kapitel 14.2.7]. Für beide Messmethoden haben wir jeweils den Mittelwert mit Standardabweichung berechnet:

Messmethode	Influenzkonstante μ_0
Induktionsspule	$(1.2367 \pm 0.0479) \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$
Hallsonde	$(1.2048 \pm 0.0841) \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$

14.4.3 Kurze Luftspule

Neben der langen Spule haben wir auch noch eine vergleichsweise kurze Luftspule mit recht großem Radius betrachtet. Hier verwendeten wir nur die Hallsonde, um das Magnetfeld auf der Längsachse zu bestimmen. Die theoretische Feldstärke wurde wieder in (14.2.3) hergeleitet und die Gleichung zur Homogenität im Inneren der Spule ist analog zur langen Spule. Wir verwendeten wieder eine Stromstärke von 0.5 A , die Spule hatte $N = 499$ Windungen, eine Länge L von 27 cm und einen Radius R von 10 cm . Die berechneten Werte sind in der folgenden Abbildung zu sehen:

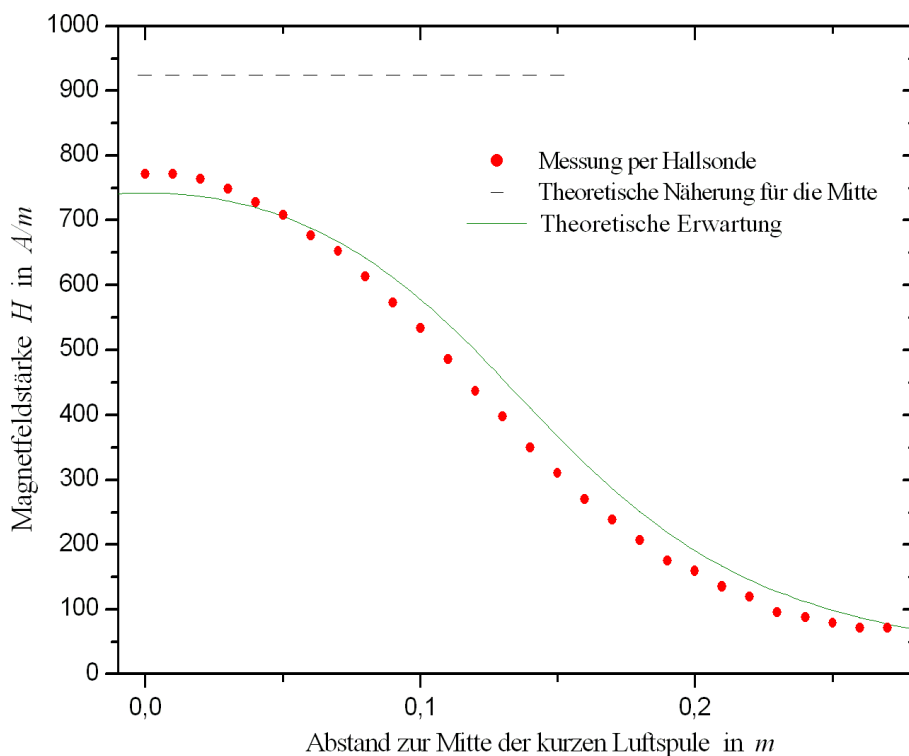


Abbildung 99: Die Feldstärke der kurzen Luftspule entlang der Längsachse.

Diesmal weicht die gemessene Feldstärke etwas mehr von der theoretischen Kurve ab, vor allem fällt die gemessene Stärke zum Spulenäußeren schneller ab. Die erwartete Homogenität liegt deutlich über der gemessenen aber auch der theoretisch erwarteten Homogenität. Dies ist dadurch zu erklären, dass für die Gleichung der Homogenität ein Radius R der Spule angenommen wurde, der sehr viel größer im Vergleich zur Länge L ist [siehe Kapitel 14.2.3]. Dies war

hier nicht der Fall, somit verwundert uns auch dieses Ergebnis keineswegs.

Analog zur langen Spule lässt sich nun auch die Influenzkonstante μ_0 berechnen, wir erhielten das folgende Ergebnis:

$$\mu_0 = (1.1276 \pm 0.1125) \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}.$$

14.4.4 Helmholtzspulen und Homogenität

Neben den beiden Luftspulen haben wir noch ein Helmholtzspulenpaar mit der Hallsonde ausgemessen. Die homogene Feldstärke zwischen den beiden Spulen kann durch die Gleichung

$$H = I \left(\frac{4}{5} \right)^{3/2} \cdot \frac{N}{R},$$

angenähert werden, dabei ist $I = 0.5 \text{ A}$ die verwendete Stromstärke, $N = 507$ die Windungszahl der Helmholtzspulen und $R = 6.6 \text{ cm}$ deren Radius [zur Gleichung siehe Versuch 13: Die spezifische Elektronenladung]. Die Feldstärke der Helmholtzspule und die erwartete Homogenität wurde nun im Vergleich zu den beiden Luftspulen aufgetragen:

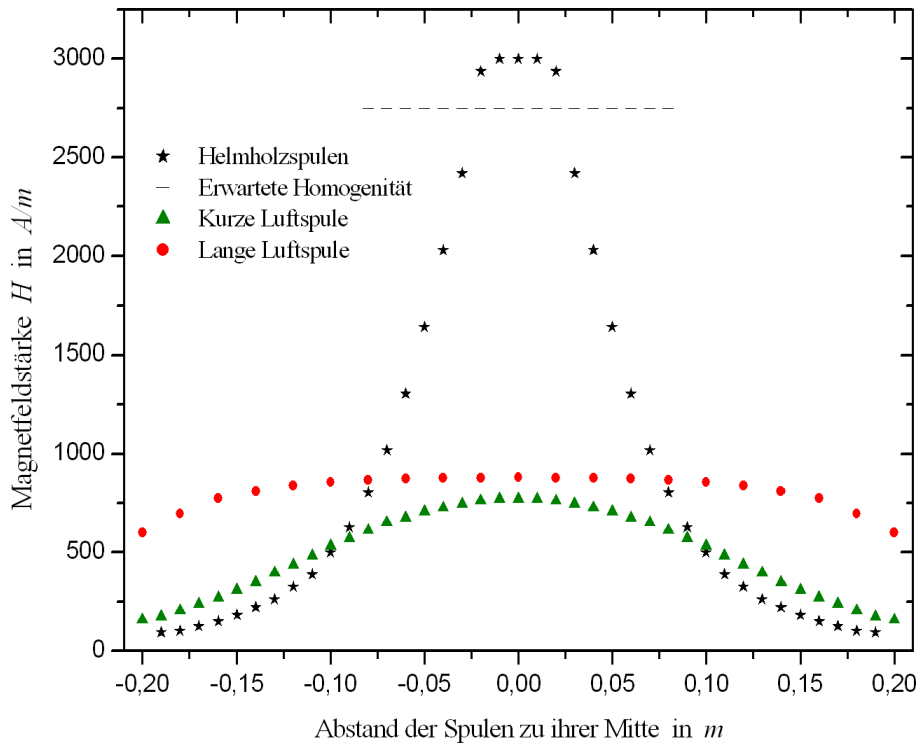


Abbildung 100: Die Feldstärke aller untersuchten Spulen entlang der Längsachse.

Es ist zu beobachten, dass die Feldstärke zwischen dem Helmholtzspulenpaar sehr viel größer als die der Luftspulen ist, jedoch fällt die Stärke außerhalb der Spulen sehr viel stärker ab. Genau zwischen dem Spulenpaar ist das Feld auch sehr schön homogen, allerdings liegt der gemessene Wert 9,2 % über dem theoretisch erwarteten Wert.

Aus den gemessenen Werten im Bereich der Homogenität und aus den theoretischen Werten kann nun wieder μ_0 bestimmt werden. Wir berechneten den folgenden Mittelwert mit Standardabweichung:

$$\mu_0 = (1.2980 \pm 0.1287) \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}.$$

14.4.5 Bestimmung der Influenzkonstanten μ_0

Es soll nun die Influenzkonstante μ_0 aus der Messung mit unterschiedlichen Stromstärken bestimmt werden.

Dazu kann jeweils wieder aus Gleichung (14.6) das gemessene Magnetfeld B bestimmt und mit der erwarteten magnetischen Erregung

$$H = \frac{N \cdot I}{L}$$

verglichen werden [siehe wieder 14.2.7]. Dabei ist N die Windungszahl und L die Länge der jeweiligen Spule und I ist die verwendete Stromstärke.

Für beide verwendeten Spulen haben wir den Mittelwert mit Standardabweichung berechnet:

Spule	Influenzkonstante μ_0
Lange Spule	$(1.1982 \pm 0.0203) \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$
Kurze Spule	$(1.0693 \pm 0.1281) \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$

14.5 Diskussion

Teilweise wurden Vergleiche und Beobachtungen schon in der Auswertung beschrieben, sodass hier nur noch einige allgemeinen Fehlerquellen erwähnt werden sollen.

Für die Messungen mit der Induktionsspule haben wir sehr alte Steckwiderstände verwendet. Die eingestellten Werte dieser Widerstände wichen teilweise leicht von den Werten ab, die wir jeweils mit dem Multimeter gemessen hatten. In unserer Auswertung haben wir trotzdem mit den theoretischen Werten gerechnet.

Zwei weitere mögliche Fehlerquellen sind die Skala des Galvanometers und die Abstand des Helmholtzspulenpaares. Die Skala war für einige Messungen zu klein, sodass wir bei Messungen mit großen Galvanometerausschlägen die Skala durch ein Lineal erweitern mussten und somit war der Wert schlechter einzuschätzen. Der Abstand des Helmholtzspulenpaares war auch nicht angegeben, sondern musste gemessen werden. Dazu verwendeten wir den Abstand von den Mitten der jeweiligen Wicklungen.

Vergleich der Werte für die Influenzkonstante μ_0

Die folgende Tabelle zeigt noch einmal alle berechneten Werte für die Influenzkonstante μ_0 :

Spule [Messmethode]	Influenzkonstante μ_0
Lange Spule [Induktionsspule]	$(1.2367 \pm 0.0479) \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$
Lange Spule [Hallsonde]	$(1.2048 \pm 0.0841) \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$
Lange Spule [Stromstärke]	$(1.1982 \pm 0.0203) \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$
Kurze Spule [Stromstärke]	$(1.0693 \pm 0.1281) \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$
Kurze Spule [Hallsonde]	$(1.1276 \pm 0.1125) \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$
Helmholtzspule [Hallsonde]	$(1.2980 \pm 0.1287) \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$

Der Literaturwert liegt bei²

$$\mu_0 = 1.2566371 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}.$$

Den genauesten Wert lieferte somit die lange Luftspule bei der Messung mit der Induktionsspule. Hier liegt der berechnete Wert sehr nah am exakten Literaturwert und auch die Standardabweichung ist mit am kleinsten. Bis auf die Messung mit unterschiedlichen Stromstärken sind jedoch auch alle anderen Werte gute Ergebnisse, der wahre Wert liegt hier überall im Fehlerbalken.

Eigene Kommentare

[Versuch etwas monoton, dafür war die Auswertung der Hammer. Mit den vorbereiteten Formeln hat das ganze keine vier Stunden gedauert. ... Naja, dann noch mal 40 Minuten für die dumme zusätzliche Berechnung von μ_0 . Absoluter Rekord für mich bisher, Hauke kennt das ja schon :). Antwort auf Haukes Kommentar: Ich finde den Versuch nicht überflüssig, auch mal ein kurzer Versuch sollte dabei sein, wir können ja nix dafür, dass wir die schweren Versuche schon hinter uns haben. Außerdem messen wir in Versuch 16 das Magnetfeld auf einer ganz anderen Achse aus.]_{Daniel}

[Ich habe noch nie für eine Auswertung weniger als vier Stunden gebraucht und habe keine Ahnung, wovon Daniel spricht. Der Versuch war allerdings wirklich ein wenig langweilig. Die verwendeten Messmethoden waren uns schon alle bekannt und das Magnetfeld von Spulen wird auch in Versuch 16 noch einmal ausgemessen. Diesen Versuch finde ich überflüssig. Man sollte besser einen anderen mit reinnehmen.]_{Hauke}

² Nach D. Meschede (2001): "Gerthsen Physik", 21. Auflage, Springer Verlag Berlin.

15 Wechselstromwiderstände

Versuch durchgeführt am 27. September 2005, Protokoll erarbeitet von Hauke Rohmeyer.

15.1 Einleitung

In diesem Versuch wird das Widerstandsverhalten von Spule und Kondensator auf Wechselspannung untersucht. Einige Anwendungsmöglichkeiten wie Hoch- und Tiefpass werden anschließend besprochen.

15.2 Theorie

15.2.1 Effektivwerte

Der *Effektivwert* eines Wechselstroms ist die Stärke des Gleichstroms, welcher die identische Leistung an einem ohm'schen Widerstand aufbringen würde, wie der betrachtete Wechselstrom im zeitlichen Mittel. Zum Beispiel berechnet sich die effektive Stromstärke I_{eff} bei einem sinusförmigen Spannungsverlauf mit der Scheitelstromstärke I_0 durch

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Bei einer periodischen Rechteckspannung gilt $I_{\text{eff}} = I_0/2$.

15.2.2 Spannung, Widerstand und Stromstärke als komplexe Zahlen

Die verschiedenen Größen im Wechselstromkreis sind nicht nur durch ihren Betrag, sondern auch durch ihre Phase zu beschreiben. So hat [wie weiter unten erläutert wird] die Stromstärke im Normalfall eine Phasenverschiebung zur Spannung. Diese Vorgänge können mit Sinusfunktionen beschrieben werden, einfacher ist es allerdings mit komplexen Zahlen. So wird z.B. eine Sinusspannung $U(t)$ mit Kreisfrequenz ω durch

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} = U_0(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

beschrieben, wobei nur der Realteil den wirklichen Vorgang beschreibt. Der Widerstand [im Wechselstromkreis auch Impedanz Z genannt] ist weiterhin als Quotient zwischen Spannung $U(t)$ und Stromstärke $I(t)$ definiert.

15.2.3 Wechselstromwiderstände

Ohm'scher Widerstand

Das Verhalten eines ohm'schen Widerstandes bei Wechselstrom entspricht seinem Verhalten bei Gleichstrom. Der Widerstand ist nicht von der Frequenz der anliegenden Spannung abhängig, Strom und Spannung verlaufen in Phase.

Induktiver Widerstand

Ein durch eine Spule fließender Wechselstrom $I(t)$ verursacht eine Induktionsspannung U_{ind} und es gilt:

$$U_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Dabei ist L die Induktivität der Spule und I die Stromstärke. Ist kein anderer Widerstand im Stromkreis vorhanden, so muss die komplette Spannung an der Spule abfallen. Nach Kirchhoff gilt $U(t) + U_{\text{ind}} = 0$ und somit $U(t) = -U_{\text{ind}}$. Nun folgt mit der angelegten Spannung $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ mit der Kreisfrequenz ω und dem Scheitelwert U_0 :

$$U(t) = -U_{\text{ind}} = L \frac{dI}{dt}.$$

Durch Umformung erhält man

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U_0}{L} e^{i\omega t}.$$

Integriert man dies auf beiden Seiten, so ergibt sich

$$I(t) = \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = \frac{U(t)}{i\omega L}.$$

Nun dividiert man $U(t)$ durch $I(t)$:

$$\frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0}{I_0} = i\omega L =: Z_L. \quad (15.1)$$

Z_L nennt man **induktiven Widerstand**. Er wächst mit steigender Frequenz linear an. Steigt der Strom in der Spule an, so ist die Änderung des Stromes sehr groß, dementsprechend wird eine hohe Spannung induziert. Nähert sich der Strom schließlich dem Scheitelpunkt, so sinkt die Induktionsspannung wieder auf 0. Es entsteht eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung: Die Spannung läuft dem Strom um $\pi/2$ voraus:

$$I(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Kapazitiver Widerstand

Die Ladung Q eines Kondensators wird bestimmt durch $Q = C \cdot U$ mit der Spannung U und der Kapazität C . Liegt an dem Kondensator an, so gilt

$$Q = CU_0 e^{i\omega t}$$

Daraus folgt mit $I = Q/t$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = i\omega C U_0 e^{i\omega t}.$$

Demzufolge gilt nach der Definition von U:

$$I(t) = i\omega C U(t).$$

Es folgt

$$\frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{i\omega C} =: Z_C.$$

Z_C heißt **kapazitiver Widerstand**. Dieser wird mit zunehmender Frequenz schnell kleiner. Legt man an einen Kondensator Strom an, so lädt sich dieser auf und eine Spannung entsteht. Ist der Kondensator komplett aufgeladen, so geht der Strom auf Null zurück und die Spannung erreicht das Maximum. Die Spannung hängt dem Strom also um die Phasenverschiebung $\pi/2$ hinterher:

$$U(t) = U_0(\cos \omega t),$$

$$I(t) = I_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

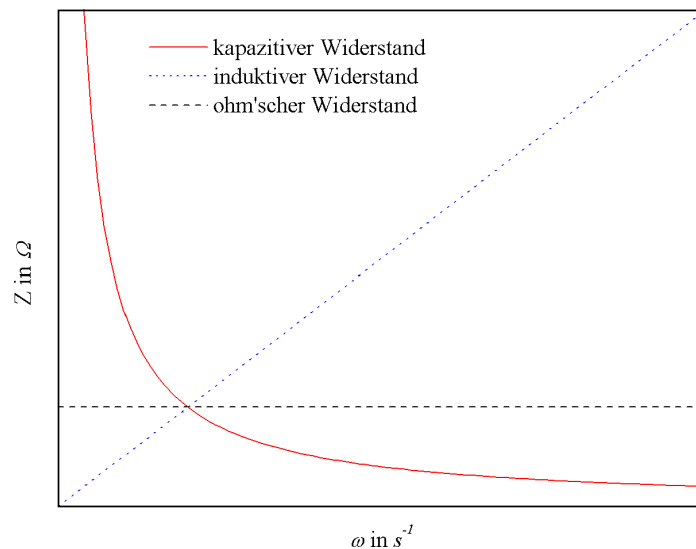


Abbildung 101: Ohm'scher, induktiver und kapazitiver Widerstand

15.2.4 Kombination von Widerständen

Reihenschaltung

Schaltet man Spule, Kondensator und ohm'schen Widerstand in Reihe, so addieren sich deren Widerstände zu dem sogenannten **Scheinwiderstand** Z , der auch als **Impedanz** bezeichnet wird:

$$Z = R + Z_L + Z_C = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (15.2)$$

Der Realteil der Impedanz bezeichnet man als **Wirkwiderstand**

$$\operatorname{Re}(Z) = R ,$$

den Imaginärteil **Blindwiderstand**

$$\operatorname{Im}(Z) = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X .$$

In der komplexen Zahlenebene stehen R und X senkrecht aufeinander, der Betrag lässt sich also nach Pythagoras berechnen:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2} .$$

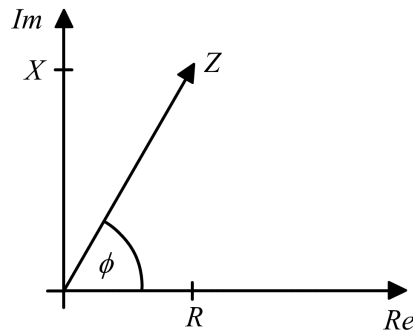


Abbildung 102: Phasenverschiebung in der komplexen Zahlenebene.

Die Phasenverschiebung ϕ berechnet sich wie folgt:

$$\phi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}\right) . \quad (15.3)$$

Die Resonanzfrequenz berechnet sich wie bei einem Schwingkreis:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \quad (15.4)$$

Bei dieser Frequenz ist die Impedanz der Schaltung besonders niedrig, man kann so also bestimmte Frequenzbereiche isolieren [„durchschalten“].

Parallelschaltung

Schaltet man einen Kondensator und eine Spule parallel, so addieren sich die Kehrwerte der Widerstände zum Kehrwert des Scheinwiderstandes:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} = i\omega C - \frac{1}{i\omega L} = i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) .$$

Analog zur Reihenschaltung gilt für den Betrag:

$$\left|\frac{1}{Z}\right| = \omega C - \frac{1}{\omega L} \quad \Leftrightarrow \quad |Z| = \frac{1}{\omega C - 1/(\omega L)} .$$

Für die Phasenverschiebung ϕ ergibt sich

$$\phi = \arctan\left(\frac{I_C - I_L}{I_0}\right) = \arctan\left(\frac{U}{I} \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right).$$

Die Impedanz der Schaltung ist also bei der Resonanzfrequenz besonders hoch, man kann also bestimmte Frequenzen „sperren“.

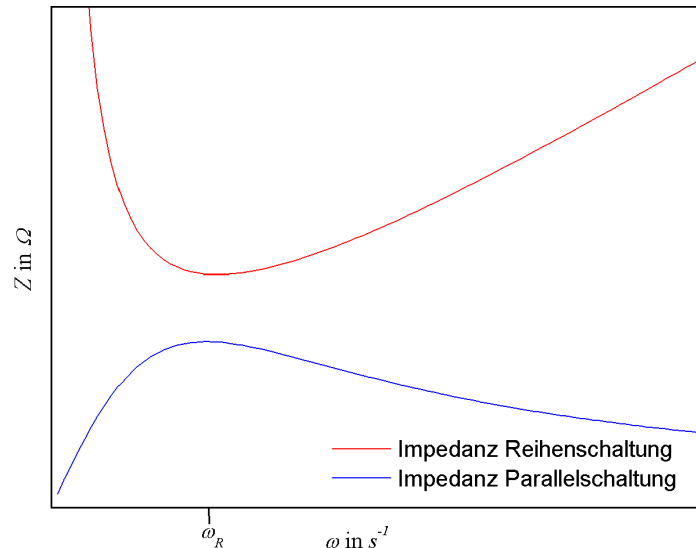


Abbildung 103: Impedanz in Reihen- und Parallelschaltung.

15.2.5 Scheinwiderstand

Der Scheinwiderstand Z eines Systems besteht aus dem Wirkwiderstand R und dem Blindwiderstand X . Der Wirkwiderstand beeinflusst die tatsächliche Wirkleistung, die mit der Spannung in Phase liegt, und somit die umgesetzte Energie. Die frequenzabhängige Blindleistung dagegen gibt die aufgenommene Leistung wieder an das System ab und setzt keine Energie um.

15.2.6 Filter

Die einzelnen Komponenten lassen sich zu Filtern kombinieren.

Hochpass

Ein sogenannter **Hochpass** besitzt für niedrige Frequenzen einen hohen Widerstand.

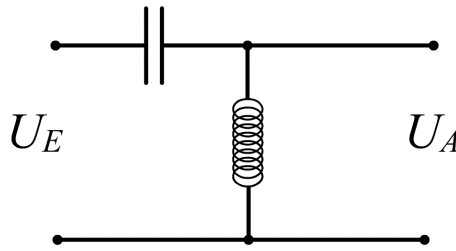


Abbildung 104: Hochpass.

Es wird davon ausgegangen, dass Spule und Kondensator perfekt sind, also nur Blindwiderstände haben. Mit der Eingangsspannung U_E gilt dann [nach dem ohm'schen Gesetz] für den Strom

$$I(t) = \frac{U_E(t)}{X_L + X_C}.$$

Für die Ausgangsspannung U_A folgt

$$U_A = I(t) \cdot X_L = \frac{X_L \cdot U_E(t)}{X_L + X_C}.$$

Tiefpass

Bei einem **Tiefpass** hingegen ist der Widerstand für kleine Frequenzen gering. Bei einer solchen Schaltung gilt analog zum Hochpass

$$U_A = U_E \frac{X_C}{X_C + X_L}.$$

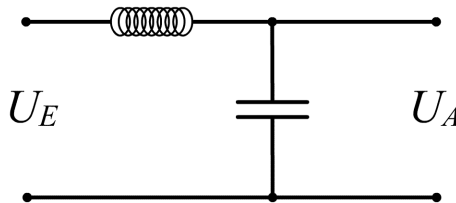


Abbildung 105: Tiefpass.

Bandpass

Ein **Bandpass** ist eine Kombination aus Hoch- und Tiefpass. Diese Schaltung hat bei der Resonanzfrequenz f_R einen besonders geringen Widerstand.

Anwendungsgebiete

Hoch- Band- und Tiefpass werden z.B. in der Tontechnik verwendet [Lautsprecher, Equalizer].

15.3 Versuchsdurchführung

15.3.1 Versuchsaufbau

Im ersten Versuchsteil wird aus Kondensator, Spule und ohm'schen Widerstand eine Reihenschaltung aufgebaut, an der per Oszilloskop und Multimeter an verschiedenen Stellen Strom, Spannung und Phasenverschiebung bestimmt werden kann. Zusätzlich lässt sich der Kondensator mit einem Schalter überbrücken. Es sollte auf die richtige Polung des Oszis geachtet werden.

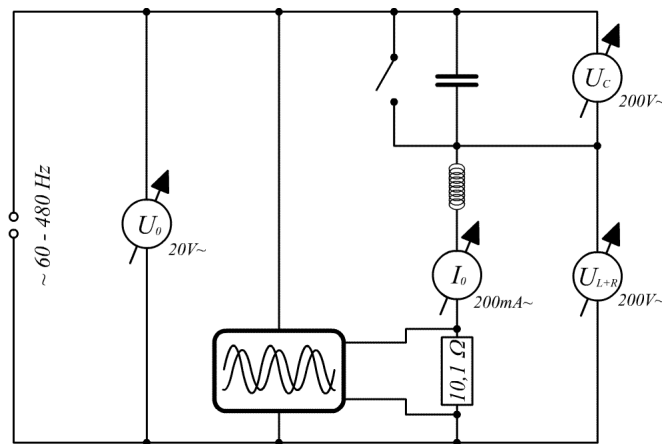


Abbildung 106: Versuchsaufbau.

15.3.2 Versuchsdurchführung

- (1) Zuerst wird der Kondensator überbrückt und der Gesamtstrom I_0 , die Gesamtspannung U_0 und die Phasenverschiebung ϕ werden bei verschiedenen angelegten Frequenzen f gemessen.
- (2) Nun wird der Schalter geöffnet und zusätzlich zu Gesamtstrom I_0 , Gesamtspannung U_0 und der Phasenverschiebung ϕ werden die Kondensatorspannung U_C sowie die Spannung an Spule und Widerstand U_{L+R} als Funktion der Frequenz bestimmt. Die Resonanzstelle ist besonders genau zu vermessen.
- (3) Nun baut man eine Parallelschaltung von Kondensator und Spule auf [ohne ohm'schen Widerstand].
- (4) Zu messen sind wieder für verschiedene Frequenzen [Resonanzstelle besonders genau]: Gesamtspannung U_0 und Gesamtstrom I_0 .
- (5) Abschließend sind noch einige Werte zu notieren bzw. zu messen: Innenwiderstand des Ampèremeters, Widerstand des ohm'schen Widerstandes R , ohm'scher Widerstand der Spule R_L , angegebene Spulendaten und Kapazität des Kondensators C_C .

15.4 Auswertung

15.4.1 Induktivität der Spule und Gesamtwiderstand

Nach Gleichung (15.2) gilt in einer Reihenschaltung mit ohm'schen Widerstand und Spule $Z = R + Z_L$. Setzt man Z_L aus Gleichung (15.1) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} Z_0 &= R + Z_L = R + i\omega L \\ \Rightarrow Z_0^2 &= \omega^2 L^2 + R^2 = mx + b. \end{aligned}$$

Trägt man nun das Quadrat der gesamten Impedanz $Z_0^2 = (U_0/I_0)^2$ gegen das Quadrat der Kreisfrequenz ω^2 auf, so gilt mit $\omega = 2\pi f$:

$$mx = \omega^2 L^2 \quad \Rightarrow \quad L^2 = \frac{mx}{\omega^2}.$$

Da wir gerade ω^2 auf der x-Achse aufgetragen haben, folgt

$$L = \sqrt{m}.$$

Nach dem Gesetz der Fehlerfortpflanzung ergibt sich σ_L zu

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma_m^2 \left(\frac{\partial L}{\partial m} \right)^2} = \frac{\sigma_m}{2\sqrt{m}}.$$

Für den Gesamtwiderstand R gilt

$$R^2 = b \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{b}$$

mit dem Fehler

$$\sigma_R = \frac{\sigma_b}{2\sqrt{b}}.$$

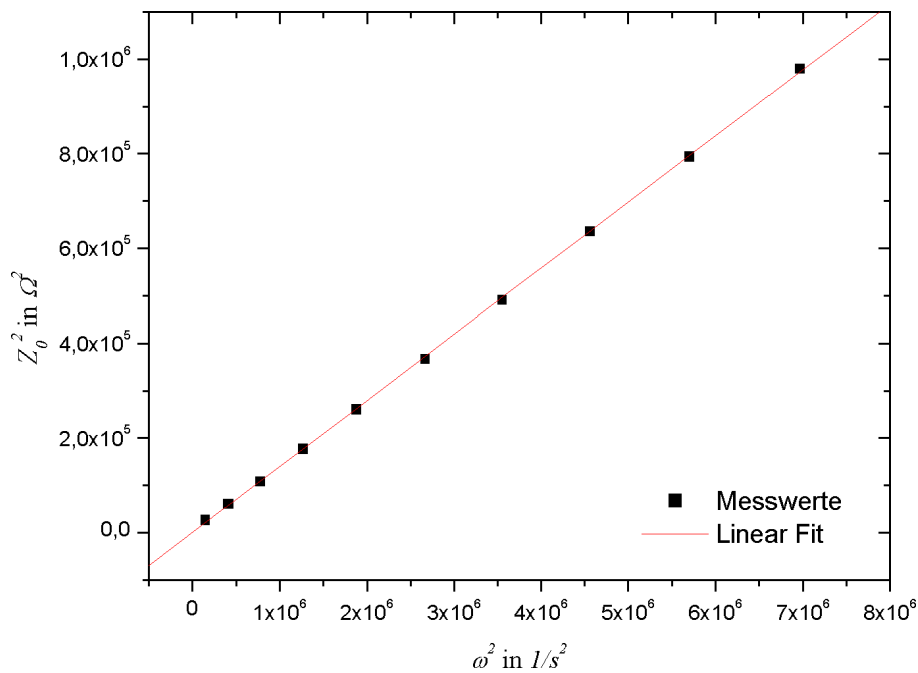


Abbildung 107: Induktivität und Gesamtwiderstand.

Aus der linearen Regression erhalten wir $m = 0,1396 H^2$ mit einem Fehler von $\sigma_m = 0,0007 H^2$ und $b = 127,14519 \Omega^2$ mit einem Fehler von $\sigma_b = 2326 \Omega^2$. Somit erhalten wir

$$L = 373,6 \pm 0,9 \text{ mH} \quad \text{und} \quad R = 11 \pm 103 \Omega.$$

15.4.2 Serienresonanzkreis

Resonanzfrequenz aus Impedanz

Tragen wir die gesamte Impedanz $Z_0 = U_0/I_0$ gegen die Kreisfrequenz ω auf, so können wir die Resonanzfrequenz ablesen. Dies ist der Punkt, wo die Impedanz ihr Minimum hat. Im Resonanzpunkt gilt auch $|Z| = Z_0 = R$.

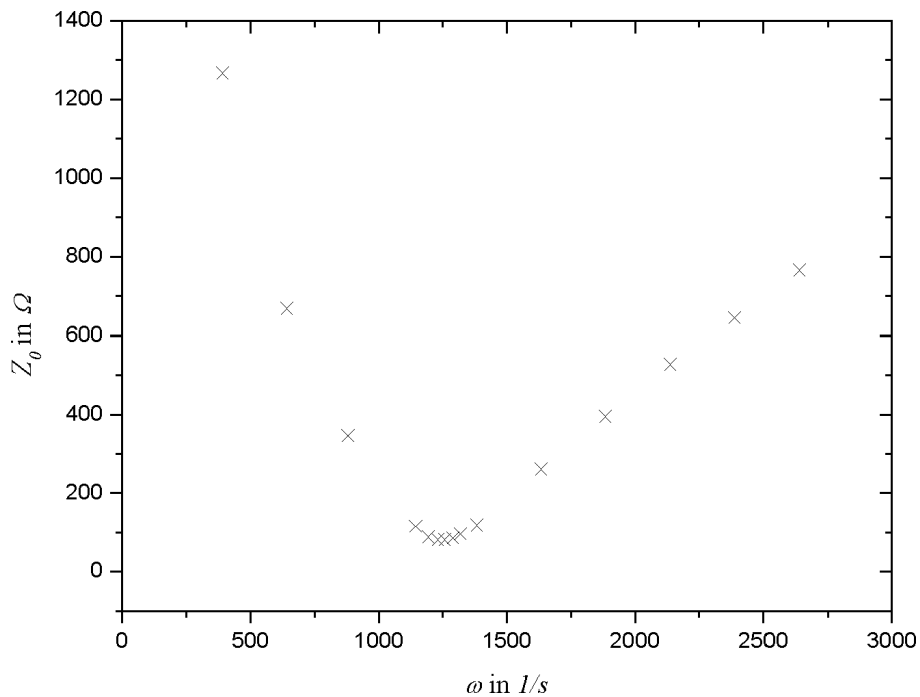


Abbildung 108: Resonanzfrequenz aus Impedanz.

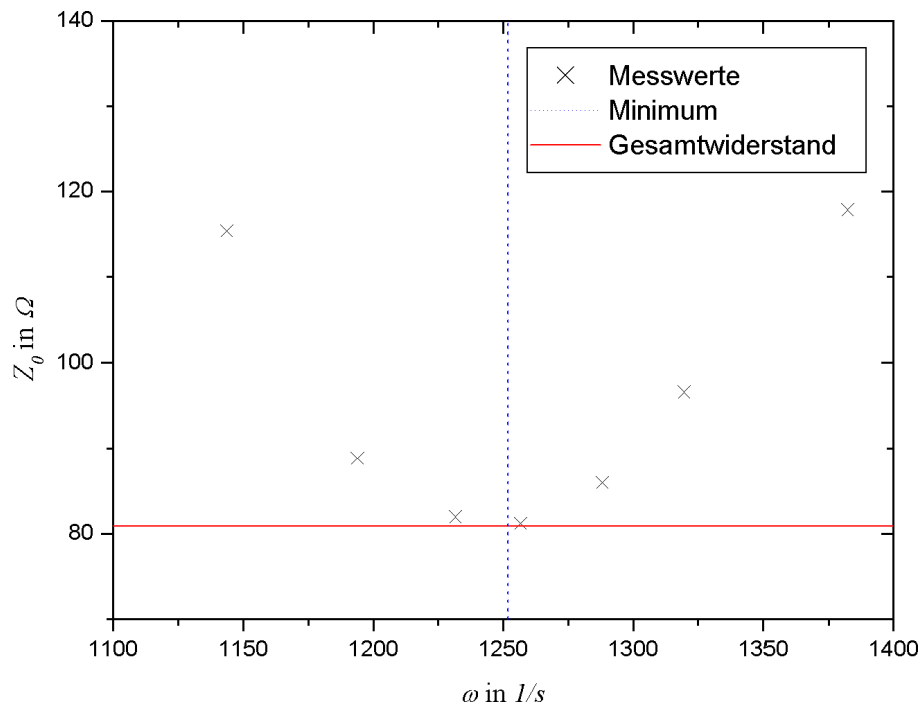


Abbildung 109: Ausschnitt aus Abbildung 108.

Wir haben die folgende Werte abgelesen:

$$\omega_R = 1260 \pm 20 \frac{1}{s} \quad \text{und} \quad R = 81 \pm 5 \Omega.$$

Resonanzfrequenz aus Phasenverschiebung

Eine Periode der Schwingung ist $T = 1/f$. Eine Phasenverschiebung von $\phi = x \text{ ms}$ entspricht also dem x/T -ten Teil einer Schwingung, somit gilt

$$\phi = 2\pi \frac{x}{T} = 2\pi x f.$$

Trägt man nun die Phasenverschiebung gegen die Frequenz auf [anders als in der Praktikumsanleitung beschrieben, aber so lässt sich die Resonanzfrequenz besser ablesen], so kann man die Resonanzfrequenz aus dem Graphen ablesen. Diese findet sich bei der Frequenz f , an welcher $\phi = 0$ gilt, also Strom und Spannung in Phase laufen.

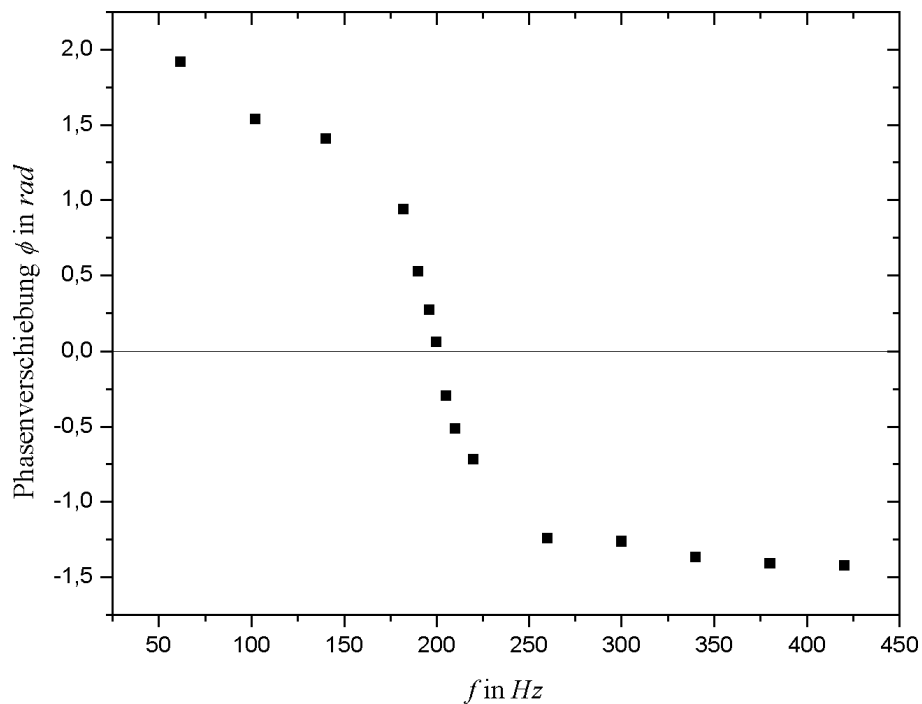


Abbildung 110: Resonanzfrequenz aus Phasenverschiebung.

Für die Resonanz lesen wir ab:

$$f_r = 202 \pm 1 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \omega_r = 1269 \pm 7 \frac{1}{s}.$$

Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse

Unsere Ergebnisse bisher:

$\omega_R \text{ [s}^{-1}\text{]}$	1269 ± 7
$L \text{ [mH]}$	$373,6 \pm 0,9$
$R_{\text{Gesamt}} \text{ [\Omega]}$	81 ± 5
$R_{\Omega} \text{ [\Omega]}$	$10,1$
$R_{\text{Multimeter}} \text{ [\Omega]}$	$1,3$

Da der Kondensator nur einen Blindwiderstand hat, gilt $R_C = 0 \Omega$. Nun gilt

$$R_{\text{Gesamt}} = R_L + R_{\Omega} + R_{\text{Multimeter}} \quad \Rightarrow \quad R_L = R_{\text{Gesamt}} - R_{\Omega} - R_{\text{Multimeter}}.$$

Wir erhalten $R_L = 69,6 \pm 5 \Omega$. Mit dem Multimeter maßen wir $64,9 \Omega$, somit liegt unser Fehlerbalken im gewünschten Bereich.

Um die Kapazität des Kondensators zu berechnen, stellen wir Gleichung (15.4) nach C um:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{L\omega_R^2}.$$

Der Fehler berechnet sich mit dem Gesetz der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_C = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L^2 \omega_R^2}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{\omega_R}}{L\omega_R^3}\right)^2}.$$

Wir erhalten

$$C = 1,66 \pm 0,02 \mu F.$$

Mit dem Multimeter maßen wir $C = 1,76 \mu F$.

Die Spannungen U_0 , U_C und U_{L+R} als Funktion von ω .

In der folgenden Graphik werden U_0 , U_C und U_{L+R} als Funktion von ω aufgetragen.

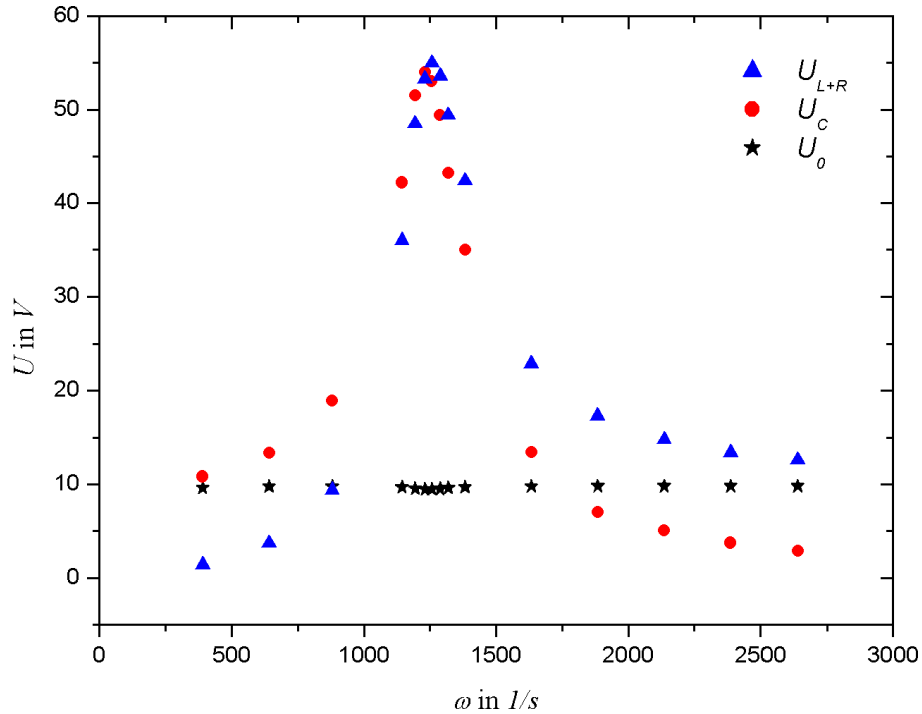


Abbildung 111: U_0 , U_C , und U_{L+R} als Funktion von ω .

Man erkennt, dass U_0 nahezu konstant bleibt, U_C und U_{L+R} dagegen ein Maximum nahe der Resonanzfrequenz haben.

Zeigerdiagramm

Im Resonanzfall gilt $|U_L| = |U_C|$. Für die Phasenverschiebung gilt

$$\sin \phi = \frac{U_L}{U_{L+R}} \quad \Rightarrow \quad \phi = \arcsin \left(\frac{U_L}{U_{L+R}} \right).$$

Außerdem gilt

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) = \frac{U_R}{U_{L+R}} \quad \Rightarrow \quad U_R = U_{L+R} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right).$$

Wir erhalten nahe der Resonanzfrequenz $[\omega \approx 1256 \text{ s}^{-1}]$ folgende Werte:

U_0 [V]	U_C [V]	U_{L+R} [V]	U_R [V]	I_0 [mA]	ϕ [°]
9,45	53	55	14,7	116,4	74,5

Nun können wir das Zeigerdiagramm für die Resonanzfrequenz zeichnen:

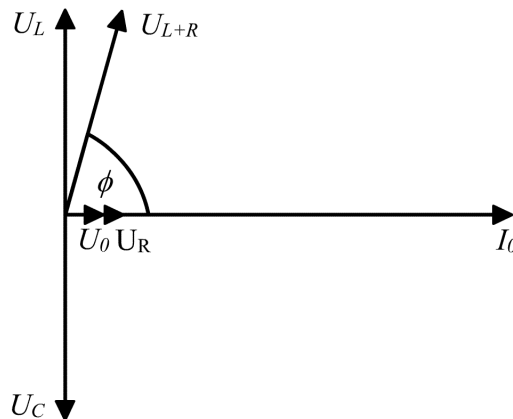


Abbildung 112: Zeigerdiagramm für die Resonanzfrequenz im Serienresonanzkreis.

Nun können wir den theoretischen Wert der Phasenverschiebung berechnen. Wir betrachten die Phasenverschiebung zwischen U_0 und U_{L+R} , also ist

$$Z = R + i\omega_R L \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(Z) = \omega_R L = X.$$

Mit $\phi = \arctan(X/R)$ [vergleiche Abbildung 102] und den theoretischen Werten $\omega_R = 1269 \pm 7 \text{ s}^{-1}$, $L = 373,6 \pm 0,9 \text{ mH}$ und $R = 10,1 \Omega$ erhalten wir

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega_R L}{R}\right) = 1,5495 \text{ rad},$$

welches einem Winkel von $\phi \approx 88,8^\circ$ entspricht. Wir verzichten an dieser Stelle auf die Fehlerrechnung, da wir im Rahmen des Blockpraktikums so viel mit Fehlern gerechnet haben und die Ableitungen die sich ergeben würden nur unter monströsem Aufwand in das von uns benutzte Tabellenkalkulationsprogramm eingepeist werden könnten. Wir schätzen darum einfach den Fehler auf $\sigma_\phi = 5^\circ$. Im Zeigerdiagramm erhielten wir einen Wert von $\phi = 74,5^\circ$. Hier verzichteten wir ebenfalls auf die Fehlerrechnung, doch passt $\sigma_\phi = 5^\circ$ hier ebenfalls ganz gut. Somit lassen sich der theoretische und der gemessene Wert fast in Einklang bringen.

15.4.3 Parallelkreis

Schon während dem Praktikum kamen uns unsere Werte etwas seltsam vor. Wir haben das Ampèremeter leider an der falschen Stelle angeschlossen. Somit haben wir nur den Strom gemessen, der über die Spule floss. Da unser Hiwi uns die Schaltung abgenommen hat und den Fehler nicht bemerkte, fühlen wir uns nicht total schlecht [;-)].

15.5 Diskussion

Eigene Kommentare

[Merkwürdiger Versuch mit Theorie, von der ich zuvor noch nie etwas gehört hatte.]_{Daniel}

[Eigentlich ein sehr schöner Versuch um ein bisschen mehr über die Funktionsweise des Oszilloskop herauszufinden. Ich hätte es schön gefunden, wäre der Hinweis im Praktikumsskript gegeben, das solch ein Gerät KEINEN Strom messen kann, sondern immer nur die Spannung misst. DANN hätte ich mir auch vor dem Versuch [wie im Skript vorgeschlagen] Gedanken darum gemacht, wie ich den Strom I_0 messen werde. Da das Thema in der Physik II Vorlesung nur sehr knapp behandelt und ihm kein einziger Übungszettel gewürdigt wurde, bin ich jedoch froh mit Hilfe des Versuches ein wenig über das Thema erfahren zu haben. Die Auswertung war ein wenig langwierig und bei manchen Aufgaben wusste man leider nicht so richtig welcher Sinn dahinter steckt.]_{Hauke}

16 Das Magnetometer

Versuch durchgeführt am 28. September 2005, Protokoll erarbeitet von Hauke Rohmeyer.

16.1 Einleitung

Ein Magnetometer ist eine Feldsonde für Magnetfelder. Mit dieser kann man die Stärke und die Richtung eines Magnetfeldes messen. In diesem Versuch soll das Magnetfeld von zwei Spulen sowie die Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes gemessen werden.

16.2 Theorie

16.2.1 Magnetismus

Magnetfelder werden von fließenden Strömen oder durch Permanentmagnete erzeugt. Permanentmagnete waren schon sehr früh bekannt, damals bezeichnete man **Magnete** als Stoffe die Eisen anzogen. Die Feldlinien eines Permanentmagnets können mit Eisenspänen „sichtbar“ gemacht werden. Ihr Verlauf ähnelt den Feldlinien zwischen positiven und negativen Ladungen eines Dipols, der Schluss auf magnetische „Ladungen“ ist jedoch falsch: wird ein Magnet geteilt, so entstehen zwei neue Magneten, d.h. dass es keine magnetischen Monopole gibt.

Nimmt man nun solch einen magnetischen Dipol, so kann man jedoch die **Polstärke** der Pole als p und $-p$ definieren. Die **Dipolachse** ist die Verbindungslinie zwischen den beiden Polen im Abstand l . Nun kann das **magnetische Dipolmoment** \vec{m} definiert werden. Es ist ein Vektor der in der Dipolachse liegt und zum Nordpol zeigt:

$$\vec{m} := p \cdot \vec{l}.$$

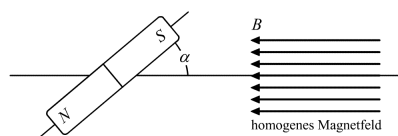


Abbildung 113: Drehmoment im homogenen Magnetfeld

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad |M| = m \cdot B \cdot \sin \alpha.$$

Das Drehmoment das auf einen magnetischen Dipol im homogenen Magnetfeld wirkt kann genutzt werden um das Dipolmoment bei bekannter Flussdichte oder die Flussdichte bei bekanntem Dipolmoment zu bestimmen. Eine Anwendung hiervon ist das Magnetometer, eine andere der Kompass. Hier dreht sich ein frei beweglicher Permanentmagnet solange, bis $\sin \alpha = 0$ [siehe Abbildung 113], also die Kompassnadel in die Richtung des Magnetfeldes zeigt.

Das **magnetische Feld** wird durch \vec{B} beschrieben, und kann durch das Gesetz von **Biot-Savart** oder durch das aus den Maxwell Gleichungen ableitbare **Ampèresche Gesetz** berechnet werden. Die zugehörige SI-Einheit ist **Tesla**. Es gilt

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2}.$$

Der **magnetische Fluss** Φ bezeichnet die Anzahl der Feldlinien durch eine gegebene Fläche A .

Magnetfeld eines langen Leiters

Ein stromdurchflossener Leiter ist von einem Magnetfeld umgeben. Wenn der Leiter lang [damit Randeffekte vernachlässigt werden können] und gerade ist, so bilden die Feldlinien konzentrische Ringe senkrecht zum Leiter. Man kann z.B. mit dem Ampereschen Durchflutungsgesetz die Stärke des Magnetfeldes ausrechnen. Es gilt

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r},$$

dabei ist r der Abstand zum Leiter. Das Magnetfeld ist also proportional zu I und nimmt mit $1/r$ ab.

Magnetfeld eines Kreisstroms

Das Magnetfeld in dem Mittelpunkt eines Kreisstromes beträgt

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I}{r}.$$

Magnetfeld einer Spule

Das Magnetfeld einer Spule mit N Windungen lässt sich über das Superpositionsprinzip berechnen. Das Feld setzt sich aus N Kreisströmen auf der Strecke l zusammen:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 N I}{l} = \mu_0 n I. \quad (16.1)$$

dabei gilt $n := \frac{N}{l}$.

16.2.2 Magnetometer

Ein Permanentmagnet ist an einem Torsionsfaden aufgehängt. An dem Faden befindet sich ein Spiegel [in unserem Versuchsaufbau ist der Spiegel direkt an dem Stabmagneten befestigt]. Diese Anordnung ist zum Schutz vor Lufterschütterungen in einer Plexiglashülle untergebracht. Der Torsionsfaden kann durch einen Drehteller mit Winkelanzeige verdreht werden, somit kann

ein Drehmoment auf den Stabmagneten ausgeübt werden, welches proportional zum Drehwinkel ist:

$$M_F = D \cdot \phi .$$

Über einen Lichtzeiger mit Skala kann der Drehwinkel α des Magneten bestimmt werden.

Die Gaußschen Hauptlagen

Ein Magnetometer kann in verschiedenen Orientierungen betrieben werden. Die wichtigsten sind die sogenannten **Gaußschen Hauptlagen**, die auch in unserem Versuch Verwendung finden.

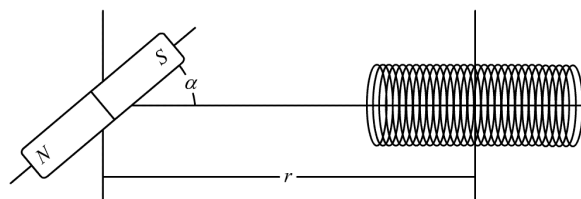


Abbildung 114: Erste Gaussche Hauptlage.

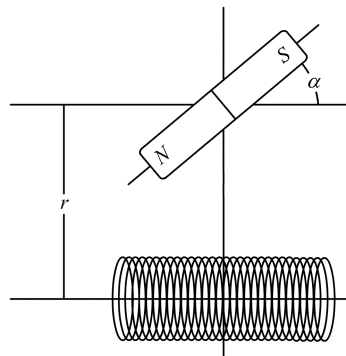


Abbildung 115: Zweite Gaussche Hauptlage.

Magnetfeld der Spule in der ersten Hauptlage

Der magnetische Fluss, der als integrale Größe über die Beziehung

$$\Phi = \int_A B \, da$$

definiert ist, verteilt sich für große Abstände r gleichmäßig über eine Kugeloberfläche. Daher kann man annehmen, dass

$$\Phi = BA \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\Phi}{A} = \frac{\Phi}{4\pi r^2}$$

gilt. Dabei ist r der Abstand vom Spulenmittelpunkt zum Magnetometer. Dies gilt betragsmäßig für beide Pole der Spule, die sich im Abstand $(r-l/2)$ und $(r+l/2)$ vom Magnetometer befinden. Die Richtungen der beiden Magnetfelder sind

natürlich einander entgegengesetzt. Das Magnetfeld am Ort des Magnetometers ergibt sich durch Superposition der Magnetfelder der Pole:

$$B = B_N - B_S = \frac{\Phi}{4\pi} \left(\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{rl}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}.$$

Das Magnetfeld innerhalb einer Spule wurde in 16.2.1.3 berechnet. Dieses tritt ebenfalls ausserhalb der Spule auf [auf die genaue Herleitung wird an dieser Stelle verzichtet]. Somit gilt mit B aus Gleichung (16.1) für den magnetischen Fluss

$$\Phi = BA = \mu_0 n I A = \mu_0 N A \frac{I}{l}.$$

Nun ist A die Querschnittsfläche der Spule, für die $A = \pi \varrho^2$ gilt, wobei ϱ der Radius der Spule ist. Setzt man Φ und A ein, so erhält man das Magnetfeld am Ort des Magnetometers:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\Phi}{2\pi} \frac{rl}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\mu_0 N \pi \varrho^2 I}{2\pi l} \frac{rl}{\left(r^4 - r^2 \frac{l^2}{2} + \frac{l^4}{16}\right)} \\ &= \mu_0 I \frac{N \varrho^2}{2r^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{l^2}{2r^2} + \frac{l^4}{16r^4}\right)}. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Diese Formel wird in der Auswertung gebraucht.

Magnetfeld der Spule in der zweiten Hauptlage

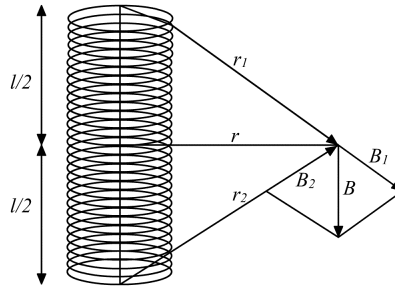


Abbildung 116: Skizze zur zweiten Hauptlage.

Wie in Abbildung 116 zu erkennen ist, gilt [mit der Ähnlichkeit von Dreiecken] folgende Relation:

$$\frac{|\vec{B}|}{2|\vec{B}_1|} = \frac{l}{2|\vec{r}_1|} \quad \Rightarrow \quad |\vec{B}| = |\vec{B}_1| \cdot \frac{l}{2|\vec{r}_1|}.$$

Nun gilt

$$|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2| = \frac{\mu_0 N I A}{l \cdot 4\pi |\vec{r}_{1,2}|^2}$$

und nach Pythagoras $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = \sqrt{r^2 + l^2/4}$. Somit folgt

$$B = \frac{\mu_0 N I A}{4\pi \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 N I A}{4\pi r^3 \left(1 + \frac{l^2}{4r^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

was sich mit $A = \pi \varrho^2$ und die für $r \gg l$ geltende Näherung $\frac{l^2}{4r^2} \approx 0$ vereinfacht zu

$$B = \frac{\mu_0 N I \varrho^2}{4r^3}. \quad (16.3)$$

Das Magnetfeld der Spule nimmt also in der zweiten Hauptlage mit $1/r^3$ ab. Dieses werden wir in Versuchsteil A verifizieren.

16.2.3 Die magnetische Feldstärke H

Die magnetische Flussdichte \vec{B} und die Feldstärke \vec{H} hängen wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B} & [\text{Im Vakuum}] \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu} \cdot \vec{B} & [\text{In Materie}] \end{aligned}$$

Dabei ist μ_0 die magnetische Feldkonstante und $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$ die Permeabilität der eingebrachten Materie. Oersted [Oe] ist die cgs-Einheit für die Feldstärke H . Die SI-Einheit ist A/m und es gilt die Umrechnung¹.

$$1 \text{ A/m} = 4\pi \cdot 10^{-3} = 0,012566 \text{ Oe} \quad (16.4)$$

16.2.4 Das Erdmagnetfeld

Der Südpol eines Kompasses zeigt nach Süden. Da sich gleichnamige Pole abstoßen und ungleichnamige Pole anziehen, befindet sich also nahe des geographischen Südpols der magnetische Nordpol.

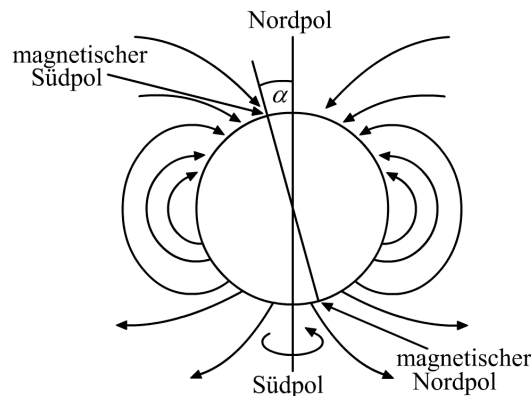


Abbildung 117: Erdmagnetfeld

Wie in Abbildung 117 zu sehen ist, hat das Magnetfeld der Erde an fast allen Orten auf der Erdoberfläche eine horizontale und eine vertikale Komponente. Da das Magnetometer nur in horizontaler Richtung frei beweglich ist, messen

¹ Nach http://de.wikipedia.org/wiki/Oersted_%28Einheit%29, aufgerufen am 07.09.2005

wir in unserem Versuch nur die horizontale Komponente des Erdmagnetfeldes. Um die vertikale Komponente des Erdmagnetfeldes zu messen, bedient man sich eines Inklinatoriums, welches in Abbildung 118 dargestellt ist.

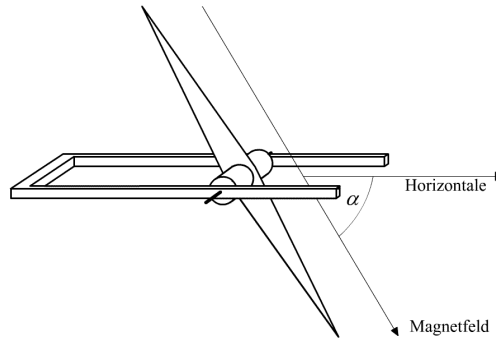


Abbildung 118: Inklinatorium.

Wichtige Begriffe zum Erdmagnetfeld

Die **Deklination** beschreibt die Abweichung der Richtung des Erdmagnetfeldes von der Nord-Süd Richtung, die **Inklination** den Winkel zwischen der Horizontalen und der Richtung des Erdmagnetfeldes.

Isogonen sind Linien, die Orte gleicher Deklination auf der Erdoberfläche verbinden, **Isoklinen** solche mit gleicher Inklination. Schließlich nennt man Linien die Orte mit gleicher Horizontalintensität verbinden **Isodynamen**.

Das Erdmagnetfeld in Göttingen

In Göttingen beträgt die Horizontalintensität $H_h = 0,189 \text{ Oe}$, die Deklination $2,6^\circ$ westlich und die Inklination $66,7^\circ$ Nord ².

Mit Gleichung (16.4) können wir nun die Horizontalintensität des Erdmagnetfeldes in der SI-Einheit angeben:

$$B_h = \mu_0 H = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{0,189}{4\pi \cdot 10^{-3}} \text{ T} = 18,9 \cdot 10^{-6} \text{ T} .$$

Um die Horizontalintensität genauer bestimmen zu können, müsste man noch die Permeabilität der Erde einbeziehen. Die Inklination beträgt in Göttingen $66,7^\circ$ und somit ergibt sich eine Vertikalkomponente von

$$B_v = \tan(66,7^\circ) \cdot B_h = 43,9 \cdot 10^{-6} \text{ T} .$$

16.3 Versuchsdurchführung

16.3.1 Teil A: Magnetfeld von Spulen

Die $1/r^3$ Abhängigkeit der Induktionsflussdichte B soll in der zweiten Hauptlage verifiziert werden.

² Nach P. Schaaf (2005): „Das Physikalische Praktikum“. Universitätsdrucke Göttingen

- (1) Die Spulendaten beider Spulen werden notiert [Länge, Durchmesser, Windungen].
- (2) Ohne Spulenfeld wird der Drehteller so eingestellt, dass der Dipolvektor des Stabmagneten senkrecht zur Spule steht. Die resultierende Nullage des Lichtzeigers wird auf der Skala markiert.
- (3) Der Drehteller wird um 5° gedreht. Nun wird der Spulenstrom I in Abhängigkeit von der Entfernung des Spulenmittelpunkts zum Magnetometer r bei beiden Spulen gemessen, der benötigt wird um den Stabmagneten und damit den Lichtzeiger wieder in die Ausgangslage zu bringen. Es muss hierbei auf die richtige Polung der Spule geachtet werden, eventuell muss umgepolt werden.

16.3.2 Teil B: Magnetfeld der Erde

Die Horizontalkomponente B_h des Erdmagnetfeldes in Göttingen wird durch den Vergleich mit dem Magnetfeld B_s einer langen Spule in der ersten Hauptlage bestimmt. Es wird die Stromstärke I ermittelt, die benötigt wird um diese beiden antiparallelen Magnetfelder am Ort des Magnetometers zu kompensieren. Es muss darauf geachtet werden die Spule richtig zu polen. Sonst wird man das Erdmagnetfeld verstärken und nicht abschwächen.

- (1) Mit einem Kompass wird die Spule parallel zum Erdmagnetfeld ausgerichtet. Das Magnetometer wird in der ersten Hauptlage im Abstand von etwa $r = 75\text{ cm}$ von der Spulenmitte so aufgestellt, dass der Südpol des Permanentmagneten nach Süden zeigt. Nun wird das Plexiglasgehäuse gedreht bis zwei der Strichmarkierungen des Gehäuses auf der verlängerten Achse des Permanentmagneten liegen [$\alpha = 180^\circ$ in Abbildung 114].
- (2) Der obere Drehteller wird nun so gedreht, dass der Permanentmagnet mit den 90° versetzten Strichen auf einer Linie liegt. Diese Lage wird mit dem Lichtzeiger auf der Skala markiert. Nun wird der Drehteller auf die ursprüngliche Nord-Süd-Ausrichtung zurückgedreht und der Wert des Drehtellers notiert [ϕ_0].
- (3) Die beiden Drehmomente Φ_l und Φ_r werden ohne Spulenfeld gemessen, die für eine Drehung des Permanentmagneten um 90° nach links und rechts notwendig sind. Hierzu wird der obere Drehteller solange nach links oder nach rechts gedreht, bis der Lichtzeiger wieder auf der Nullage zu ruhen kommt. Die beiden Drehmomente sollten betragsmäßig gleich sein. Weichen sie um mehr als 5° voneinander ab, muss die Stellung des Magnetometers und des Stabmagneten korrigiert werden.
- (4) Die Drehmomente Φ_l und Φ_r werden wie in (3), nur diesmal mit verschiedenen Spulenströmen gemessen. Die Stellung von Magnetometer und Spule werden nicht mehr korrigiert. Es sollten Spulenströme zwischen 0 und 800 mA in einer Schrittweite von 50 mA benutzt werden.

16.4 Auswertung

16.4.1 Teil A: Magnetfeld von Spulen

Theoretisch gilt

$$\phi/(NIA) \sim 1/r^3,$$

dabei ist $\phi = 5^\circ$ der Drehwinkel des Drehtellers, N die Windungszahl der Spule, A die Fläche der Spule, I der Spulenstrom und r der Abstand vom Spulenmittelpunkt zum Magnetometer. Um den Exponenten aus Gleichung (16.3) bestimmen zu können, tragen wir $\phi/(NAI)$ gegen r in doppelt logarithmischem Maßstab auf, und führen wir eine lineare Regression durch. Die erhaltene Gerade hat die Funktion

$$\begin{aligned} \ln(y) &= m \cdot \ln(r) + \ln(c) \\ &= \ln(r^m) + \ln(c) \end{aligned}$$

und damit folgt

$$y = r^m + c \quad \Rightarrow \quad y \sim r^m.$$

Die Steigung der Regressionsgerade gibt uns also den Exponenten aus Gleichung (16.3) an.

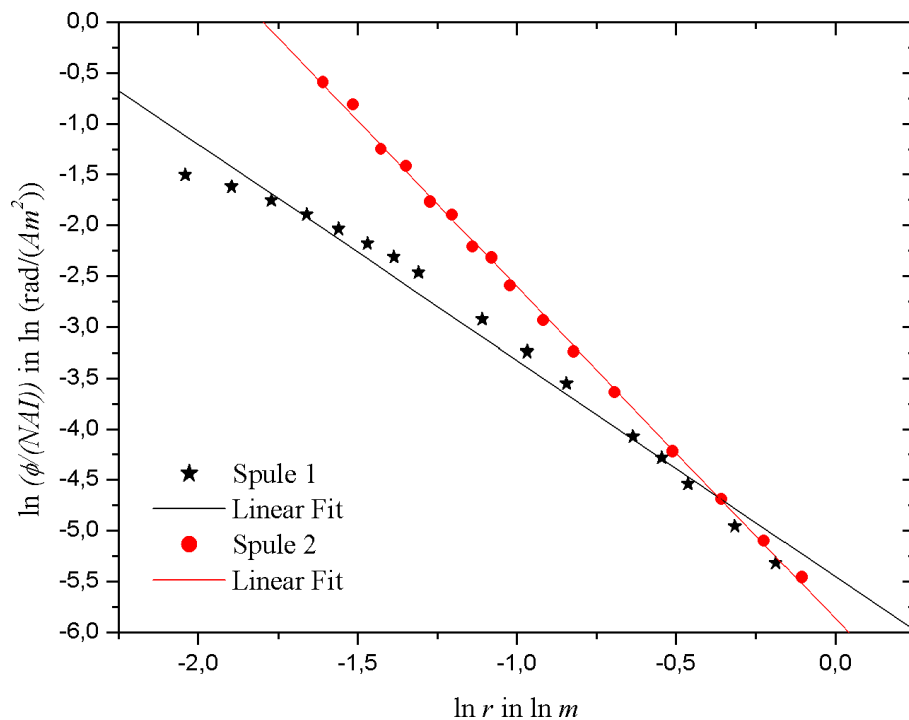


Abbildung 119: Spulenmittelpunkt - Magnetometer.

Wir erhalten $m_{r_1} = -2,13 \pm 0,09$ für Spule 1 [$N = 6690$, $A = 0,00709 \text{ m}^2$] und $m_{r_2} = -3,26 \pm 0,04$ für Spule 2 [$N = 1500$, $A = 0,03631 \text{ m}^2$].

Nun tragen wir $\phi/(NAI)$ gegen R in doppelt logarithmischem Maßstab auf,

wobei R der Abstand vom Spulenende zum Magnetometer ist. Für R gilt nach Pythagoras

$$R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2},$$

dabei ist l die Länge der Spule. Wieder können wir einer lineare Regression durchführen und den Exponenten aus Gleichung (16.3) bestimmen.

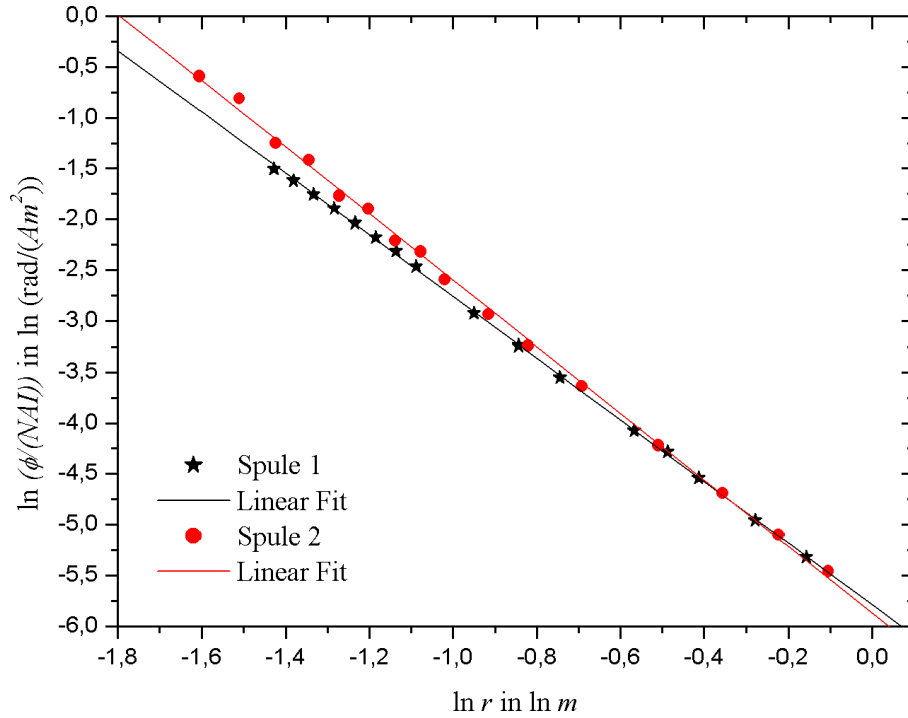


Abbildung 120: Spulenende - Magnetometer.

Wir erhalten $m_{R_1} = -3,02 \pm 0,02$ für Spule 1 [$l = 0,403 \text{ m}$] und $m_{R_2} = -3,27 \pm 0,04$ für Spule 2 [$l = 0,036 \text{ m}$]. Berechnen wir den gewichteten Mittelwert, erhalten wir $-3,07 \pm 0,02$. Theoretisch sollten wir $m = -3$ erhalten. Ein erstaunlich gutes Ergebnis dafür, dass wir in Abbildung 119 sehen, wohl bei der Berechnung des Spulenfeldes einige Annäherungen gemacht wurden.

16.4.2 Teil B: Erdmagnetfeld

Es sei im Voraus zu sagen, dass wir in dieser Messung sicherlich nicht das Erdmagnetfeld gemessen haben. Die Kompassnadel zeigte definitiv nicht nach Norden. So haben wir wohl eher das Magnetfeld des Stromkastens in Überlagerung mit dem Erdmagnetfeld oder Ähnliches gemessen.

Das Magnetfeld der Erde wird mit dem Magnetfeld einer Spule überlagert. Dadurch wird das Erdmagnetfeld abgeschwächt und somit das Drehmoment, welches man aufbringen muss, um den Stabmagneten aus der Nord-Süd Ausrichtung um 90° zu drehen, geringer. Das Magnetfeld der Spule wird durch den Spulenstrom verursacht. Nun trägt man den Strom gegen den benötigten

Drehwinkel auf. Um den Drehwinkel zu bestimmen, mittelt man die beiden Drehwinkel ϕ_l und ϕ_r :

$$\phi = \frac{\phi_l + \phi_r}{2}.$$

Ist der benötigte Drehwinkel $\phi = 90^\circ$, so wurde das Erdmagnetfeld komplett überlagert, das heißt dass das resultierende Magnetfeld am Ort des Magnetometers verschwindet. Mit einer linearen Regression kann man diesen Wert bestimmen. Berechnet man nun das erzeugte Magnetfeld der Spule am Ort des Magnetometers, so hat man ein Äquivalent für das Erdmagnetfeld am Ort des Magnetometers.

Leider haben wir unsere Spule falsch gepolt, und so haben wir das Magnetfeld der „Erde“ verstärkt und nicht geschwächt. Man kann allerdings im Grunde die gleiche Überlegung durchführen: Durch lineare Regression können wir den Punkt ermitteln, wo wir bei richtiger Polung das „Erdmagnetfeld“ überlagert hätten. Natürlich wird unser Ergebnis dadurch sehr ungenau.

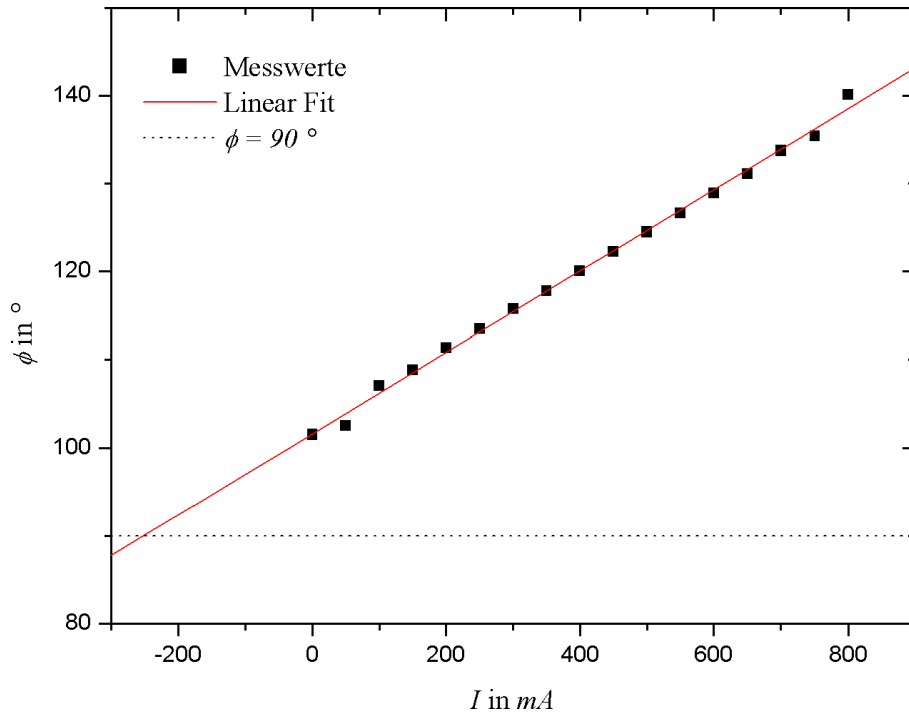


Abbildung 121: Überlagerung von „Erd-“ und Spulenmagnetfeld.

Am Schnittpunkt der Regressionsgeraden mit $\phi = 90^\circ$ gilt

$$90^\circ = m \cdot x + b \quad \Rightarrow \quad I_S = x = \frac{90 - b}{m}.$$

Für den Fehler gilt

$$\sigma_{I_S} = \sqrt{\sigma_m^2 \left(\frac{90 - b}{m^2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{m} \right)^2}.$$

Wir erhielten $m = 0,04617 \pm 0,00069^\circ / mA$ und $b = 101,60294 \pm 0,32022^\circ$. Somit erhalten wir einen Spulenstrom von $I_S = -251,3 \pm 7,9 mA$. Mit Gleichung (16.2) können wir nun das Magnetfeld der Spule am Ort des Magnetometers ausrechnen, welches dem Magnetfeld der „Erde“ am Ort des Magnetometers entspricht. Mit den Spulendaten $N = 6690$, $\rho = 0,0475 m$, $L = 0,403 m$ und dem Abstand $R = 0,75 m$ zwischen Spulenmittelpunkt und Magnetometer erhalten wir somit

$$B_H = 6,6 \cdot 10^{-6} T.$$

Die Spulendaten nehmen wir als exakt an, den Fehler für R vernachlässigen wir. Somit ergibt sich der Fehler zu

$$\sigma_{B_H} = \sigma_{I_S} \frac{B}{I_S} = 0,3 \cdot 10^{-6} T.$$

Unser theoretisch errechneter Wert lag bei $18,9 \cdot 10^{-6} T$. Wir sind mit unserem Wert sehr zufrieden. Da wir unsere Spule nicht einmal in Nord-Süd Richtung ausgerichtet haben, ist es ein Wunder, dass unser Wert sogar in der richtigen Größenordnung liegt.

16.5 Diskussion

16.5.1 Eigene Kommentare

[Toll, 'n Magnetometer. Toll, 'n Magnetfeld von 'na Spule ausmessen. Und das tolle Erdmagnetfeld: wir nehmen an, Norden ist im Osten. Blödsinn, das mal 'n Versuch, der rausgenommen werden kann, dafür lieber Messung großer Widerstände auf zwei Versuche aufteilen...]_{Daniel}

[Gut. Nachdenken sollte man vor den Versuchen schon. Aber bei einer so wirren Praktikumsanleitung kann man ja schon froh sein, wenn man überhaupt ungefähr versteht, was man zu tun hat. Ich finde es sehr ärgerlich, dass wir die Spule falsch gepolt haben. Auch wenn Herr Schaaf der Meinung ist, dass der Lerneffekt verloren geht, wenn er solche Sachen ins Skript übernimmt, finde ich, dass er es ruhig tun darf. Natürlich haben wir so auch ein bisschen was gelernt, aber die Freude über ein gutes Ergebnis blieb heute leider aus.]_{Hauke}

17 Ferromagnetismus

Versuch durchgeführt am 29. September 2005, Protokoll erarbeitet von Daniel Scholz.

17.1 Einleitung

In diesem Versuch werden wir die magnetischen Eigenschaften ferromagnetischer Stoffe kennenlernen, wir untersuchen dazu ein Eisenstück.

Ferromagnetismus spielt in vielen technischen Anwendungen eine wichtige Rolle und wird zum Beispiel bei Festplatten von Computern und bei Permanentmagneten verwendet.

17.2 Theorie

17.2.1 Magnetismus und Bohrsches Magneton

Es gibt drei wichtige Arten von Magnetismus: Dia- und Paramagnetismus [siehe Versuch 19] sowie den **Ferromagnetismus**. Diamagnetische Stoffe werden von einem Magnetfeld abgestoßen und paramagnetische Stoffe werden in ein angelegtes Magnetfeld hineingezogen. Als ferromagnetisch bezeichnet man diejenigen Stoffe, die einem Magnetfeld ausgesetzt wurden und nach Abschalten dessen eine Restmagnetisierung beibehalten. Der Magnetismus mancher Stoffe hängt mit dem magnetischen Moment der Atome eines Stoffes zusammen. Dieses magnetische Moment kann mit dem **Bohrschen Atommodell** erklärt werden. Demnach bewegen sich die Elektronen auf Kreisbahnen mit dem Radius r mit einer Geschwindigkeit v um den Atomkern und haben noch einen Spin [Drehung der Elektronen um ihre eigene Achse] um ihre eigene Achse. Diese Bewegung kann man als Kreisstrom auffassen. Der Drehimpuls L des gesamten Systems gehorcht dann der Bedingung

$$L = mvr,$$

wobei wir für das Wasserstoffatom $\hbar := L$ setzen. Somit kommen die Elektronen $k = v/2\pi r$ mal pro Sekunde an jedem Punkt ihrer Bahn vorbei und stellen damit einen Strom der Stärke

$$I = e \cdot k = \frac{e \cdot v}{2\pi r}$$

da, wobei $e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ die Elektronenladung ist. Es ergibt sich demnach das magnetische Moment p_m , welches als **Bohrsches Magneton** bezeichnet

wird:

$$\mu_B := p_m = \text{Strom} \cdot \text{Fläche} = \frac{evr}{2} = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.2742 \cdot 10^{-24} \frac{Jm^2}{Vs}.$$

Der Gesamtimpuls und somit das Gesamtmoment nimmt mit der Hauptquantenzahl n auch um das n faches zu, es gilt dann

$$p_m = n \cdot \mu_B.$$

Durch den Spin erzeugen die Elektronen natürlich auch ein kleines magnetisches Moment, welches hier aber nicht weiter betrachtet werden soll.

17.2.2 Ferromagnetismus

Für jeden Stoff lässt sich die magnetische Suszeptibilität χ bestimmen, die im Falle von Para- und Ferromagnetismus größer als Null und temperaturabhängig ist. Der Wert dieser Konstante hängt auch von der Vorgeschichte des jeweiligen Stoffes ab [siehe unten].

Ferromagnetismus ist nun eine besondere Form des Paramagnetismus. Ferromagnetische Stoffe haben keine aufgefüllten inneren Atomschalen und besitzen einen besonders großen Wert für χ , dies ist zum Beispiel bei Eisen der Fall, daher stammt auch der Name [lat. Eisen = Ferro].

Für die Magnetisierung M gilt zunächst

$$M = \chi H,$$

dabei ist H die magnetische Erregung. Für die magnetische Kraftflussdichte B gilt

$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0(\chi + 1)H = \mu_0\mu_r H,$$

dabei ist $\mu_r = \chi + 1$ die relative Permeabilität, welche bei ferromagnetischen Stoffen nun temperaturabhängig ist.

Curie-Temperatur

T_C ist die materialspezifische Curie-Temperatur, bei dessen Überschreitung ein ferromagnetischer Stoff wieder paramagnetisch wird. Es gilt [analog zum Curie-Gesetz $\chi = C/T$ beim Paramagnetismus] die Beziehung

$$\chi(T) = \frac{C}{T - T_C},$$

welche **Weiss-Gesetz** genannt wird. Dabei ist C die materialabhängige Curie-Konstante.

Weiss Bezirke

Vom Weiss-Gesetz ausgehend kann man sich nun die Bedeutung der **Weiss-Bezirke** verdeutlichen. Die Ordnung und Ausrichtung der Elementarmomente durch ein äußeres Feld ist aufgrund der thermischen Bewegung in vielen paramagnetischen Stoffen nur bedingt in sehr kleinem Maße möglich. Bei ferromagnetischen Stoffen ist das bis zur Curie-Temperatur nicht der Fall. Es bilden

sich Weiss-Berike aus, welche die Gebiete sind, die parallel ausgerichtete magnetische Momente besitzen. Die Momente aller Weiss-Bezirke kompensieren sich jedoch zu Null. Legt man aber ein äußeres Feld an, so wachsen die Bezirke, die in Richtung des Feldes zeigen, auf Kosten der anderen Bezirke. Die dabei stattfindende Bewegung der Trennwände [**Bloch-Wände**] zwischen den Bezirken, kann man mit der **Bitter-Methode** sichtbar machen.

Bei der Bitter-Methode beschichtet man die Oberfläche des Materials mit einer Suspension kolloidaler ferromagnetischer Teilchen, welche sich an den Bloch-Wänden absetzen und diese als Bitter-Streifen markieren.

Remanente Magnetisierung und Brakhauseneffekt

Durch Fremdatome in dem Kristallgitter des ferromagnetischen Stoffes kann die durch das äußere Feld bewirkte Verschiebung der Bloch-Wände zeitweise aufgehalten werden. Wird der Druck der Wände jedoch groß genug um das Fremdatom zu überwinden, so klappen die Wände schlagartig um. Dies nennt man **Brakhauseneffekt**. Dabei wird abrupt die Magnetisierung M und damit der magnetische Fluß B der felderzeugenden Spule geändert. Diese Änderung bewirkt ein Knackgeräusch, welches mit Hilfe eines Mikrofons am Spulenende verstärkt und somit hörbar gemacht werden kann. Wird das angelegte Feld wieder abgesenkt, so gehen die reversibel verschobenen Wände wieder auf ihre ursprünglich Position, die irreversibel verschobenen jedoch nicht. Daraus folgt eine **remanente Magnetisierung** M_R des Stoffes.

Magnetisch harte und weiche Stoffe

Die Wandverschiebungen an den Fremdatomen sind auch für die **Remanenz**, also die verbleibende Magnetisierung nach Abstellen des äußeren Feldes, verantwortlich. Dies liegt daran, dass es wieder einer gewissen äußeren Feldstärke anderer Polarität bedarf [auch **Koerzitivfeldstärke** genannt], um solche Verschiebungen rückgängig zu machen.

Sind viele Fremdatome in einem Gitter eines Stoffes enthalten, wie zum Beispiel bei hochlegierten Eisenarten, so ist ihre Remanenz sehr hoch. Man nennt diese Stoffe **magnetisch hart**. Sind eher wenig Fremdatome enthalten, spricht man von **magnetisch weichen** Stoffen. Ihre Remanenz ist gering.

Hystereseschleife

Trägt man die Stärke des B -Feldes gegen das äußere H -Feld auf, wie in der folgenden Abbildung 122, so bekommt man eine anschauliche Darstellung von den für ferromagnetische Stoffe charakteristischen Eigenschaften wie Remanenz, Koerzitivfeldstärke und Sättigungsmagnetisierung.

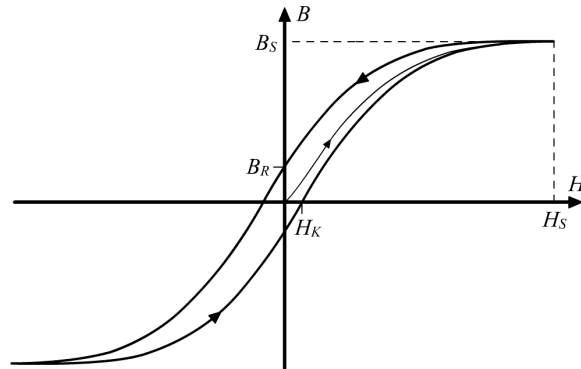


Abbildung 122: Beispiel einer Hystereseschleife.

Für die Relation von magnetischer Flussdichte B und Feldstärke H gilt

$$B = \mu_0 \mu_r H,$$

wobei μ_r bei ferromagnetischen Materialien von der Temperatur und von der Stärke des äußeren Feldes abhängt.

Daher ist die Steigung für kleine Werte des H -Feldes ziemlich groß, da μ_r relativ groß ist. Für größer werdende Werte des H -Feldes stellt sich dann jedoch ein Sättigungsverhalten ein und μ_r konvergiert gegen 1. Im Sättigungsbereich verschwindet somit die Steigung und es gilt dann $B = \mu_0 H$. Schwächt sich das äußere Magnetfeld wieder ab, so macht sich die Remanenz bemerkbar. Die Abhängigkeit der Flussdichte von der Feldstärke bleibt zwar die gleiche, ist aber durch die Remanenz etwas entlang der Abszisse verschoben, sodass sich an dem Ordinatenabschnitt die Remanenzflussdichte B_R und am Abszissenabschnitt die koerzitive Feldstärke H_K ablesen lassen.

Magnetisch harte Materialien haben eine breite Hystereseschleife, magnetisch weiche hingegen eine schmale. Die eingeschlossene Fläche gibt gerade die Energie an, die bei jedem Ummagnetisierungszyklus aufgebracht werden muss.

17.2.3 Anzahl der ausgerichteten Elektronen pro Atomkern

Kennt man nun die Sättigungsmagnetisierung B_S , so lässt sich daraus die Anzahl der Elektronen berechnen, die durchschnittlich pro Eisenkern ausgerichtet werden.

Die Magnetisierung ist definiert als die Anzahl der magnetischen Dipole pro Volumen V . Hat man also n Atome welche a ausgelenkte Elektronen besitzen, die wiederum jeweils ein magnetisches Moment von μ_B [dem Bohr'schen Magneton] haben, so erhält man für die Magnetisierung

$$M = \frac{an\mu_B}{V}.$$

Für ein Mol eines Stoffes, also für $n = N_A$, hat man $V = M_{N_A}/\varrho$, dabei ist N_A die Avogadrozahl, M_{N_A} die Molmasse und ϱ die Dichte des Stoffes. Damit ergibt sich

$$M = \frac{aN_A\mu_B\varrho}{M_{N_A}} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{M_{N_A} \cdot M}{N_A\mu_B\varrho}. \quad (17.1)$$

Nach dieser Gleichung lässt sich also die Anzahl der ausgerichteten Elektronen pro Atomkern berechnen, wenn man die Dichte ϱ sowie die Molmasse M_{N_A} des Stoffes kennt und die Beziehung

$$M = M_S = \chi H = \frac{B_S}{\mu_0}$$

für die Magnetisierung M verwendet. Dies wird in der Auswertung der Fall sein.

17.3 Versuchsdurchführung

Vor Beginn der Messreihe muss einige Mal die Hystereseschleife des zu untersuchenden Eisenstücks durchlaufen werden, um die Vorgeschichte des Materials zu definieren.

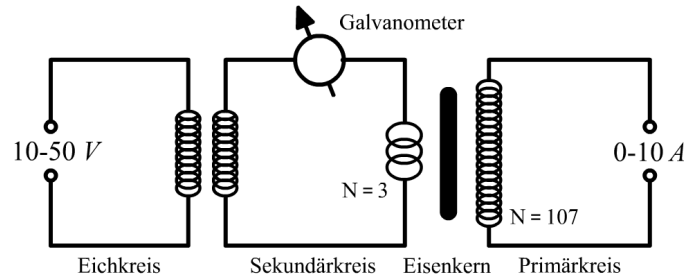


Abbildung 123: Vereinfachter Versuchsaufbau.

Danach wird der Strom in der felderzeugenden Spule und somit die Magnetisierung des Eisenkerns schrittweise erhöht und jeweils die Ausschläge des Galvanometers im Messprotokoll notiert. Das Galvanometer ist dadurch zu eichen, dass ein Ausschlag mit unterschiedlichen Spannungen erzeugt wird.

17.4 Auswertung

17.4.1 Bestimmung der Eichkonstanten

Es gilt wieder die Proportionalität

$$\varphi \sim Q = \int I dt,$$

dabei ist φ die Auslenkung und Q die geflossene Ladung. Somit folgt auch die lineare Abhängigkeit

$$\varphi = m \cdot \int I dt,$$

dabei ist m die zu ermittelnde Eichkonstante.

Durch Auftragung der gemessenen Auslenkungen in Abhängigkeit der Stromstärke erhalten wir nach linearer Regression die gesuchte Eichkonstante m aus der Steigung dieser Geraden.

Wir erhielten das Ergebnis

$$m = 88.810 \pm 0.584 \frac{Skt}{A}.$$

17.4.2 Berechnung des H -Feldes

Das erzeugte H -Feld lässt sich über die angelegte Stromstärke I nach der Formel

$$H = \frac{N \cdot I}{L}$$

berechnen, dabei ist $N = 107$ die Windungszahl und L die Länge der Spule um den Eisenkern [siehe Versuch 14: Magnetfeld von Spulen]. Da es sich um eine Ringspule handelt, kann die Länge L aus dem Durchmesser D berechnet werden. Es ist $D = 0.138\text{ m}$ und somit gilt für die Länge

$$L = \pi D = 0.4335\text{ m}.$$

Demnach lässt sich das H -Feld für jede verwendete Stromstärke berechnen.

17.4.3 Berechnung des B -Feldes

Für den magnetischen Fluss Φ durch die sich mit dem Galvanometer im Sekundärkreis befindende Spule gilt

$$\Phi = N \cdot B \cdot A,$$

dabei ist $N = 200$ die Windungszahl und $A = 0.0143\text{ m}^2$ die Fläche der Spule, die sich im Sekundärkreis befindet und von dem Magnetfeld B durchsetzt wird. Da der Ausschlag bei einem ballistischen Galvanometer immer proportional zur geflossenen Ladung ist, gilt nach dem Induktionsgesetz für die nun gesuchte Konstante k gerade

$$\varphi = k \cdot \int U \, dt = k \cdot \Phi = k \cdot N \cdot B \cdot A. \quad (17.2)$$

Es soll nun die Konstante k durch die Eichkonstante m beschrieben werden.

Es sei B_1 die wirkende magnetische Flussdichte, welche aus den Daten der verwendeten Spule berechnet werden kann [siehe Versuch 14: Magnetfeld von Spulen]. Es gilt

$$B_1 = \mu_0 \cdot \frac{N_1 \cdot I_1}{L_1}$$

dabei ist I_1 die Stromstärke und wir verwendeten eine Spule mit $N_1 = 2800$ Windungen und einer Länge L_1 von 1 m . Durch Auflösen von Gleichung (17.2) nach k erhalten wir nun

$$\begin{aligned} k &= \frac{\varphi}{N \cdot B_1 \cdot A} = \frac{\varphi \cdot L_1}{N \cdot \mu_0 \cdot N_1 \cdot I_1 \cdot A} \\ &= \frac{L_1}{N \cdot \mu_0 \cdot N_1 \cdot A} \cdot \frac{\varphi}{I_1} = \frac{L_1}{N \cdot \mu_0 \cdot N_1 \cdot A} \cdot m. \end{aligned}$$

Dabei ist m die Eichkonstante des Galvanometers, alle anderen Daten wurden bereits genannt. Somit erhalten wir nun

$$k = 8816 \pm 58 \frac{\text{Skt}}{\text{Vs}},$$

der Fehler ergibt sich aus dem Fehler von m . Formen wir nun umgekehrt Gleichung (17.2) nach der Unbekannten B um, so erhalten wir

$$B = \Delta B = \frac{\varphi}{k \cdot N \cdot A}.$$

Mit der Spule von $N = 3$ Windungen und einer Querschnittsfläche des Ringkerns von $A = 0.000301 \text{ m}^2$ lässt sich damit aus jedem Zeigerausschlag φ die Änderung des B -Feldes berechnen.

Jeder Zeigerausschlag beschreibt also die Änderung der Kraftflussdichte B bezogen auf die Änderung der verwendeten Stromstärke.

17.4.4 Die Hystereseschleife

Es wurde nun zu jedem Wertepaar (I, φ) das H - sowie das B -Feld berechnet und diese beiden Größen wurden anschließend gegeneinander aufgetragen, um die Hystereseschleife zu erhalten [siehe Abbildung 124].

Der Verlauf der Schleife ist zwar wie erwartet, jedoch sind die Werte für das B -Feld alle zu groß. Dies entstand dadurch, dass wir jeweils nur die Änderungen des B -Feldes berechnen konnten und somit nicht wissen, mit welchem Anfangswert der Kraftflussdichte wir unsere Messung begonnen hatten. Um aus der Abbildung nun die Sättigungsmagnetisierung B_S , die Koerzitivfeldstärke H_K und die Remanenz B_R wie in der Theorie beschrieben abzulesen, haben wir den Mittelpunkt der Schleife in den Ursprung gelegt, um die gewünschte Symmetrie zu erhalten.

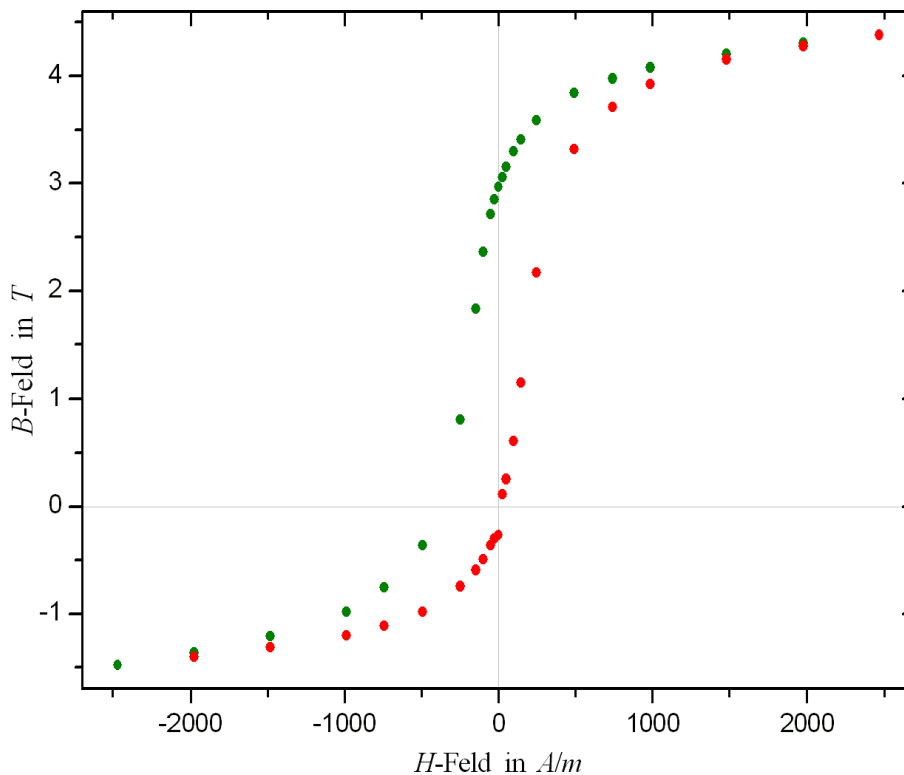


Abbildung 124: Unsere berechnete Hystereseschleife.

Wir ermittelten die folgende Werte:

$$\begin{aligned} B_S &= 2.75 \pm 0.1 \text{ T}, \\ H_K &= 180 \pm 40 \text{ A/m}, \\ B_R &= 1.65 \pm 0.1 \text{ T}. \end{aligned}$$

17.4.5 Anzahl der ausgelenkten Elektronen

Die Anzahl der ausgelenkten Elektronen pro Eisenkern soll nun nach Gleichung (17.1) bestimmt werden.

Die Magnetisierung erhalten wir aus

$$M = \frac{B_S}{\mu_0} = 2188380 \pm 79577 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

die Molmasse von Eisen beträgt $M_{Fe} = 0.05585 \text{ kg}$ und die Dichte von Eisen ist $\varrho_{Fe} = 7850 \text{ kg/m}^3$. Mit der Avogadrozahl¹ von $6.0221 \cdot 10^{23}$ und dem Bohrschen Magneton $\mu_B = 9.2742 \cdot 10^{-24} \text{ Jm}^2/\text{Vs}$ werden bei uns also

$$a = \frac{M_{Fe} M}{N_A \mu_B \varrho_{Fe}} = 2.79 \pm 0.10$$

Elektronen pro Eisenkern ausgelenkt. Der Literaturwert für das atomare magnetische Moment von Eisen² beträgt $a = 2.2 \mu_B$.

17.5 Diskussion

Zunächst einmal ist anzumerken, dass wir mit unserem Versuch erst beginnen konnten, als die anderen beiden Gruppen bereits fertig waren. Dies lag daran, dass unser Versuchsaufbau keine gewünschten Galvanometerausschläge lieferte, vermutlich war ein Kontakt oxidiert oder ähnliches. Herr Schaaf wollte uns unterstellen, dass wir die Vorgeschichte nicht definiert hätten, dies stimmt aber nicht. Somit haben wir den Versuch vielleicht etwas zügiger und ungenauer durchgeführt, als wir es sonst getan hätten.

Mit dem Verlauf der Hystereseschleife sind wir sehr zufrieden, wir erzielten eine schöne geschlossene Schleife. Die Messwerte mit den zusätzlichen 1000 Windungen haben wir bewusst vernachlässigt, um unsere Ergebnisse besser ablesen zu können. Die Remanenz ist mit $B_R = 1.65 \pm 0.1 \text{ T}$ im Vergleich zur Sättigung mit $B_S = 2.75 \pm 0.1 \text{ T}$ relativ gering und die Hystereseschleife ist sehr schmal, somit scheint Eisen weichmagnetisch zu sein.

Auch das Ergebniss von 2.79 ± 0.10 ausgelenkten Elektronen pro Eisenatom ist im Vergleich zum Literaturwert mit 2.2 kein schlechtes Ergebnis, jedoch liegt der wahre Wert nicht im Fehlerbalken.

¹ Nach D. Meschede (2001): "Gerthsen Physik", 21. Auflage, Springer Verlag Berlin.

² Nach P. Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 140.

Eigene Kommentare

[Der Tag, dass auch bei uns einmal der Versuchsaufbau irgendwie kaputt ist, der musste ja kommen, ist ja auch nicht schlimm. Schlimm ist nur, dass Herr Schaaf natürlich sofort uns den Fehler unterstellen wollte. Und Praktikumsräume mit zwei Gruppen und Hiwis, also ca. 15 Leuten, ist auch immer wieder dumm.]^{Daniel}

[Man fühlt sich schon richtig schlecht, wenn man als letztes fertig wird. Unser einziger Trost liegt darin, dass wir nicht schuld waren. Trotzdem war es zumindest für Daniel nicht so schlimm, weil er das Protokoll schon fertig hatte, bevor ich am Versuchstag in die Mensa ging. Ist der Junge irgendwie nicht so richtig ausgelastet?]^{Hauke}

18 Der Transformator

Versuch durchgeführt am 30. September 2005, Protokoll erarbeitet von Hauke Rohmeyer.

18.1 Einleitung

In diesem Versuch wollen wir uns mit einem wichtigen elektronischen Bauteil beschäftigen, dem Transformator. Dieser ist bekanntermaßen ein Gerät zur verlustarmen Transformation von Wechselspannungen und -strömen sowie zur Leistungsanpassung. Bei der Transformation wird die Amplitude von Spannung bzw. Strom verändert, nicht aber die Frequenz.

18.2 Theorie

18.2.1 Aufbau und Wirkungsweise des Transformators

Ein Transformator besteht im Prinzip aus zwei induktiv über einen Eisenkern gekoppelten Spulen, der Primärspule mit Windungszahl N_1 und Induktivität L_1 und der Sekundärspule mit N_2 und L_2 .

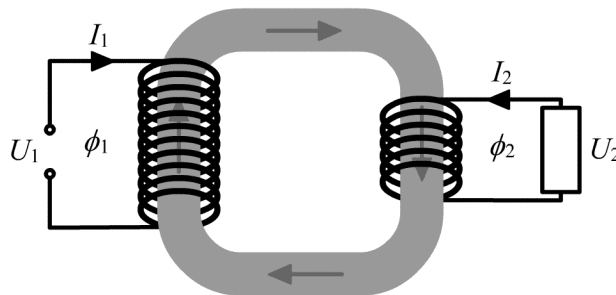


Abbildung 125: Schematische Darstellung eines Transformators.

Liegt an der Primärspule eine Wechselspannung an, so erzeugt diese einen sich ändernden magnetischen Fluss Φ_1 , der durch die Eisenverbindung auch die Sekundärseite durchsetzt. Somit wird in der Sekundärspule eine Spannung induziert, die von einem ohmschen, kapazitiven oder induktiven Verbraucher abgegriffen werden kann. Da dadurch die Sekundärspule ebenfalls einen sich ändernden magnetischen Fluss hervorruft, wirkt das wieder auf die Primärspule zurück.

Einen realen Transformationsvorgang genau zu berechnen, ist so gut wie unmöglich. Deshalb machen wir die Annahme eines verlustfreien [also idealen] Transformators und gehen erst später auf die Vereinfachungen ein.

Idealer unbelasteter Transformator

Um die Sache noch weiter zu vereinfachen, betrachten wir zunächst einen unbelasteten Transformator, das heißt, dass auf der Sekundärseite kein Strom fließt.

Liegt an der Primärspule nun die Spannung U_1 an, so wird in ihr die Spannung

$$U_{int} = -U_1 = -N_1 \frac{d\Phi_1(t)}{dt}$$

induziert mit

$$\Phi_1(t) = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A \cdot N_1}{L_1} \cdot I_1(t),$$

dabei ist A der Querschnitt und L_1 die Länge¹.

Da über den Eisenkern der magnetische Fluss $\Phi_1(t)$ auch die Sekundärspule ohne Verluste durchsetzt, wird hier eine Spannung erzeugt:

$$U_2 = -N_2 \cdot \frac{d\Phi_1(t)}{dt}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt unmittelbar das Verhältnis der Primär- und Sekundärspannung:

$$\frac{U_1}{U_2} = -\frac{N_1}{N_2}.$$

Bei diesem ganzen Transformationsprozess wird im Mittel keine elektrische Leistung aufgenommen, da im Primärkreis durch die Spule der Strom wie gewohnt um 90° zur Spannung phasenverschoben ist und im Sekundärkreis kein Strom fließt.

Idealer belasteter Transformator

Ist auf der Sekundärseite ein Verbraucher geschaltet, fließt natürlich auch auf dieser Seite ein Strom. In diesem Fall erzeugt dann die Sekundärspule einen magnetischen Fluss Φ_2 . Dieser würde nach der Lenzschen Regel den magnetischen Fluss Φ_1 schwächen, was aber aufgrund der festgelegten Spannung U_1 nicht möglich ist. Trotzdem muss dieser Fluss kompensiert werden. Das geschieht, indem zum Primärblindstrom I_1 ein phasenverschobener Anteil hinzukommt, der dazu führt, dass die vom Primäranschluß entnommene Leistung nicht mehr Null ist.

Aus dieser Überlegung kann man schließen, dass bei einem ohmschen Widerstand R [der ja den Sekundärstrom nicht weiter phasenverschiebt], das Verhältnis von U_1 zu U_2 wie beim unbelasteten Transformator bleibt. Der Sekundärstrom ist dann leicht zu berechnen:

$$I_2 = \frac{U_2}{R}.$$

¹ Dies folgt aus dem Ampèreschen Durchflutungsgesetz für eine unendlich lange Spule.

Die Stromstärke I_1 lässt sich durch die oben geschilderte Überlegung berechnen, dass zusätzlich zum Leerlaufstrom I_{1L} , der von der Sekundärspule erzeugte magnetische Fluss Φ_2 durch den Strom kompensiert werden muss. Das heißt

$$\Phi_1(t) = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_1 \cdot N_1}{L_1} \cdot I_{1B}(t) = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_2 \cdot N_2}{L_2} \cdot I_2(t) = \Phi_2(t).$$

Hat man nun zwei Spulen mit gleichen Querschnitt und gleicher Länge, dann gilt

$$\frac{I_{1B}}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Daraus ergibt sich I_1 mit

$$I_1 = I_{1L} + \frac{N_2}{N_1} I_2.$$

Als nächstes fragen wir uns, wie die Phasenbeziehung α zwischen I_1 und U_1 ist. Gehen wir davon aus, dass beim unbelasteten Transformator der Phasenwinkel α_0 vorliegt [Im Idealfall wäre $\alpha_0 = 90^\circ$]. Für den Kompensationsstrom gilt, dass er zur Spannung phasengleich ist. Dies folgt nach zweimaliger Anwendung der Lenzschen Regel: U_1 und U_2 sind bei ohmschen Verbrauchern um 180° phasenverschoben. I_2 ist in der gleichen Phase wie U_2 . Somit kann Φ_2 durch einen Strom phasengleich zu U_1 kompensiert werden. Das ergibt folgendes Phasendiagramm:

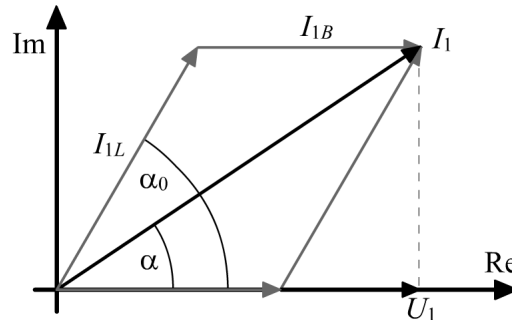


Abbildung 126: Phasendiagramm des Transformators.

Aus diesem leitet sich folgende Formel ab:

$$\tan \alpha = \frac{I_{1L} \cdot \sin \alpha_0}{I_{1L} \cdot \cos \alpha_0 + I_{1B}}.$$

Mit der Phasenverschiebung kann man nun die vom Transformator benötigte Leistung berechnen:

$$P = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \alpha.$$

Das entspricht der Leistung auf der Sekundärseite, da ja keine Energie verloren geht:

$$P = U_2 \cdot I_2.$$

Verluste

Wie oben schon erwähnt, haben wir viele Verlusteffekte außer Acht gelassen. Das sind zum einen die sogenannten Kupferverluste. Diese treten aufgrund des ohmschen Widerstands der Spulen auf. Hinzu kommen die Streuverluste, da das Magnetfeld nicht nur im Eisenkern entsteht, sondern in geringerem Maße auch außerhalb des Kerns. Je größer jedoch die relative Permeabilität des Eisens ist, desto geringer ist der Verlust. Ein weiterer Punkt sind Eisenverluste, vor allem Hysterese- und Wirbelstromverluste. Deswegen besteht der Eisenkern meist aus dünnen, gegeneinander isolierten Weicheisenblechen.

Stromzange

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit des Transformators bietet die Stromzange. Diese dient zur berührungsfreien Messung von Strömen. Dazu umschließt man den stromdurchflossenen Leiter mit der Primärseite, so dass eine Spannung in die Primärspule des Transformators induziert wird. Diese kann dann mit der Sekundärspule so transformiert werden, dass messbare Ströme entstehen.

18.3 Versuchsdurchführung

18.3.1 Versuchsaufbau

Die folgende Abbildung zeigt eine Skizze des Versuchsaufbaus.

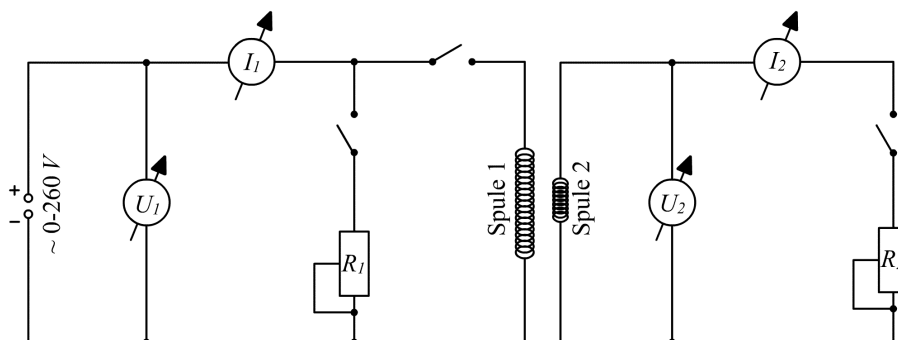


Abbildung 127: Versuchsaufbau.

18.3.2 Versuchsdurchführung

Unbelasteter Transformator

Bei diesem Versuchsteil ist der Transformator unbelastet, also sind keine Widerstände in Betrieb.

- (1) Durch Regelung der Wechselspannungsquelle werden mindestens 20 Wertepaare von U_1 und I_1 gemessen [auch für hohe Spannungen].
- (2) Gleichzeitig zu (1) messe man U_2 in Abhängigkeit von U_1 .

Danach wird durch Vertauschen der Anschlüsse das Übersetzungsverhältnis des Transformators umgekehrt [Spule 2 wird zur Primärspule, Spule

1 zur Sekundärspule]. U_1 wird in Abhängigkeit von U_2 gemessen. Hierbei ist U_2 nun die Spannung des Primärkreises, für die man Werte bis 20 V verwendet.

Belasteter Transformator

- (3) Spule 1 wird wieder zur Primärspule. Der Sekundärkreis wird geschlossen.

Der Primärkreis ist ohne R_1 geschaltet. Bei $U_1 = 200\text{ V}$ wird I_2 mit Hilfe von R_2 auf einen ganzzahligen Wert zwischen null und fünf Ampère geregelt. Nun wird I_1 notiert.

Die Spannung wird heruntergeregelt und anstelle von Spule 1 wird R_1 in den Primärkreis geschaltet. Bei $U_1 = 200\text{ V}$ wird R_1 so verändert, dass die Stromstärke I_R durch den Widerstand mit dem notierten Wert für I_1 übereinstimmt.

Die Spannung wird heruntergeregelt und Spule 1 parallel zum Widerstand geschaltet. Bei $U_1 = 200\text{ V}$ wird I_{ges} am Messgerät für I_1 abgelesen.

Die einzelnen Schritte werden wiederholt, so dass man am Ende sechs Wertetripel von I_2 , I_R und I_{ges} notiert hat [$I_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5\text{ A}$].

- (4) Die Phasenverschiebung zwischen U_1 und I_1 wird direkt mit dem Oszilloskop beobachtet und ausgedruckt. Hierzu wird die Primärspannung über den Tastkopf [10x] an Eingang 1 des Oszis gelegt. Mit Hilfe der Stromzange wird der Primärstrom am Eingang 2 abgegriffen. Bei der Messung ist R_1 nicht in Betrieb.

Für die gleichen Werte für I_2 wie in (3) werden Ausdrücke angefertigt. Es empfiehlt sich die „Cursor-Funktion“ des Oszis zu nutzen, um die Phasenverschiebung in ms anzeigen zu lassen. Ebenfalls sollte die Periode von U_1 notiert werden.

18.4 Auswertung

18.4.1 Unbelasteter Transformator

Der nicht-ideale Transformator

Theoretisch sollte eine Auftragung von U_1 gegen I_1 beim unbelasteten Transformator einen linearen Zusammenhang zeigen.

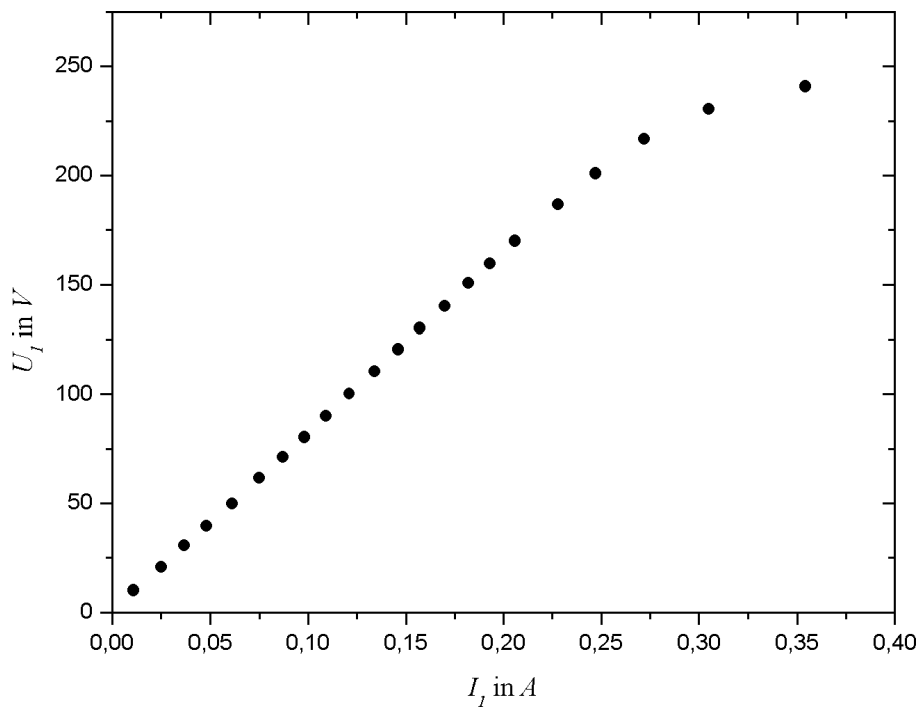


Abbildung 128: Unbelasteter Transformator.

Man erkennt, dass dies für kleine Ströme der Fall ist. Dass dies für große Ströme nicht der Fall ist, liegt unter anderem an der Sättigungsmagnetisierung des Eisenkernes². Der Magnetische Fluss durch den Eisenkern kann nicht mehr anwachsen. Bei der Herleitung der Gleichung für den idealen Transformator wurde dies jedoch außer Acht gelassen.

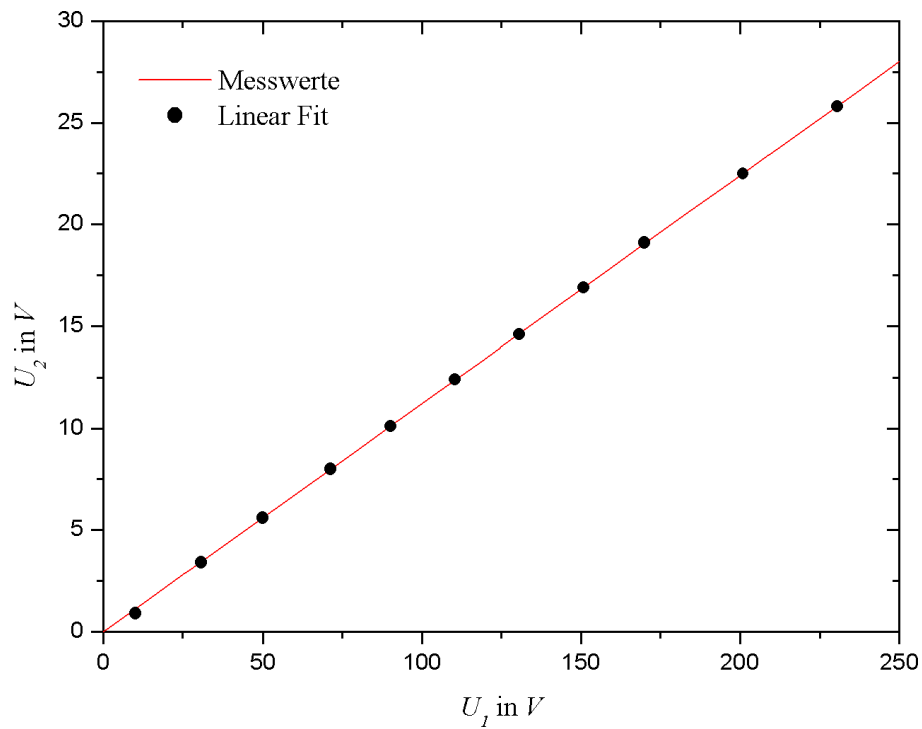
Das Übersetzungsverhältnis des Transformators

Für das Übersetzungsverhältnis gilt

$$u = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

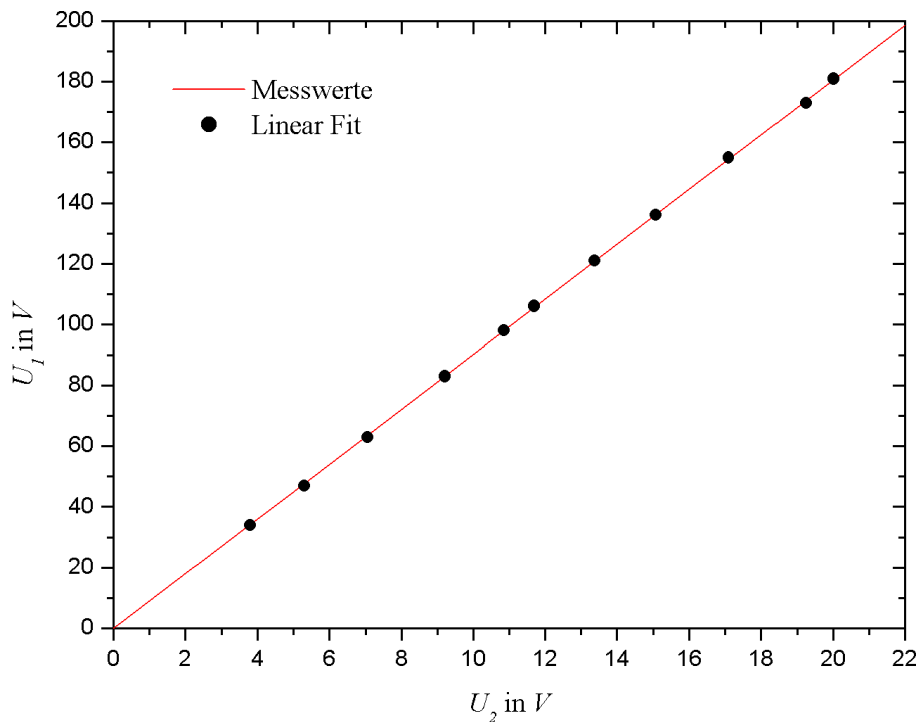
Um u zu bestimmen, tragen wir U_2 gegen U_1 auf. Durch lineare Regression erhalten wir $m = U_2/U_1$, also gilt $u = 1/m$. Für den Fehler gilt mit dem Gesetz der Fehlerfortpflanzung $\sigma_u = \sigma_m/m^2$. Dieses Verfahren ist etwas mühsam, aber es spiegelt die Messung wieder, denn wir haben ja U_2 in Abhängigkeit von U_1 gemessen.

² siehe Versuch 17: Ferromagnetismus

Abbildung 129: Auftragung von U_2 gegen U_1 .

Aus der linearen Regression erhalten wir $m = 0,1121 \pm 0,0002$ und somit $u = 8,93 \pm 0,02$. Da $u > 1$ gilt, wurde die Spannung also hinuntertransformiert.

Bei der zweiten Messung gilt ganz analog $u = 1/m$. Nun tragen wir U_1 gegen U_2 auf, wobei U_2 immer noch die Primärspannung ist. Nur das Übersetzungsverhältnis hat sich umgekehrt.

Abbildung 130: Auftragung von U_1 gegen U_2 .

Aus der linearen Regression erhalten wir $m = 9,03 \pm 0,02$ und somit $u = 0,1108 \pm 0,0002$. Da $u < 1$ gilt, wurde die Spannung also hochtransformiert.

Wenn wir von einem ganzzahligen Übersetzungsverhältnis ausgehen, so hat Spule 1 also neunmal so viele Windungen wie Spule 2.

18.4.2 Belasteter Transformator

Phasenverschiebung durch Messung am Multimeter

Um die Phasenverschiebung zwischen U_1 und I_1 berechnen zu können, zeichnen wir zunächst ein Vektordiagramm. An einem ohm'schen Widerstand sind Spannung und Strom in Phase. Da ein ohm'scher Widerstand in einem Wechselstromkreis nur einen Blindwiderstand hat, hat er nur einen imaginären Anteil. Bei der Messung haben wir den ohm'schen Widerstand immer so eingestellt, dass der Strom der durch ihn hindurchfließt $[I_R]$ betragsmäßig gleich ist zu I_1 , dem Strom durch den induktiven Widerstand [der Spule]. Schalten wir Spule und Widerstand parallel, so erhalten wir den Gesamtstrom, wenn wir eine Vektoraddition von I_R und I_1 durchführen. Es entsteht eine Raute, bei der die beiden Diagonalen bekanntlich senkrecht aufeinander stehen und sich in der Hälfte schneiden.

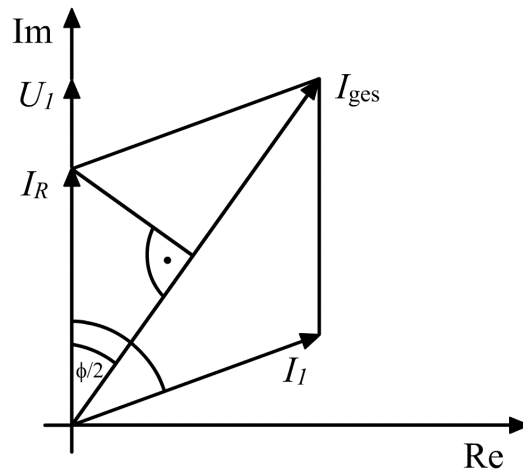


Abbildung 131: Vektordiagramm.

Aus Abbildung 131 lesen wir ab:

$$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{I_{\text{ges}}/2}{I_R} = \frac{I_{\text{ges}}}{2 \cdot I_R} \quad \Leftrightarrow \quad \phi = 2 \cdot \arccos\left(\frac{I_{\text{ges}}}{2 \cdot I_R}\right).$$

Die folgende Tabelle zeigt unsere Ergebnisse aus den Messungen am Multimeter.

I_2 [A]	I_1 [A]	I_{ges} [A]	ϕ [rad]
0	0.245	0.362	1.47909
1	0.275	0.472	1.07816
2	0.341	0.629	0.79368
3	0.419	0.801	0.59653
4	0.517	0.993	0.5651
5	0.612	1.206	0.34342

Phasenverschiebung durch Messung am Oszilloskop

Um die Phasenverschiebung aus den Ausdrücken zu ermitteln, müssen wir zunächst die Abstände der Maxima in s ermitteln. Nun gilt

$$\phi = 2\pi \frac{x}{T}$$

wobei x die Phasenverschiebung in s und T die Periode in s ist. Das Oszilloskop zeigte eine Periode von $T = 0,02 s$ an. Die folgende Tabelle zeigt unsere Ergebnisse aus den Ausdrücken des Oszilloskops.

I_2 [A]	x [ms]	ϕ [rad]
0	5	1.5708
1	4	1.25664
2	3	0.94248
3	2.5	0.7854
4	2	0.62832
5	1.75	0.54978

Vergleich der Ergebnisse

Nun tragen wir unsere Ergebnisse für die Phasenverschiebung aus den verschiedenen Messung auf. Zusätzlich tragen wir die theoretischen Werte ein, die sich durch

$$\phi = \arctan \left(\frac{I_0 \sin(\phi_0)}{I_1 + I_0 \cos(\phi_0)} \right)$$

ergeben. Dabei sind I_0 und ϕ_0 Strom und Phase beim unbelasteten Transformator und $I_1 = I_2 \cdot N_2/N_1$. Beim unbelasteten Transformator maßen wir $I_0 = 0,247 \text{ A}$ [bei $U_0 = 200 \text{ V}$] und $\phi_0 = \pi/2 \text{ rad}$. Für das Übersetzungsverhältnis ergaben unsere Messungen $N_2/N_1 = 1/9$. Somit vereinfacht sich die Formel für die theoretische Phasenverschiebung zu

$$\phi = \arctan \left(\frac{9 \cdot I_0}{I_2} \right).$$

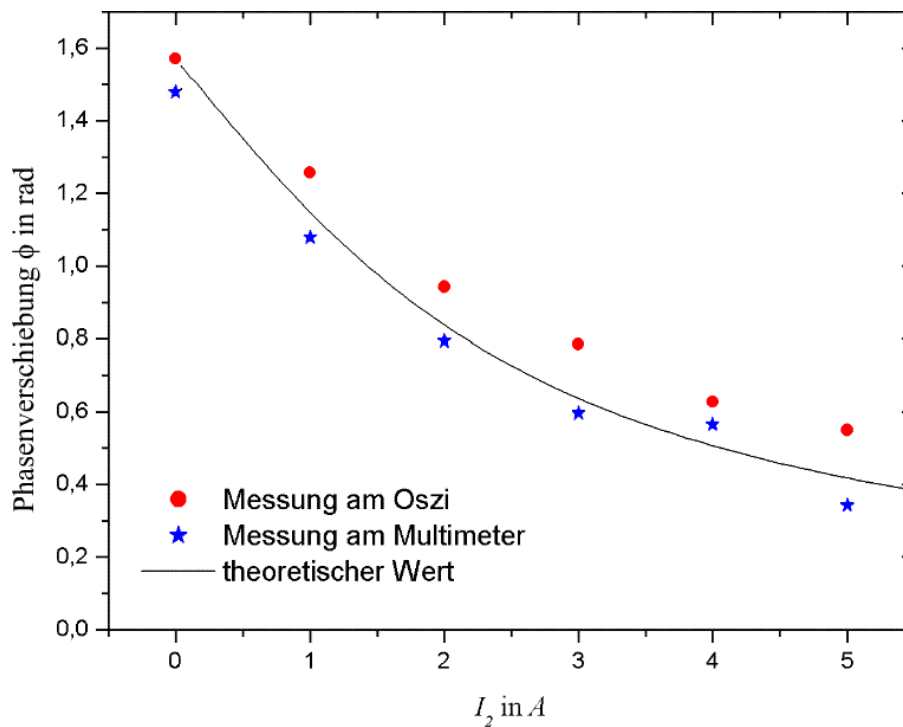


Abbildung 132: Phasenverschiebung zwischen Primärstrom und Primärspannung.

18.4.3 Wirk- und Verlustleistung

Die Wirkleistung ergibt sich durch $P_W = U_1 \cdot I_1 \cdot \sin \phi$, die Verlustleistung durch $P_V = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \phi$. Wir erhalten bei der Messung mit dem Multimeter folgende Werte:

Laststrom [A]	P_W [W]	P_V [W]
0	48,80	4,48
1	48,46	26,01
2	48,62	47,82
3	47,07	49,33
4	55,37	87,33
5	41,21	115,25

18.4.4 Energieverschwendung: Handyladegerät

Unser Transformator hatte also eine Verlustleistung von 4,48 W in unbelastetem Zustand. Bei einem Strompreis von 0,20 EUR/kWh ergibt sich also ein Preis von

$$\frac{365 \cdot 24 \cdot 4,48 \cdot 0,2}{1000} \text{ EUR} \approx 7,85 \text{ EUR},$$

wenn das Handyladegerät ein Jahr lang in der Steckdose verbleibt ohne genutzt zu werden.

18.5 Diskussion

Wir können mit unseren Werten recht zufrieden sein. Die errechneten Übersetzungsverhältnisse sind annähernd gleich. Die Werte für die Phasenverschiebung sind alle mit systematischen Fehlern behaftet, scheinbar hat sich ein Messfehler bei der Messung mit dem Multimeter bei einem Laststrom von 4 A ergeben. Leider haben wir die „Cursor-Funktion“ beim Oszilloskop nicht genutzt, um uns die Phasenverschiebung anzeigen zu lassen. Das Ablesen der pixeligen Ausdrücke führt jedesmal zu großen Ablesefehlern.

Eigene Kommentare

[Nun waren auch wir mal endlich schlecht vorbereitet, dafür haben wir den Versuch doch aber super durchgezogen :).]_{Daniel}

[Eigentlich ein recht guter Versuch mit schöner Auswertung. Leider ist das Praktikumsskript mal wieder in der Durchführung ein wenig ungenau oder zu länglich. Vor allem bei einem Versuch in dem mit lebensgefährlichen Strömen experimentiert wird, sollte die Durchführung klar und verständlich geschrieben sein. Dann hätten unsere Mitpraktikanten auch weniger Probleme gehabt. Ich würde nicht so wie Daniel sagen, dass wir schlecht vorbereitet waren, sondern eben nur nicht ganz so gut wie sonst immer ;-).]_{Hauke}

19 Dia- und Paramagnetismus

Versuch durchgeführt am 19. September 2005, Protokoll erarbeitet von Daniel Scholz.

19.1 Einleitung

In diesem Versuch werden die Reaktionen verschiedener Stoffe auf ein inhomogenes Magnetfeld beobachtet.

19.2 Theorie

19.2.1 Materie im Magnetfeld

Auf atomarer Skala kann man sich die Elektronenbahnen um den Atomkern als kleine Kreisströme vorstellen. Diese sind jeweils ein magnetischer Dipol und besitzen ein magnetisches Moment \vec{m} . Als Magnetisierung \vec{M} eines Stoffes ist die Summe der magnetischen Momente pro Volumen definiert:

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}_i}{V}.$$

Da die Dipole in der Regel nicht gleich ausgerichtet sind, hebt sich ihre Summe nach außen hin auf. Kommen die magnetischen Dipole jedoch in ein Magnetfeld, so werden sie sich nach diesem orientieren. Hierbei bezeichnet man das äußere Feld als "H-Feld", den Gesamten - auch von der Magnetisierung der Materie abhängigen - magnetischen Fluss als "B-Feld". In Formeln ergibt sich

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}).$$

Die Magnetisierung ist [bis auf ferromagnetische Körper, siehe Versuch 17: Ferromagnetismus] proportional zum äußeren Magnetfeld, der Proportionalitätsfaktor heißt *magnetische Suszeptibilität* χ :

$$\vec{M} = \chi \vec{H}.$$

Hieraus folgt sofort

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0 \vec{H} (1 + \chi) = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

mit der Permeabilität $\mu_r = (1 + \chi)$ des bestimmten Stoffes.

Diamagnetismus

Diamagnetismus ist eine temperaturunabhängige Form des Magnetismus, die jeder Stoff besitzt. Er ist allerdings eine so schwache Form, dass die diamagnetischen Effekte leicht von para- oder ferromagnetischen Effekten übertroffen werden. Kommt Materie in ein Magnetfeld, so werden inneratomare Kreisströme induziert, die nach der Lenzschen Regel ihrer Ursache entgegenwirken. Sie besitzen also ein Magnetfeld, welches dem äußeren entgegengesetzt ist. Dies führt dazu, dass diamagnetische Stoffe in Bereiche geringerer äußerer Feldstärke gezogen werden. Da durch die entgegengesetzten Felder das Gesamtfeld geschwächt wird, ist die Suszeptibilität diamagnetischer Stoffe negativ und entsprechend ihre Permeabilität $\mu_r < 1$.

Paramagnetismus

Materie, die paramagnetisches Verhalten zeigt, besteht aus Teilchen, die ein permanentes Dipolmoment besitzen. Dies wird durch nicht vollständig besetzte Schalen verursacht. Kommt paramagnetische Materie mit einem Magnetfeld in Berührung, so richten sich die Dipole parallel zum Magnetfeld aus und verstärken dieses: die Suszeptibilität ist positiv. Da die temperaturbedingte Bewegung einer statischen Ausrichtung der Teilchen entgegenwirkt, ist Paramagnetismus temperaturabhängig. Die Suszeptibilität berechnet sich nach dem *Curieschen Gesetz*

$$\chi = \frac{C}{T},$$

wobei T die Temperatur und C eine materialabhängige Konstante ist.

19.2.2 Energiedichte des magnetischen Feldes

Die magnetostatische Energie eines Körpers beträgt

$$W = -\frac{1}{2} \int_V \vec{H} \, d\vec{B} = -\frac{1}{2} V \vec{H} \mu_0 \mu_r \vec{H} = -\frac{1}{2} V \mu_0 \mu_r \vec{H}^2 = \frac{-V \vec{B}^2}{2 \mu_0 \mu_r},$$

dabei ist V das Volumen des Körpers. Dies lässt sich aus den Maxwell Gleichungen sowie aus dem Poynting Vektor herleiten. Die Kraft auf den Körper ergibt sich nun aus dem negativen Gradienten dieser Energie:

$$\vec{F} = -\nabla W = \frac{V B}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial B}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_z \right). \quad (19.1)$$

Damit überhaupt eine Kraft auftritt, muss das Magnetfeld also in mindestens einer Raumrichtung inhomogen sein.

19.2.3 Erzeugung eines inhomogenen Magnetfeldes

Zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten wirkt ein vom Abstand der Polschuhe abhängiges Magnetfeld. Mit wachsendem Abstand der Polschuhe nimmt das Magnetfeld ab. Schrägt man die Polschuhe an, so ist ihr Abstand von der Höhe abhängig und damit auch das Magnetfeld. Es wird also inhomogen.

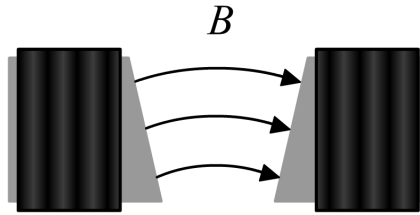


Abbildung 133: Erzeugung eines inhomogenen Magnetfeldes.

19.2.4 Hallsonde

Eine Hallsonde ist ein Gerät, mit dem man je nach bekannter Größe ein Magnetfeld oder einen Strom messen kann. Sind beide Größen bekannt, kann sie auch als Metalldetektor verwendet werden. Eine Hallsonde ist ein rechteckiger Leiter, in dem die Ladungsträger durch ein äußeres Magnetfeld eine Lorentz-Kraft $F_L = qvB$ erfahren [eindimensional, da hier der Fall $\vec{v} \perp \vec{B}$ angenommen wird]. Abhängig davon wie stark das Magnetfeld ist, werden die Ladungsträger ausgelenkt und es ergibt sich eine Spannung zwischen zwei Leiterseiten - die sogenannte Hallspannung U_H . Man kann die Leiterseiten an denen die Hallspannung anliegt als Kondensatorplatten betrachten. Dann ist das System im Gleichgewicht, wenn die Lorentz-Kraft gleich der Kraft ist, die durch das elektrische Feld zwischen den Leiterseiten auf die Ladung wirkt:

$$F_L = qvB = Eq = F_E.$$

Angenommen die Hallspannung liegt zwischen der oberen und der unteren Seite des Leiters der Höhe h an. Jetzt gilt für das elektrische Feld $E = U_H/h$. Die Stromdichte im Leiter ist $j = qnv$ mit der Ladungsträgerdichte n . Damit ist der Strom $I = jA = qnvbh$ mit der Querschnittsfläche des Leiters $A = bh$. Nach v umgeformt ergibt sich $v = I/qnbh$. Setzt man dies alles in die obige Gleichung ein, so erhält man

$$vB = E \quad \text{und} \quad \frac{I}{qnbh}B = \frac{U_H}{h} \quad \Leftrightarrow \quad U_H = \frac{1}{qn} \frac{IB}{b}.$$

Ist $q = e$, dann gilt

$$U_H = R_H \frac{IB}{b},$$

wobei $R_H = 1/en$ eine materialspezifische Hallkonstante darstellt. Beim Bau einer Hallsonde werden üblicherweise Halbleiter verwendet, da bei ihnen die Ladungsträgerdichte gering ist und somit höhere Hallspannungen erwartet werden können.

19.3 Versuchsdurchführung

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 134 dargestellt.

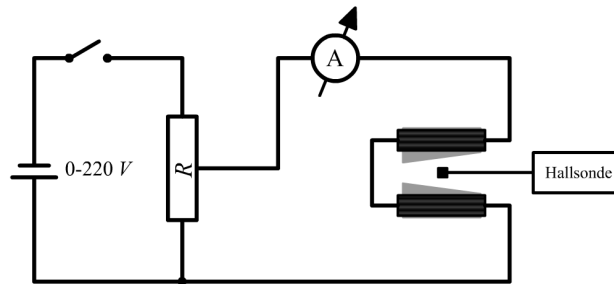


Abbildung 134: Versuchsaufbau.

Zunächst wird die Stromstärke in den Elektromagneten auf $1,2\text{ A}$ konstant gehalten und das Magnetfeld im Bereich der Probekörper mittels der Hallsonde bestimmt. Dabei sollte die Schrittweite nicht mehr als 5 mm betragen.

Nun werden die Massen der drei Probekörper [MnO_2 , Ta und Bi] gemessen und nach dem Einbringen zwischen die Elektromagneten werden auch die genauen Orte der Probekörper bestimmt. Anschließend wird die Gewichtskraft der einzelnen Körper mit ein- sowie mit ausgeschaltetem Magnetfeld gemessen. Dies geschieht durch eine Analysenwaage, an welcher die Probekörper aufgehängt werden. Jede Messung ist jeweils dreimal durchzuführen.

Nun wird noch das Magnetfeld mit eingebrachten Manganoxid MnO_2 gesondert betrachtet. Dazu wird zunächst im Bereich des Probekörpers das Magnetfeld für die unterschiedlichen Stromstärken $0,8\text{ A}$, $1,0\text{ A}$, $1,2\text{ A}$ und $1,4\text{ A}$ wiederum mit der Hallsonde bestimmt. Die Gewichtskraft auf den Probekörper in dem Magnetfeld wird dann mittels der Analysenwaage zu jeder dieser Stromstärken gemessen.

19.4 Auswertung

19.4.1 Ortsverlauf der Kraftflussdichte

Zunächst wird die Kraftflussdichte B gegen die horizontale Position h aufgetragen.

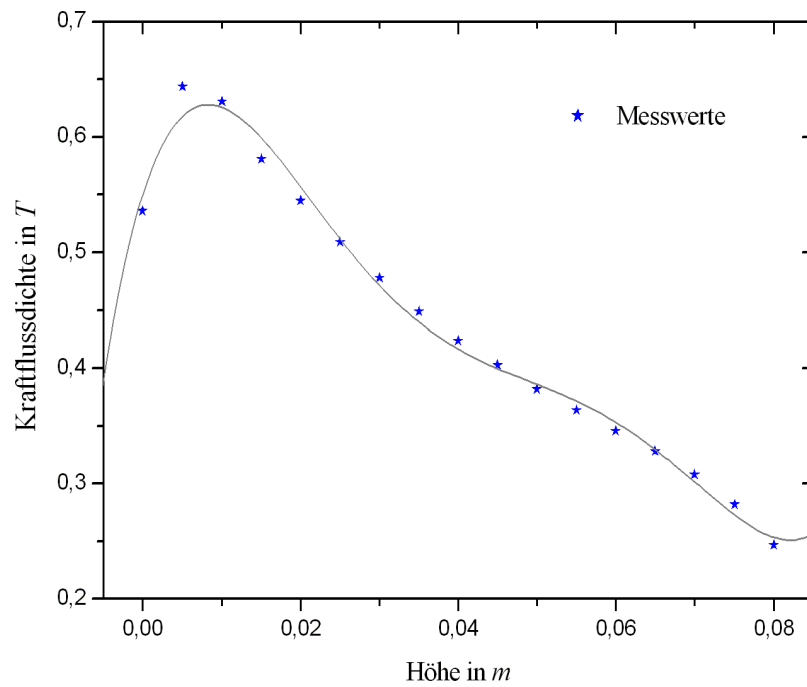
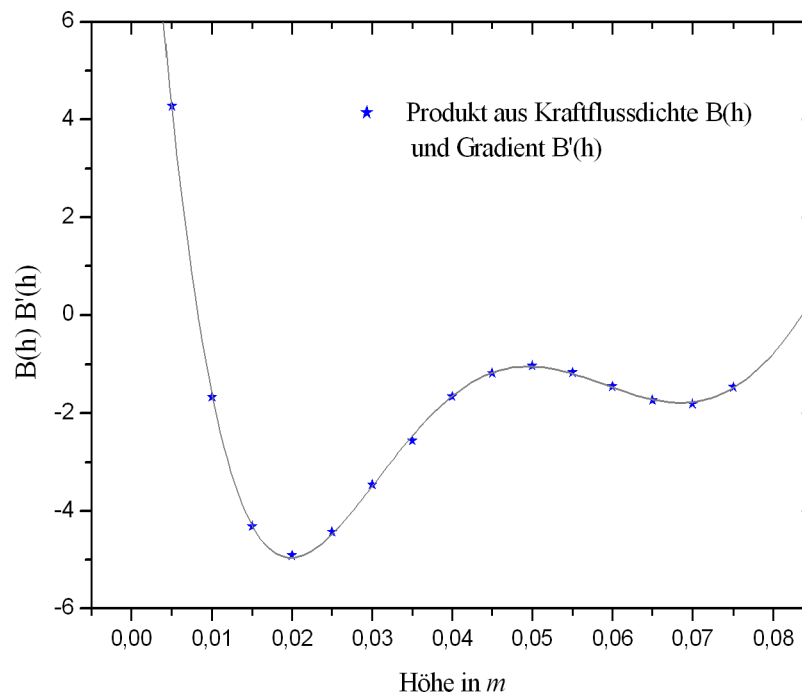


Abbildung 135: Ortsverlauf zwischen den beiden Polschuhen.

Um aus unseren Messwerten den Gradienten $\partial B/\partial h$ entnehmen zu können, haben wir den Ortsverlauf durch ein Polynom $f(h)$ vom fünften Grade angenähert und dessen Ableitung berechnet. Es ergab sich

$$\begin{aligned} f(h) &= 0.55 + 22h - 1879h^2 + 51192h^3 - 601516h^4 + 2566960h^5, \\ f'(h) &= 22 - 3758h + 153576h^2 - 2406064h^3 + 12834800h^4. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir nun das Produkt $(B \cdot \partial B/\partial h)(h) = B(h) \cdot B'(h)$, dessen Graph in folgender Abbildung gezeigt wird:

Abbildung 136: Ortsverlauf der Funktion $B(h) \cdot B'(h)$.

An diesem Verlauf kann man deutlich sehen, dass sich die Kraft F auf einen Probekörper zwischen den Höhenpositionen 0 und 20 mm in Abhängigkeit der Höhe h sehr stark ändert. Die Kraft auf den Probekörper ist nach Gleichung (19.1) proportional zum Produkt aus Gradient und Kraftflussdichte.

19.4.2 Orte der Probekörper

Die folgende Tabelle zeigt die Höhen, an denen die Probekörper zwischen den Polschuhen hingen. Desweiteren wurden für diese Höhen $B(h)$ und $B(h) \cdot B'(h)$ aus den vorherigen Abbildungen abgelesen. Die maximalen Fehler wurden von uns eingeschätzt.

	Höhe in m	$B(h)$ in T	$B(h) \cdot B'(h)$
MnO ₂	0.0437 ± 0.001	0.40 ± 0.1	-1.20 ± 0.3
Ta	0.0373 ± 0.001	0.43 ± 0.1	-2.00 ± 0.3
Bi	0.0318 ± 0.001	0.45 ± 0.1	-3.15 ± 0.3

19.4.3 Kräfte auf die Probekörper

Um die Kraft zu berechnen, die durch das Magnetfeld auf die Probekörper wirkte, müssen wir die Differenzen der Massen bei ein- und ausgeschaltetem Magnetfeld betrachten. Diese Differenzen sind dann mit der Erdbeschleunigung g zu multiplizieren, es gilt also

$$F = \Delta m \cdot g.$$

Die folgende Tabelle zeigt unsere Ergebnisse:

	Kraft in N
MnO ₂	$(-2.14 \pm 0.1) \cdot 10^{-4}$
Ta	$(-0.25 \pm 0.1) \cdot 10^{-4}$
Bi	$(0.29 \pm 0.1) \cdot 10^{-4}$

19.4.4 Bestimmung der magnetischen Suszeptibilität

Unter der Annahme, dass die Suszeptibilität konstant und nicht temperaturabhängig ist, und unter Vernachlässigung der Vakuumsenergie erhält man aus Gleichung (19.1) für unseren eindimensionalen Fall die folgende Gleichung:

$$\chi = \frac{\mu_0 \cdot F}{V \cdot B(h) \cdot B'(h)} = \frac{\mu_0 \cdot F \cdot \varrho}{m \cdot B(h) \cdot B'(h)}, \quad (19.2)$$

dabei ist V das Volumen, m die Masse, h die Höhe und ϱ die Dichte¹ der jeweiligen Probekörper.

Den Fehler der Masse m nehmen wir als vergleichsweise so gering an, dass wir ihn für die Fehlerrechnung vernachlässigen können. Somit erwarten wir einen Fehler von

$$\sigma_\chi = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 \cdot \varrho \cdot \sigma_F}{m \cdot B(h) \cdot B'(h)}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 \cdot F \cdot \varrho \cdot \sigma_{B(h)}}{m \cdot B(h)^2 \cdot B'(h)}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 \cdot F \cdot \varrho \cdot \sigma_{B'(h)}}{m \cdot B(h) \cdot B'(h)^2}\right)^2}.$$

Unsere berechneten magnetischen Suszeptibilitäten sind in der folgenden Tabelle gezeigt:

	magnetische Suszeptibilität χ
MnO ₂	$(231, 13 \pm 69, 11) \cdot 10^{-5}$
Ta	$(27, 95 \pm 13, 34) \cdot 10^{-5}$
Bi	$(-13, 86 \pm 5, 78) \cdot 10^{-5}$

Neben der magnetischen Suszeptibilitäten χ benutzt man noch die druckunabhängige spezifische Suszeptibilität χ_{spz} , welche durch $\chi_{spz} = \chi/\varrho$ gegeben wird, dabei ist ϱ wieder die Dichte des Stoffes. Bei uns ergeben sich somit die folgenden spezifischen Suszeptibilitäten:

	spezifische Suszeptibilität χ in m^3/kg
MnO ₂	$(46, 23 \pm 13, 82) \cdot 10^{-8}$
Ta	$(1, 68 \pm 0, 80) \cdot 10^{-8}$
Bi	$(-1, 41 \pm 0, 59) \cdot 10^{-8}$

19.4.5 Kraftflussdichte und Gradient für verschiedene Stromstärken

In der folgenden Abbildung sind die Verläufe der Kraftflussdichte B gegen die verschiedenen Stromstärken I aufgetragen. Während der Messung befand sich der Probekörper MnO₂ im Magnetfeld.

¹ Die Dichten wurden dem Praktikumsript entnommen: Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 152.

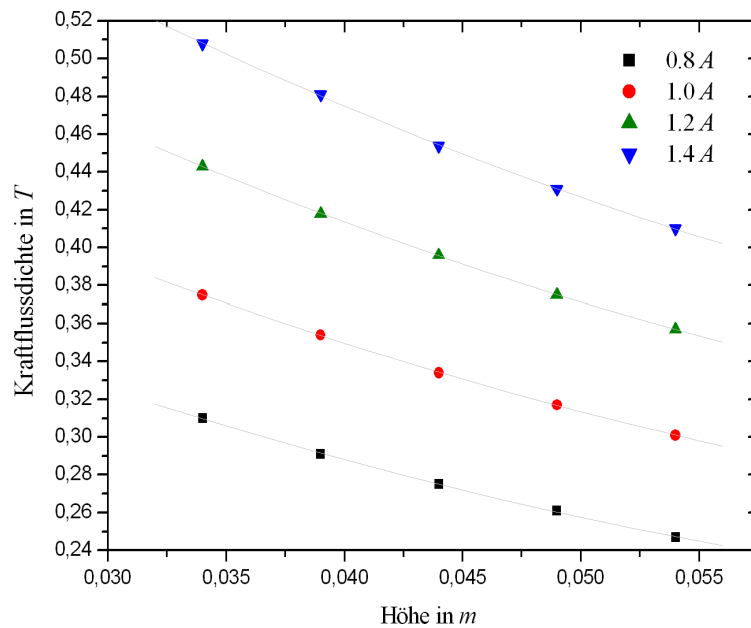


Abbildung 137: Ortsverlauf für verschiedene Stromstärken.

An diesen Graphen erkennt man, dass die Verläufe der Kraftflussdichten bei verschiedenen Stromstärken sehr ähnlich sind, jedoch nehmen sie bei steigender Stromstärke zu.

Alle Verläufe haben wir durch ein Polynom vom zweiten Grade angenähert und dessen Ableitung berechnet, um daraus den Gradienten der Kraftflussdichte zu bestimmen. Es ergaben sich die folgenden Ableitungen:

	$B'(h)$
0.8 A	$91.4h - 8.9$
1.0 A	$85.7h - 8.1$
1.2 A	$74.3h - 6.9$
1.4 A	$68.6h - 6.1$

Die Verläufe dieser Gradienten zeigt die folgende Abbildung:

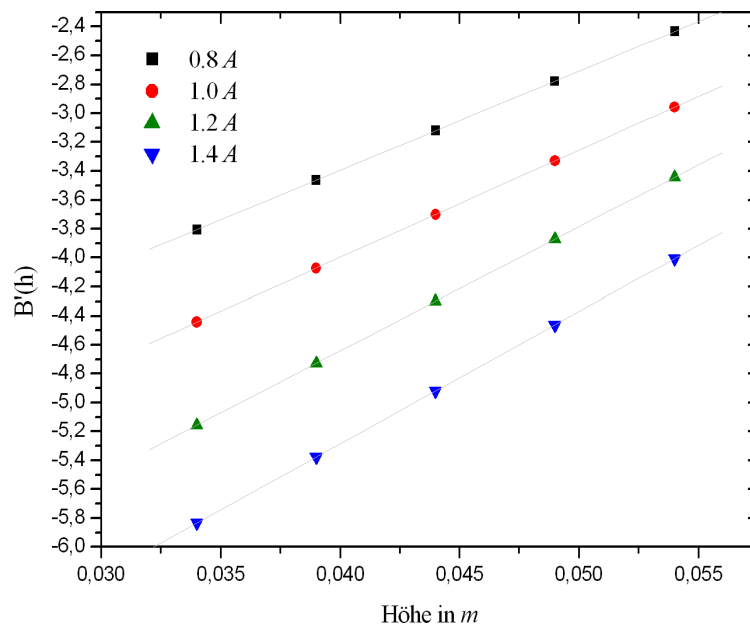
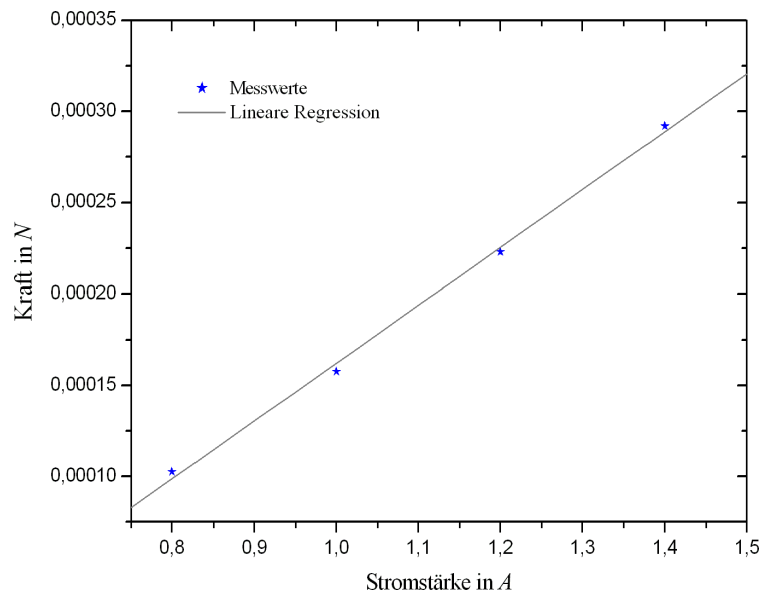


Abbildung 138: Ortsverlauf der Gradienten.

Auch hier fällt auf, dass bei steigender Stromstärke die Beträge der Veränderungen zunehmen.

19.4.6 Kraft auf den Probekörper als Funktion der Stromstärke

In der nächsten Abbildung sind die gemittelten Werte der Kräfte auf den Probekörper MnO_2 als Funktion der verschiedenen Stromstärken aufgetragen.

Abbildung 139: Kraft auf MnO_2 in Abhängigkeit der Stromstärke.

Durch lineare Regression erhalten wir die Gleichung

$$F(I) = 0.0003167 \cdot I - 0.0001545,$$

dabei hat die Steigung m einen Fehler von

$$\sigma_m = 0.00001378.$$

Setzt man dieses Ergebnis in Gleichung (19.2) ein, so erhält man an dem Ort h des MnO_2 Probekörpers

$$B(I) = \frac{\mu_0 \cdot F(I)}{\chi \cdot V \cdot B'(h)} \Big|_{h=0.0437} \approx - \frac{\mu_0 \cdot F(I)}{3.1 \cdot \chi \cdot V}.$$

Diesen Zusammenhang soll die folgende Abbildung verdeutlichen:

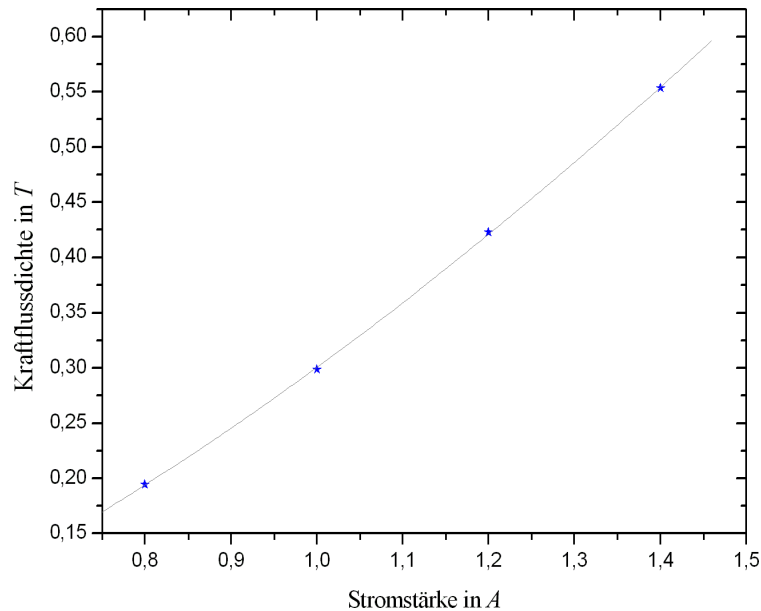


Abbildung 140: Kraftflussdichte in Abhängigkeit der Stromstärke.

19.5 Diskussion

Die Vorzeichen unserer Ergebnisse der magnetischen Suszeptibilitäten zeigen, dass MnO_2 sowie Ta paramagnetisch sind und dass Bi diamagnetisch ist.

Es ist uns leider nicht möglich die Güte dieser Werte einzuschätzen, da wir keinerlei verlässliche Literaturquellen fanden. Auf unsere Suche wichen sogar Angaben in Büchern stark voneinander ab, so dass derartige Vergleiche leider ausbleiben müssen².

² Werte für Bi weichen zum Beispiel im Gerthsen Physik, Springer Verlag, 20. Auflage, im Taschenbuch der Physik, Horst Kuchling, 16. Auflage, und im Taschenbuch der Physik, Stöcker, 3. Auflage, voneinander ab.

Auch die Ergebnisse in Vorgängerprotokoll³ der letzten Jahrgänge zeigen keine eindeutige Größenordnung der berechneten Werte.

Es wäre daher gerade bei derartigen Versuchen sehr wünschenswert, wenn Literaturwerte im Praktikumsskript angegeben wären. Unsere Auswertung ist somit etwas unbefriedigend, da durch fehlende Vergleiche der Nutzen fehlt.

Eigene Kommentare

[Netter kurzer Versuch in der Durchführung, nur leider sind die Messergebnisse schwierig mit Literaturwerten auf Richtigkeit zu überprüfen.]^{Daniel}

[Der Versuch war schnell und einfach durchgeführt, leider war das Praktikums-skript bezüglich der Durchführung des Versuches wie reichlich oft ein bisschen ungenau.]^{Hauke}

³ Vorgängerprotokoll sind natürlich keine verlässliche Quelle, wurden jedoch zur Überprüfung unsere Ergebnisse verwendet.

20 Kennlinie der Vakuum-Diode

Versuch durchgeführt am 20. September 2005, Protokoll erarbeitet von Hauke Rohmeyer.

20.1 Einleitung

In diesem Versuch wird die Abhängigkeit des Stromes von einer anliegenden Spannung bei einer Vakuumdiode bestimmt. Diese Abhängigkeit wird ***Kennlinie*** genannt.

20.2 Theorie

20.2.1 Aufbau der Vakuumdiode

In einem evakuiertem Glaszylinder befindet sich ein Glühdraht, der als Kathode dient, und eine Anode. Führt man dem Glühdraht Energie zu [durch eine sog. Heizspannung], so beginnt dieser Elektronen zu emittieren. Je nach Material wird mehr oder weniger Energie benötigt um ein Elektron zu emittieren. Besonders gering ist die Austrittsarbeit bei Erdalkalimetallen, weswegen sie häufig in solchartigen Dioden verwendet werden.

Herrscht eine Spannung zwischen Kathode und Anode, so werden die emittierten Elektronen beschleunigt und zur Anode hingezogen. Eine solche Spannung nennt man ***Beschleunigungs-*** oder ***Anodenspannung*** [U_A].

Die Stärke des entstehenden Elektronenstrahls kann man über die Heizspannung U_H regeln.

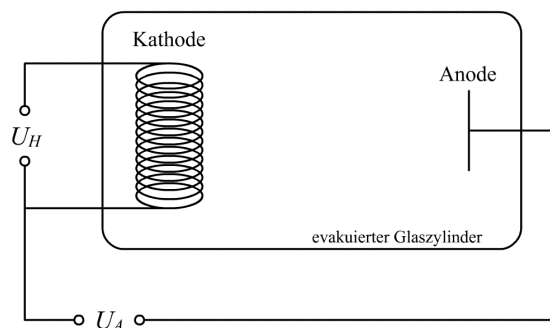


Abbildung 141: Aufbau der Vakuum-Diode

20.2.2 Anlaufstrom

Durch zufälliges Auftreffen von Elektronen auf die Anode entsteht auch bei nicht angelegter Beschleunigungsspannung ein sogenannter **Anlaufstrom**. Die Kennlinie des Anlaufstromes verhält sich nach dem hochenergetischen Teil der Maxwell-Verteilung:

$$I = I_0 \exp\left(\frac{e|U|}{k_B T}\right),$$

welche in diesem Bereich annähernd konstant verläuft.

Der Anlaufstrom ist von der Beschaffenheit des Kathodenmaterials abhängig. Ist die zu leistende Austrittsarbeit gering, so ist die Anzahl der Elektronen in der Diode groß und die Stromdichte j ebenfalls. Dieses Verhalten wird durch die **Richardson-Gleichung** beschrieben:

$$j = A_R T^2 \exp\left(\frac{-W_A}{k_B T}\right). \quad (20.1)$$

Hierbei ist A_R die materialspezifische Richardson-Konstante, T die Temperatur, k_B die Boltzmannkonstante und W_A die Austrittsarbeit.

20.2.3 Raumladungsgebiet

Mit steigender Beschleunigungsspannung kommen die Elektronen immer schneller von Kathode zu Anode und die Stromdichte j nimmt anfangs schnell zu. Gleichzeitig baut sich aber um die Anode eine Raumladung auf, da die Anode nicht alle Elektronen aufnehmen kann. Diese Raumladung wächst mit steigender Beschleunigungsspannung und wirkt dem Elektronenstrom entgegen. Der Anstieg des Elektronenstroms geht also mit höheren Spannungen zurück. Dieses Verhalten wird durch das **Schottky-Langmuir-Raumladungsgesetz** beschrieben:

$$j = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\left(\frac{2e}{m}\right)} \frac{(U_A - U_K)^{\frac{3}{2}}}{l^2} \quad (20.2)$$

Hierbei ist ε_0 die Dielektrizitätskonstante, U_A die Anodenspannung, U_K das Kontaktpotential, e die Elektronenladung, m die Elektronenmasse und l die Entfernung zwischen Anode und Kathode.

20.2.4 Sättigungsbereich

Ist die Anodenspannung groß, so werden fast alle emittierten Elektronen von der Anode aufgenommen. Für große Spannungen kann der Strom also nicht mehr zunehmen und strebt gegen einen konstanten Wert, den sogenannten **Sättigungsbereich** der Diode. Je nach Größe der Heizspannung bzw. der Kathodentemperatur steigt die Anzahl der vorhandenen Elektronen und somit auch der Sättigungsstrom. Um den Sättigungsbereich zu erreichen, muss man nun eine höhere Spannung anlegen, da mehr Elektronen aus der Kathode austreten, also auch mehr Elektronen von der Anode absorbiert werden müssen.

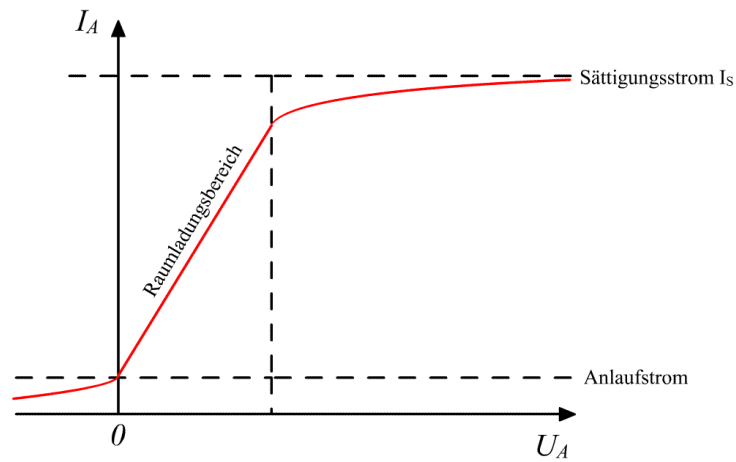


Abbildung 142: Theoretischer Verlauf der Kennlinie

20.3 Versuchsdurchführung

20.3.1 Versuchsaufbau

Die folgende Abbildung zeigt die Schaltskizze des Versuchsaufbaus.

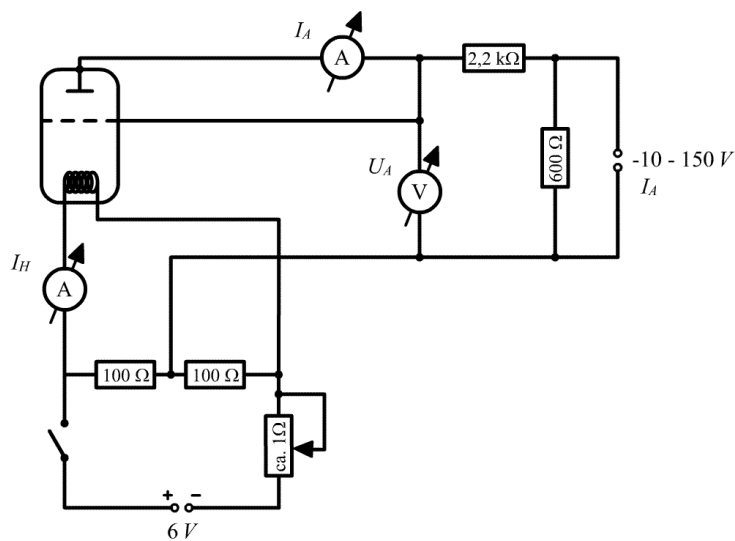


Abbildung 143: Schaltskizze des Versuches

20.3.2 Versuchsdurchführung

- (1) Der Versuch wird anhand der Schaltskizze [Abbildung 143] vorbereitet.
- (2) Für drei verschiedene Heizströme $[1,9\text{ A}, 2,0\text{ A}, 2,1\text{ A}]$ wird der Anodenstrom in Abhängigkeit von der Anodenspannung $[-10\text{ V} \leq U_A \leq 150\text{ V}]$

gemessen. Insbesondere soll hierbei der Anlaufstrom und die Spannung gemessen werden, bei welcher der Anodenstrom verschwindet. Um genauere Resultate zu erzielen, kann im unteren Messbereich [ca. -10 bis -2 V] das Analog-Ampèremeter verwendet werden. Im Raumladungsgebiet sollte die Schrittweite beim Verändern der Anodenspannung 2 V nicht überschreiten, im Sättigungsbereich kann sie erhöht werden.

- (3) Für $U_A = 125$ V wird der Sättigungsstrom in Abhängigkeit vom Heizstrom $[1,8\text{ A} \leq I_H \leq 2,15\text{ A}]$ gemessen. Es empfiehlt sich $\Delta I_H = 0,05\text{ A}$ zu wählen.
- (4) Die Innenwiderstände der Messinstrumente werden gemessen.

20.4 Auswertung

20.4.1 Kennlinie

Trägt man den Anodenstrom gegen die Anodenspannung auf, so erhält man die Kennlinie der Vakuum-Diode.

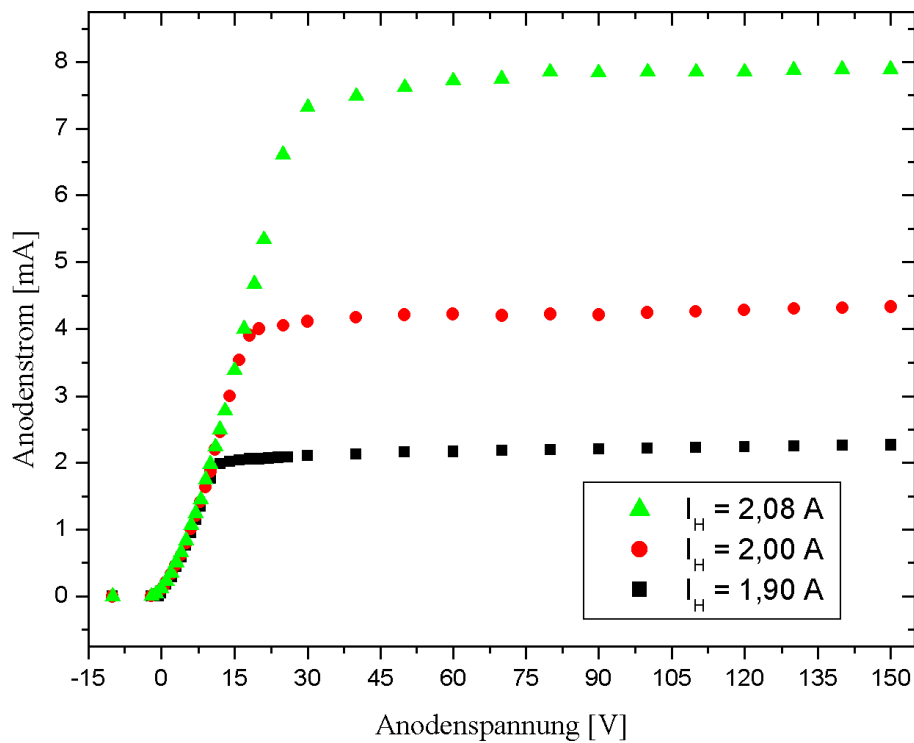


Abbildung 144: Kennlinie der Vakuum-Diode

20.4.2 Raumladungsgebiet

Mit $I = ja$ und $C := 4\varepsilon_0 a / (9l^2) \sqrt{2e/m}$ gilt nach Gleichung (20.2)

$$I = C(U_A - U_K)^{\frac{3}{2}}, \quad (20.3)$$

wobei a die Fläche ist, die der Strom durchdringt. Vernachlässigt man die Kontaktspannung gilt

$$I \sim U_A^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad I^{\frac{2}{3}} \sim U_A .$$

Es ergibt sich ein linearer Zusammenhang. Für die Auftragung wurden die Daten des Raumladungsgebietes abgegrenzt betrachtet, also diejenigen die im Graphen annähernd linear verlaufen.

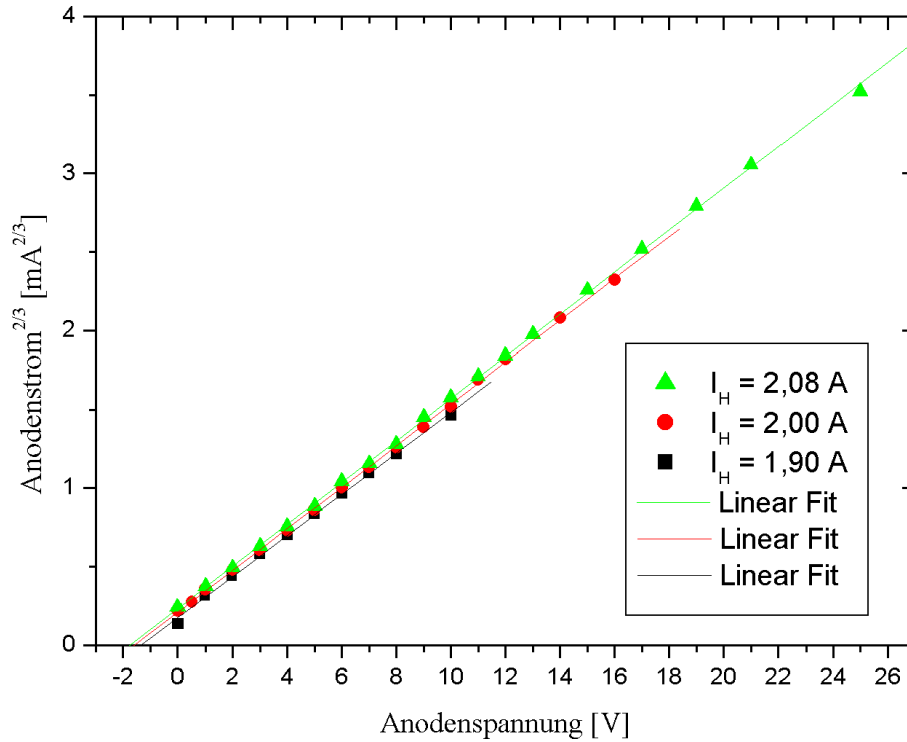


Abbildung 145: Berechnung der Kontaktspannung

Die Kontaktspannung ist nun diejenige, bei welcher der Anodenstrom verschwindet. Es gilt demnach

$$0 = m \cdot U_K + b \quad \Rightarrow \quad U_K = -\frac{b}{m} .$$

Der Fehler berechnet sich aus dem Fehler der linearen Regression mittels dem Gesetz der Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_{U_K} = \sqrt{\sigma_m^2 \frac{b^2}{m^4} + \sigma_b^2 \frac{1}{m^2}} .$$

Wir berechneten folgende Werte:

	$I_H = 1,90\text{ A}$	$I_H = 2,00\text{ A}$	$I_H = 2,08\text{ A}$
$m [mA^{\frac{2}{3}}/V]$	0.13073	0.13261	0.13354
$b [mA^{\frac{2}{3}}]$	0.17609	0.21027	0.23507
$U_K [V]$	-1.36	-1.59	-1.76
$\sigma_{U_K} [V]$	0.09	0.05	0.06

Es ergibt sich ein gewichteter Mittelwert von $U_K = -1,61\text{ V}$ mit einem Fehler von $\sigma_{U_K} = 0,04\text{ V}$.

20.4.3 Der Exponent im Raumladungsgesetz

Nach Gleichung (20.3) gilt $I = C(U_A - U_K)^{3/2}$. Bildet man nun den Logarithmus, so folgt

$$\begin{aligned}\ln(I) &= \ln(C \cdot (U_A - U_K)^{\frac{3}{2}}) \\ &= \ln C + \frac{3}{2} \cdot \ln(U_A - U_K) .\end{aligned}$$

Somit sollte eine doppelt logarithmische Auftragung von I_A gegen $(U_A - U_K)$ eine Gerade mit der Steigung $3/2$ ergeben.

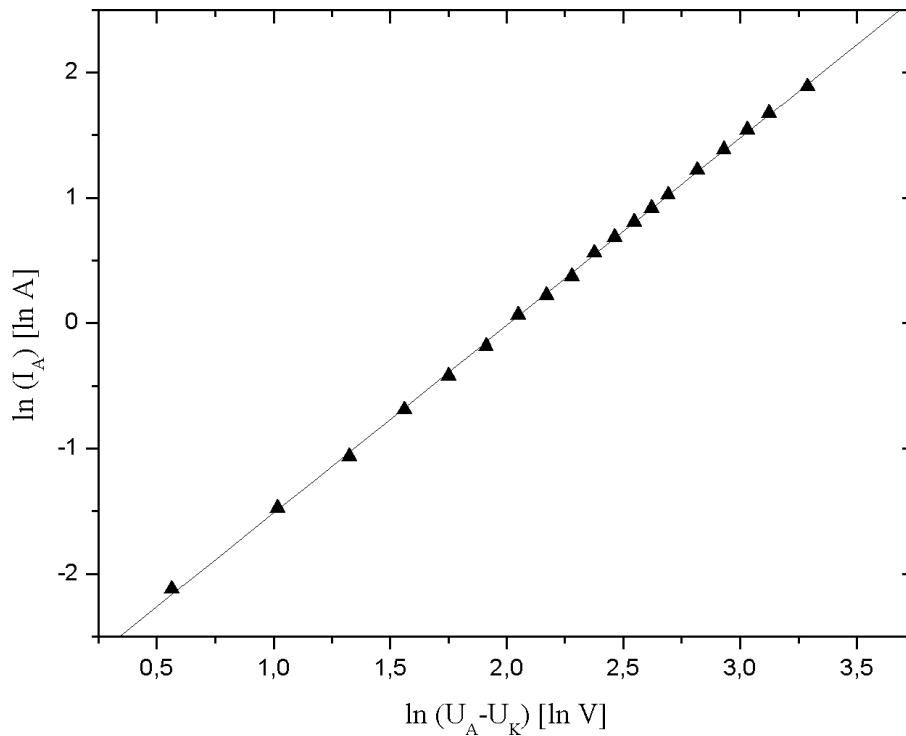


Abbildung 146: Berechnung des Exponenten im Raumladungsgesetz

In der obenstehenden Abbildung haben wir zur besseren Übersicht nur die Werte für den Heizstrom von $I_H = 2,08\text{ A}$ aufgetragen. Da der Verlauf der Graphen

im Raumladungsgebiet ähnlich ist, ist dieser Graph exemplarisch. Wir haben folgende Werte für den Exponenten errechnet:

	$I_H = 1.90 \text{ A}$	$I_H = 2.00 \text{ A}$	$I_H = 2.08 \text{ A}$
m	1.61024	1.47969	1.49525
σ_m	0.05704	0.00931	0.00679

Die Fehler σ_m stammen aus der linearen Regression. Es ergibt sich ein gewichteter Mittelwert von $m = 1,49$ mit einem Fehler von $\sigma_m = 0,1$.

20.4.4 Berechnung der Austrittsarbeit

Mit $I = ja$ gilt nach Gleichung (20.1)

$$I = a \cdot A_R \cdot T^2 \cdot e^{-\frac{W_A}{k_B T}}.$$

Setzt man nun $a \cdot A_R := C$, so folgt

$$\frac{I}{T^2} = C \cdot e^{-\frac{W_A}{k_B T}} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{I}{T^2}\right) = \ln C - \frac{W_A}{k_B} \frac{1}{T}.$$

Trägt man I_S/T^2 gegen $1/T$ halblogarithmisch auf, so ergibt sich eine Gerade mit der Steigung $m = W_A/k_B$. Somit folgt

$$W_A = -m \cdot k_B$$

mit der Boltzmann Konstante $k_B = 8,617385 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$ ¹. Die Temperatur der Kathode errechnet sich nach²

$$T = 579 \frac{\text{K}}{\text{A}} \cdot I_H + 1150,2 \text{ K}.$$

¹ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen.

² Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen.

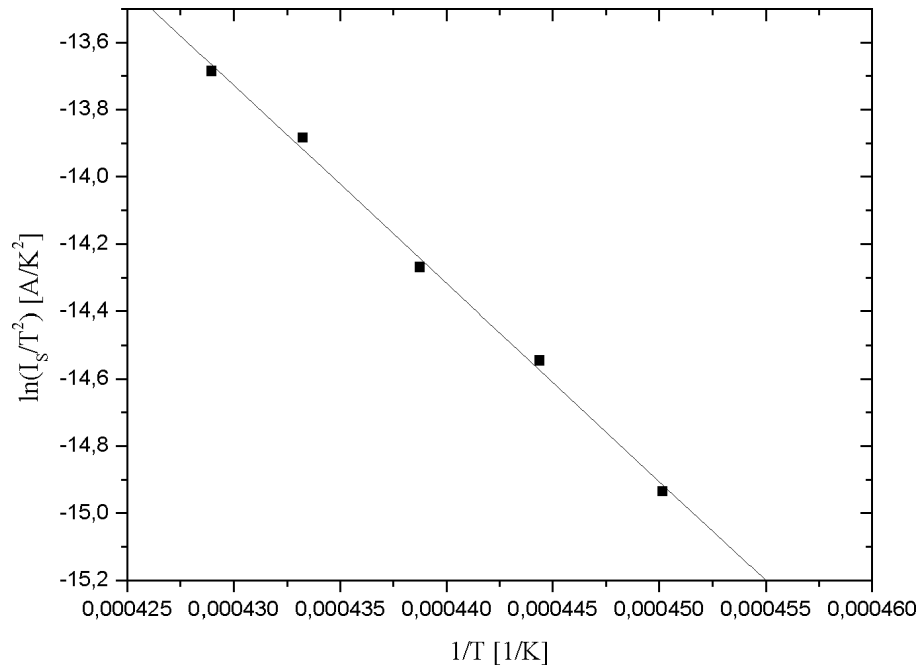


Abbildung 147: Berechnung der Austrittsarbeit

Die Gerade hat eine Steigung von $m = -58902$ [1/K] mit dem Fehler $\sigma_m = 1309$ [1/K]. Somit ergibt sich für die Austrittsarbeit

$$W_A = 5,08 \text{ eV}$$

mit einem Fehler von

$$\sigma_{W_A} = \sqrt{\sigma_m^2 \left(\frac{\partial W_A}{\partial m} \right)^2} = \sigma_m \cdot k_B = 0,13 \text{ eV}.$$

Der Literaturwert³ für die Austrittsarbeit bei Wolfram liegt bei $4,50 \text{ eV}$.

20.5 Diskussion

Der Fehler der verwendeten Messgeräte ist vernachlässigbar klein. Beim Voltmeter für den Heizstrom haben wir $10,5 \text{ M}\Omega$ gemessen. Da die Spannungsmessung bei einem Voltmeter über eine Strommessung erfolgt, versucht man den Innenwiderstand bei Voltmetern möglichst hoch zu halten. Der Strom der durch diesen Widerstand fließt, ist vernachlässigbar klein.

Die Innenwiderstände der Ampèremeter [$10,4 \Omega$ bzw. $99,8 \Omega$] können vernachlässigt werden, da sie mit wesentlich größeren Widerständen in Reihe geschaltet sind [siehe Abbildung 143].

³ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen.

Die gemessene Kennlinie der Diode weist alle Eigenschaften aus, die in der Theorie vorhergesagt wurden. Der Exponent des Raumladungsgesetztes liegt in unserem Fehlerbalken, die Austrittsarbeit weicht dagegen stark vom Literaturwert ab. Ein Vergleich mit den Vorgängerprotokollen ergab, dass unser Ergebnis jedoch auch schon von früheren Jahrgängen gemessen wurde.

Eigene Kommentare

[Der Versuch war gut und auch die Theorie war nett und nicht zu umfangreich. Die Auswertung ist im Bereich des Machbaren, anders wird es vermutlich bei Versuch 11 und vor allem bei Versuch 12 sein!]_{Daniel}

[Der Versuch war einfach, vor allem das Zusammenstecken des Versuchsaufbaus war toll. Leider war der Heizungsstrom nicht so leicht einzustellen und der Drehwiderstand war zu stark.]_{Hauke}

21 Der Transistor

Versuch durchgeführt am 08. Februar 2006, Protokoll erarbeitet von Hauke Rohmeyer.

21.1 Einleitung

Der Transistor ist das wichtigste Bauelement in den heutigen elektronischen Schaltungen. Es ist diejenige technische Funktionseinheit, die je von der Menschheit in den höchsten Gesamtstückzahlen produziert wurde. In diesem Versuch wollen wir sein Verhalten untersuchen, indem wir seine Kennlinien aufzeichnen und sein Verhalten in einem Schwingkreis beobachten.

21.2 Theorie

21.2.1 Elektronen in Festkörpern

Je nach spezifischem Widerstand ϱ eines Festkörpers, teilt man diese in verschiedene Gruppen ein:

- (1) Leiter: $\varrho < 10^{-8} \Omega m$
- (2) Halbleiter: $10^{-8} \Omega m < \varrho < 10^{16} \Omega m$
- (3) Isolatoren: $\varrho > 10^{16} \Omega m$.

Temperatur, Druck und andere äußere Einwirkungen können den spezifischen Widerstand eines Festkörpers verändern. So kann man zum Beispiel die Leitfähigkeit eines Halbleiters durch das Hinzufügen von Fremdatomen erhöhen [siehe 21.2.3].

Elektronen die an Atome gebunden sind, können sich nur auf diskreten Energieniveaus bewegen. Ab einer bestimmten Elektronenenergie, der **Ionisierungsgrenze** kann das Atom das Elektron nicht mehr an sich binden und das Elektron wird zu einem freien Elektron.

21.2.2 Das Bändermodell

Haben Atome einen großen Abstand zueinander, so sind ihre Zustände energetisch gleich. Verringert sich der Abstand zwischen ihnen, so entstehen unterschiedliche Zustände, der eine liegt energetisch tiefer, der andere höher als zuvor. Je größer die Anzahl der Atome ist, desto dichter liegen die Niveaus beieinander. In einem Festkörper ist die Anzahl der Atome sehr groß, während ihr

Abstand zueinander sehr klein ist. Die Energieniveaus liegen so dicht nebeneinander, dass man sie als **Band** bezeichnet. Es entstehen mehrere Bänder, die energetisch dicht oder weniger dicht beieinander liegen können. Sie können sich sogar überlappen.

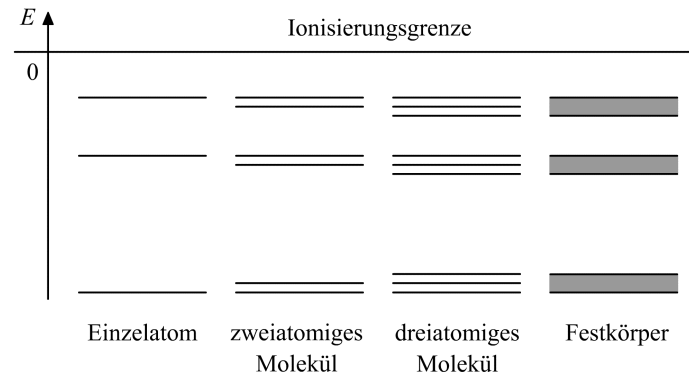


Abbildung 148: Veranschaulichung des Bändermodells.

Das energetisch niedrigste von Valenzelektronen vollständig besetzte Band wird **Valenzband** genannt, das energetisch niedrigste Band, in dem noch unbesetzte Zustände vorhanden sind nennt man das **Leitungsband**. Damit ein Strom fließt muss ein Elektron also in ein höheres Niveau gehoben werden. Ist dieses Band jedoch vollständig besetzt ist dies nicht möglich und die Elektronen können die „verbotene Zone“ nicht überspringen. Bei Leitern ist das Leitungsband also teilweise besetzt, oder das leere Leitungsband überlappt mit dem Valenzband, so dass schließlich wieder ein halb gefülltes Leitungsband entsteht. Bei Halbleitern und Isolatoren sind Leitungs- und Valenzband durch eine „verbotene Zone“ getrennt. Die Breite dieser Zone entscheidet über die Leitfähigkeit des Materials.

Bei Halbleitern ist das Leitungsband bei niedrigen Temperaturen leer. Bei Zimmertemperatur befindet sich eine bestimmte Anzahl von Elektronen aufgrund der thermischen Anregung im Leitungsband. Die Leitfähigkeit eines Halbleiters nimmt also im Gegensatz zu metallischen Leitern mit der Temperatur zu.

21.2.3 Dotierung

Halbleiter, die in technischen Gebieten Anwendung finden, sind meist keine **Eigenhalbleiter**, bei denen die Leitfähigkeit auf die Energiedifferenz zwischen Leitungs- und Valenzband beruht. Man benutzt sogenannte **dotierte Halbleiter**, bei denen Fremdatome gezielt in die Gitterstruktur des ursprünglichen Halbleiters eingebracht werden.

Abbildung 149 zeigt ein Siliciumgitter, in dem einige Siliciumatome durch Arsenatome ersetzt sind.

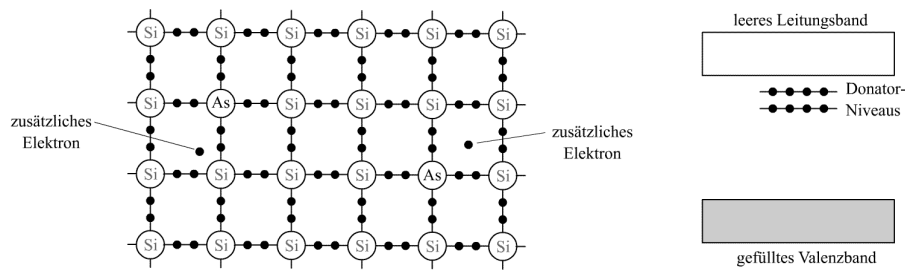


Abbildung 149: n-dotiertes Silicium.

Vier der fünf Valenzelektronen des Arsens werden vom Siliciumgitter gebunden. Das fünfte Elektron ist nur sehr schwach an das Arsenatom gebunden. Die zusätzlichen Elektronen bilden diskrete Energieniveaus dicht unter dem Leitungsband. Man spricht von den **Donator-Niveaus**, da sie durch geringe Energiezufuhr Elektronen in das Leitungsband abgeben. Bereits bei Raumtemperatur ist die Energie hoch genug und alle zusätzlichen Elektronen befinden sich im Leitungsband. Da der Stromfluss in diesem Fall hauptsächlich auf dem Transport von den negativen Elektronen basiert, spricht man von einem **n-dotierten Halbleiter**.

Bringt man dagegen Fremdatome wie z.B. Gallium in das Gitter ein, die ein Valenzelektron weniger haben als die Grundsubstanz, so wird das „fehlende“ Elektron durch eines aus dem Valenzband ersetzt. Somit sind die dicht über dem Valenzband liegenden Niveaus, die so genannten **Akzeptor-Niveaus**, leer.

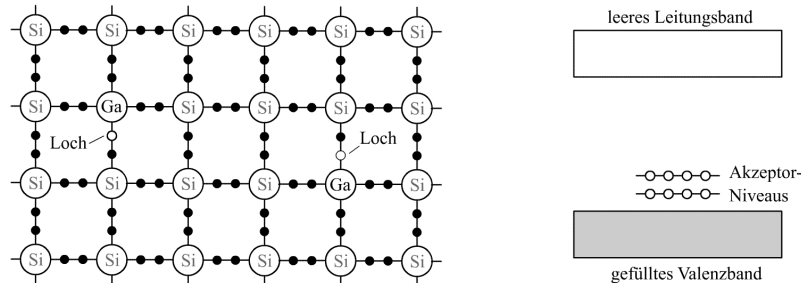


Abbildung 150: p-dotiertes Silicium.

Es entstehen also Löcher im Valenzband, die sich wie positive Ladungsträger verhalten. Deshalb spricht man in diesem Fall von einem **p-dotierten Halbleiter**.

21.2.4 Die Diode

In einer Diode sind n- und p- Halbleiter miteinander kombiniert. Meist wird hierzu ein Siliciumkristall auf einer Seite mit einem Donator und auf der anderen Seite mit einem Akzeptor dotiert. Dazwischen befindet sich die sogenannte **Übergangszone**.

Stehen ein n- und ein p-Halbleiter in engem Kontakt, so gleichen sich die unterschiedlichen Konzentrationen von Elektronen und Löchern in beiden Gebieten aus, so dass sich in dem Übergangsgebiet ein Gleichgewichtszustand einstellt. Es entsteht eine Ladungsdoppelschicht, wobei sich negative Ladungen auf der

p-Seite und positive Teilchen auf der n-Seite befinden. Die so entstandene Potentialdifferenz verhindert einen weiteren Ladungsfluß.

Wenn der positive Pol einer Spannungsquelle an die p-Seite der Diode angeschlossen ist, so verringert dies die Potentialdifferenz im Übergangsbereich und Strom kann fließen. Die Diode ist in **Durchlassrichtung** gepolt.

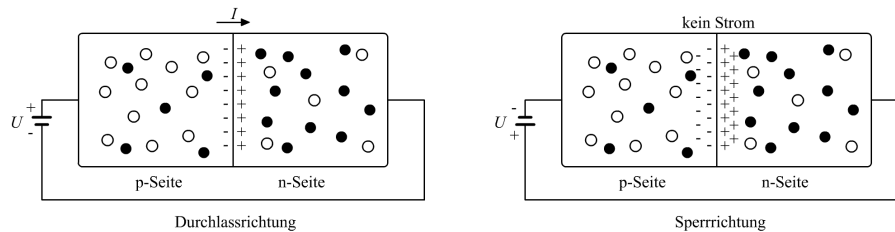


Abbildung 151: Durchlass- und Sperrrichtung bei Dioden.

Ist jedoch der negative Pol der Spannungsquelle an die p-Seite der Diode angeschlossen, so erhöht dies die Potentialdifferenz und die Diffusion der Ladungsträger wird weiterhin unterbunden. Die Diode ist in **Sperrrichtung** gepolt.

21.2.5 Der Transistor

Bipolarer Transistor

Ein Transistor besteht aus drei unterschiedlich dotierten Schichten. Bei einem pnp Transistor nennt man die oberste p-dotierte Schicht **Kollektor** [C], die darunterliegende sehr dünne n-dotierte Schicht **Basis** [B] und die unterste wiederum p-dotierte Schicht **Emitter** [E]. Bei einem npn Transistor sind die Dotierungen getauscht.

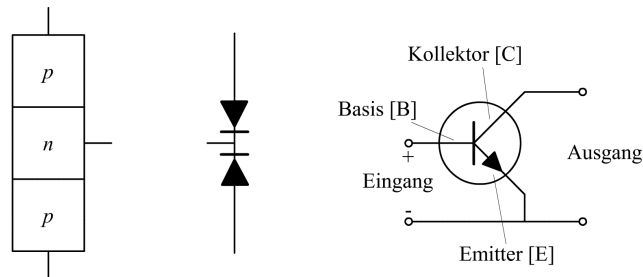


Abbildung 152: Transistor im Aufbau, Ersatzschaltbild und Transistor in Emitterschaltung.

Liegt nun eine Spannung U_{CE} zwischen Emitter und Kollektor an, so führt dies nicht zum Stromfluss, solange kein Basisstrom I_B fließt. Stellt man sich den Transistor als zwei hintereinander geschaltete Dioden vor¹, so sperrt die Diode Basis-Kollektor. Liegt jedoch auch eine Spannung U_{BE} zwischen Emitter und

¹ In der Praxis kann man einen Transistor aufgrund der so resultierenden dicken Basis nicht durch zwei Dioden ersetzen.

Basis an, so werden die Elektronen vom Emitter zur Basis so stark beschleunigt, dass sie genügend kinetische Energie besitzen, um durch die dünne Basis zum Kollektor zu gelangen. Es fließt also ein Kollektorstrom I_C . Ist die Basis positiv gepolt, so werden einige Elektronen von dieser „abgesogen“. Der Großteil gelangt jedoch vom Emitter zum Kollektor. Es fließt also ein kleiner Basisstrom und ein großer Kollektorstrom. Erhöht man U_{CE} , so erhöht sich auch I_C bis zu einem Sättigungsstrom.

Emitter- Basis und Kollektorschaltung

Man kann den Transistor auf verschiedene Arten in einen Stromkreis einbauen. Die jeweilige Schaltung hat jeweils einen Ein- und einen Ausgang. Je nachdem ob Emitter, Basis oder Kollektor sowohl Ein- als auch Ausgang ist, wird die Schaltung benannt. In Abbildung 152 handelt es sich demnach um eine Emitterschaltung.

Kennlinien des Transistors

Bei der Emitterschaltung steuert der Basis-Emitter-Strom I_B den Stromverstärkungsfaktor β , welcher das Verhältnis

$$I_C = \beta I_B$$

bei konstantem U_{CE} beschreibt. Trägt man nun I_C gegen I_B auf, so ergibt sich ein linearer Zusammenhang. Dies ist die **Stromverstärkungskennlinie**.

Die **Ausgangskennlinie** ist das Verhältnis von I_C zu U_{CE} mit dem Parameter I_B . Abbildung 153 zeigt charakteristische Kennlinien des Transistors.

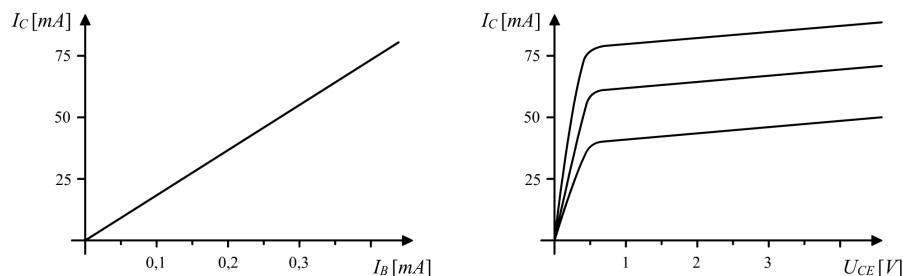


Abbildung 153: Stromverstärkungs- und Ausgangskennlinie in Emitterschaltung.

Den Bereich in der Ausgangskennlinie in dem I_C mit U_{CE} stark ansteigt, nennt man **Sättigungsbereich**. Der Bereich in dem I_C mit U_{CE} kaum noch ansteigt, jedoch stark von I_B abhängt ist der so genannte **aktive Bereich**. Verstärkerschaltungen arbeiten in diesem Bereich, damit das Ausgangssignal nicht zu stark verzerrt wird. Ein typischer Verstärker wie zum Beispiel in einem Walkman, besteht aus mehreren in Reihe geschalteten Transistoren. Damit lässt sich das sehr kleine Spannungssignal des Tonkopfes soweit verstärken, dass der Kopfhörer angesteuert werden kann.

Feldeffekttransistor

Der Feldeffekttransistor [FET] ist ein **unipolarer Transistor**. Im Gegensatz zum bipolaren Transistor transportiert der FET je nach Typ nur Löcher oder

Elektronen. Zur Unterscheidung vom bipolaren Transistor nennt man Emitter Basis und Kollektor beim FET Source [S], Gate [G] und Drain [D]. Der Vorteil des FET ist, dass am Gate kein Strom I_G fließt, der in der Mikroelektronik unerwünscht ist. Ein Isolator verhindert den Stromfluss zwischen Source und Gate. Das durch eine Spannung U_G erzeugte elektrische Feld regelt den Source-Drain-Strom I_{SD} .

21.2.6 Schwingkreis und Rückkopplung

Durch die Parallelschaltung von Spule und Kondensator bekommen wir einen LC Schwingkreis. Um diesen normalerweise gedämpften Schwingkreis als ungedämpft behandeln zu können, muss dem System im richtigen Zeitpunkt Energie zugeführt werden. Dies wird durch Rückkopplung erreicht. Der Transistor wird im Versuch über die Sekundärspule mit dem Schwingkreis gekoppelt. Durch die Kapazität des Rückkopplungskreises wird der Strom etwas verzögert. So wird mit Hilfe des Transistors dem System die durch die Dämpfung verlorene Energie wieder zurückgegeben. Die Impedanz des Kondensators ist gegeben durch

$$Z_C = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}.$$

Mit $\omega = 2\pi f$ kann die Frequenz f des Schwingkreises berechnet werden. Es gilt

$$f = \frac{I}{2\pi CU}. \quad (21.1)$$

Diese Formel wird in der Auswertung benötigt.

21.3 Durchführung

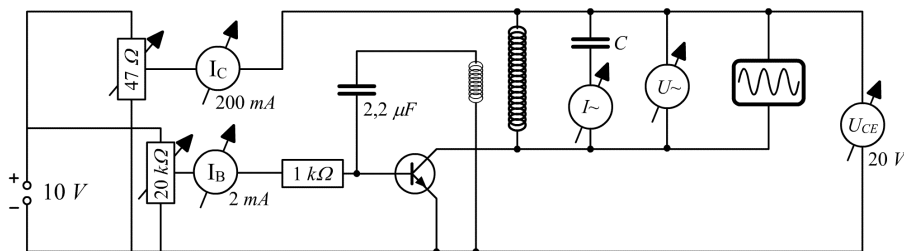


Abbildung 154: Versuchsaufbau.

- (1) Aufbau der Schaltung, siehe Abbildung 154.
- (2) Aufnahme der Kennlinien von I_C in Abhängigkeit von U_{CE} für die Basisströme $I_B = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5 \text{ mA}$. Es sollten besonders viele Messpunkte für kleine U_{CE} aufgenommen werden.
- (3) Aufnahme der Kennlinie von I_C in Abhängigkeit von I_B bei konstantem $U_{CE} = 8 \text{ V}$.
- (4) Einstellung des Arbeitspunktes $I_B = 0.4 \text{ mA}$ und $U_{CE} = 8 \text{ V}$ bei ausgeschalteter Schwingung.

- (5) Rückkopplung einschalten [Einführung der Rückkopplungsspule in die große Luftspule. Der Schwingungseinsatz wird am Ausschlag des Wechselstromminstrumentes beobachtet]. Mit dem Oszilloskop wird überprüft, ob die Schwingung sinusförmig verläuft. Tut sie dies nicht, so muss die Rückkopplungsspule umgepolt werden.
- (6) Für 7 Kondensatoren [$C \approx 0.09; 0.24; 0.50; 0.71; 0.96; 1.40; 2.12 \mu F$] sind Wechselstrom $I \sim$ und Wechselspannung $U \sim$ des Schwingkreises zu messen. Es ist darauf zu achten, dass die Messgeräte für Wechselstrom und Wechselspannung jeweils nur die Hälfte des Vollausschlages anzeigen. Die Rückkopplung muss also für jeden Kondensator neu eingestellt werden. Mit Hilfe des Oszilloskopes wird die jeweilige Schwingungsfrequenz oder Periodendauer der Schwingung bestimmt.
- (7) Die genauen Kapazitäten der verwendeten Kondensatoren werden gemessen.

21.4 Auswertung

21.4.1 Ausgangskennlinie

Für die fünf verschiedenen Basisströme sind die Messwerte von I_C in Abhängigkeit von U_{CE} in Abbildung 155 aufgetragen.

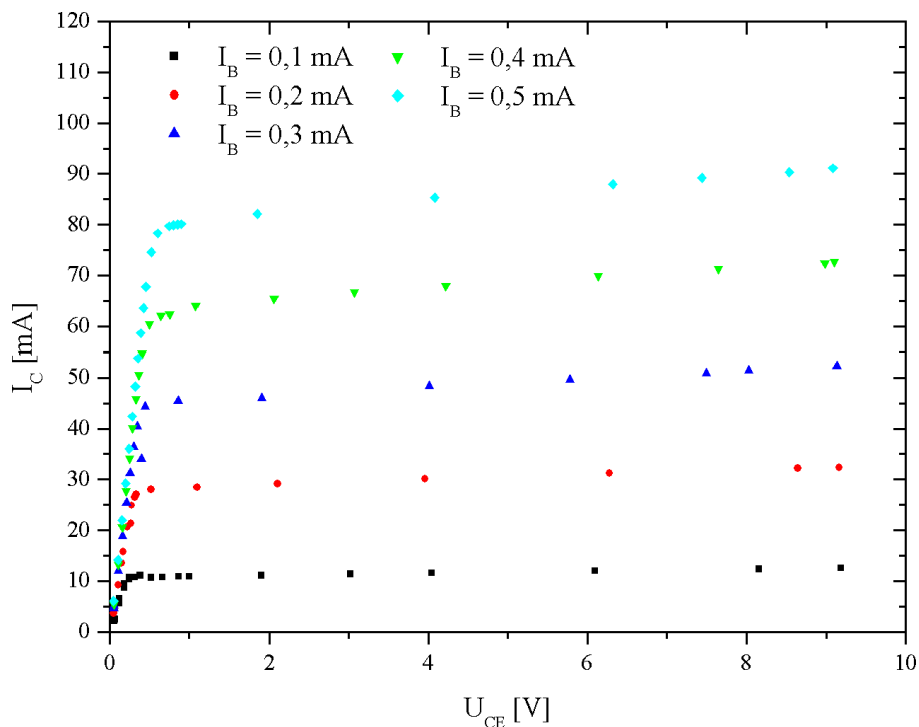


Abbildung 155: Messwerte für die Ausgangskennlinien.

21.4.2 Stromverstärkung

Um die Stromverstärkung $\beta = \Delta I_C / \Delta I_B$ am Arbeitspunkt [$I_B = 0,4 \text{ mA}$ und $U_{CE} = 8 \text{ V}$] zu berechnen, tragen wir I_C gegen I_B in Abbildung 156 auf. Die Stromverstärkung lässt sich dann an der Steigung einer Regressionsgeraden ablesen.

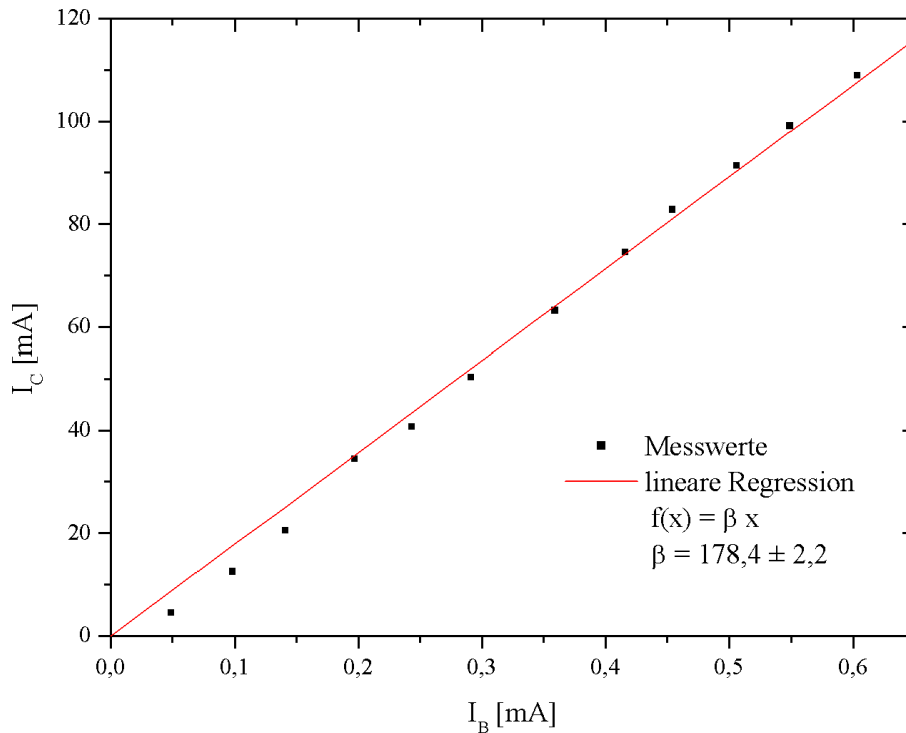


Abbildung 156: Stromverstärkungskennlinie.

Es ergibt sich eine Stromverstärkung von

$$\beta = 178,4 \pm 2,2.$$

21.4.3 Rückkopplungsschwingkreis

Nach Gleichung (21.1) gilt

$$f = \frac{I}{2\pi CU}.$$

Damit können wir die Frequenz des Schwingkreises berechnen. Die berechneten und gemessenen Werte stellen wir in Tabelle 21.1 dar.

In einem ungedämpften Schwingkreis gilt

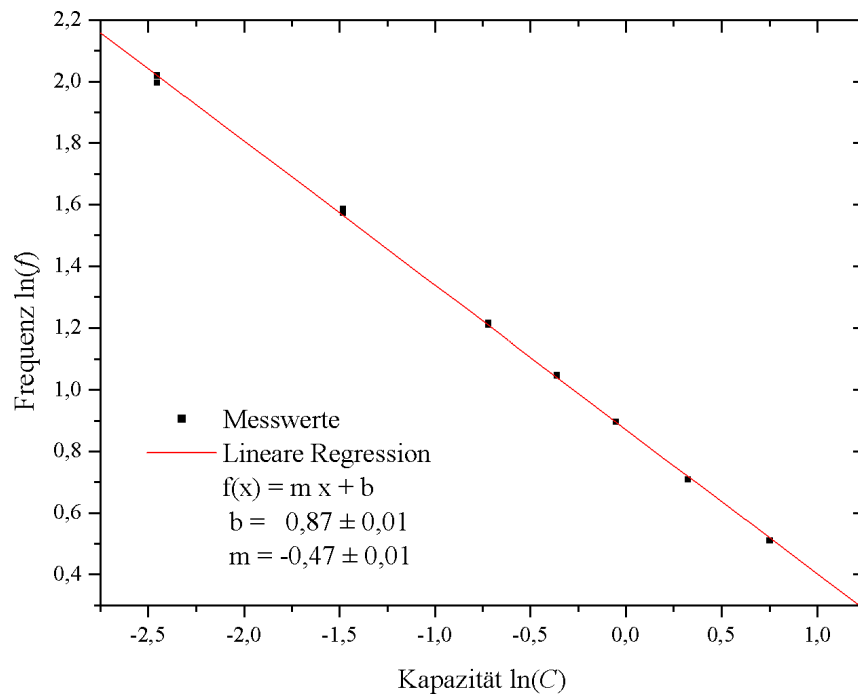
$$f = \frac{I}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ln(f) &= \ln\left(\frac{I}{2\pi\sqrt{LC}}\right) = \ln\left(\frac{I}{2\pi\sqrt{L}}\right) - \ln(\sqrt{C}) \\ &= -\frac{1}{2}\ln(C) + \ln\left(\frac{I}{2\pi\sqrt{L}}\right) \end{aligned} \quad (21.2)$$

$C [\mu F]$	$U \sim [V]$	$I \sim [mA]$	$f [kHz]$	f berechnet $[kHz]$
0,086	6,12	43,6	7,53	13,18
0,086	6,09	56	7,36	17,01
0,227	5,96	61,6	4,82	7,246
0,227	5,2	62	4,88	8,360
0,487	4,82	81,4	3,35	5,519
0,487	3,95	58	3,37	4,799
0,696	4,95	84	2,85	3,881
0,95	2,7	50	2,45	3,102
1,386	2,7	56	2,03	2,382
2,118	2,8	72	1,666	1,933

Tabelle 21.1: Berechnung der Frequenz des Schwingkreises.

Tragen wir nun die Schwingungsfrequenz f doppeltlogarithmisch gegen die Kapazität C des verwendeten Kondensators auf und führen eine lineare Regression durch, so erwarten wir wie in Gleichung (21.2) abzulesen ist, dass die Regressionsgrade eine Steigung von $-0,5$ hat.

Abbildung 157: Abhängigkeit von f und C - gemessene Werte.

Wir erhalten eine Steigung von

$$m = -0,47 \pm 0,01.$$

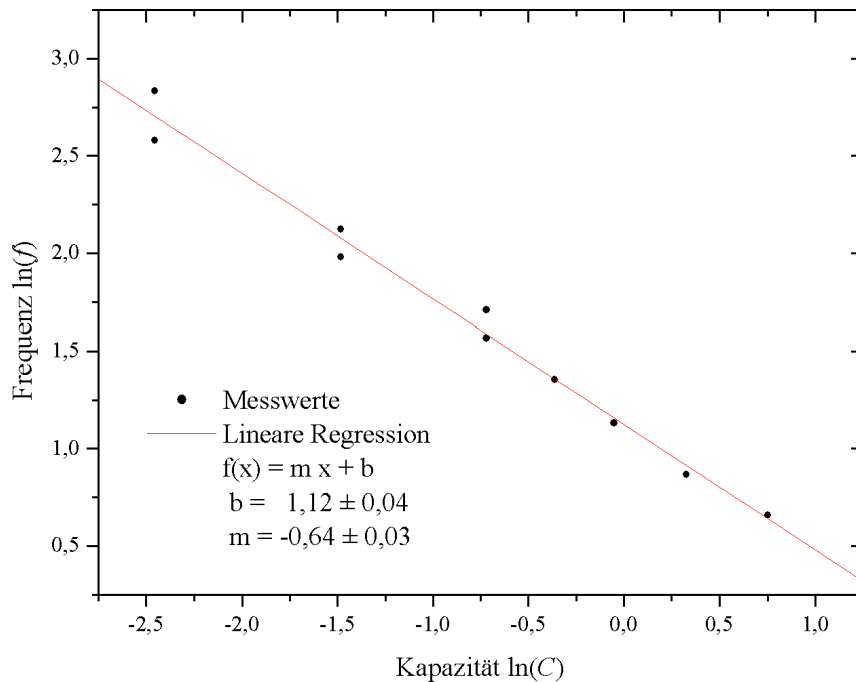


Abbildung 158: Abhängigkeit von f und C - berechnete Werte.

Bei den berechneten Werten von f erhalten wir eine Steigung von

$$m = -0,64 \pm 0,03.$$

21.5 Diskussion

21.5.1 Ausgangskennlinie

Wie erwartet zeigt sich in der Ausgangskennlinie für kleine U_{CE} ein stark nicht-lineares Verhältnis von I_C und U_{CE} . Mit zunehmender Spannung wird das Verhältnis nahezu linear.

21.5.2 Stromverstärkung

Es ergibt sich eine große Stromverstärkung mit kleinem Fehler. Es hat sich gelohnt abweichend vom Praktikumsskript mehr Messwerte aufzunehmen.

21.5.3 Rückkopplungsschwingkreis

Die starken Abweichungen der berechneten Frequenzen von denen mit dem Oszilloskop gemessenen Frequenzen können wir nur auf Ableseungenauigkeiten von $U \sim$ und $I \sim$ zurückführen. Die Steigungen der Regressionsgraden bestätigen, dass die am Oszilloskop gemessenen Werte genauer sind. Der erwartete Wert

von $m = -0,5$ liegt leider nicht im Fehlerbalken unserer Messung. Dies liegt wohl an den Messungenauigkeiten des Oszilloskops.

Eigene Kommentare

[Gut, dass man sich beim Aufbau von Schaltkreisen immer schön auf Hauke verlassen kann :). Versuch sonst etwas langweilig, aber Theorie recht interessant und Auswertung recht einfach.]_{Daniel}

[Ja, die Schaltung aufzubauen ist tatsächlich immer das Highlight eines jeden Versuches. Heute war mal wieder Fingerspitzengefühl gefragt, weil sich die Potentiometer nur sehr schlecht genau einstellen ließen. Die Auswertung war ein Traum, so könnte es öfter sein. Da ist der Lerneffekt auch gleich viel größer, wenn man sich nicht mit einer ewig langen Auswertung rumplagen muss. Und sogar bei der Theorie hab ich ne Menge gelernt.]_{Hauke}

22 Das Mikroskop

Versuch durchgeführt am 9. Februar 2006, Protokoll erarbeitet von Daniel Scholz.

22.1 Einleitung

Das Mikroskop wurde erstmals im Jahr 1673 von Anton van Leuvenhook gebaut und ist neben dem Fernrohr eines der grundlegendsten Instrumente der geometrischen Optik, welche in diesem Versuch studiert werden soll.

Es werden die Parameter untersucht und variiert, die die Vergrößerung eines Mikroskops beeinflussen. Außerdem werden das Auflösungsvermögen und die numerische Apertur eines Mikroskops behandelt.

22.2 Theorie

22.2.1 Brechung

Treten Wellen von einem Medium nicht lotrecht zur Begrenzungsfläche in ein anderes Medium über, in welchem eine andere Ausbreitungsgeschwindigkeit vorliegt, tritt Brechung ein. Beim Übertritt in ein *optisch dichteres* Medium, also in ein Medium, in dem die Ausbreitungsgeschwindigkeit geringer ist, erfolgt Brechung zum Lot hin, andernfalls vom Lot weg.

Der *Brechungsindex* n ist das Verhältnis von der Lichtgeschwindigkeit c im Medium und der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 , also

$$n = \frac{c_0}{c}.$$

Für zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 und den Lichtgeschwindigkeiten c_1 und c_2 im Medium gilt für die in Abbildung 159 gegebenen Winkel¹

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

¹ Zum Beweis siehe zum Beispiel Versuch 25: Fresnelsche Formeln und Polarisation.

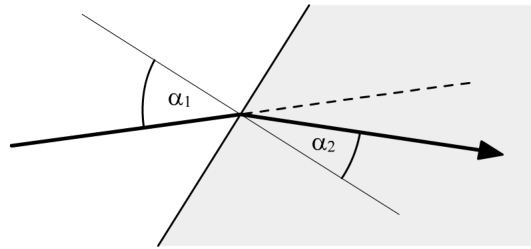


Abbildung 159: Strahlengang an der Grenzfläche zweier Medien mit unterschiedlichen Brechindizes.

22.2.2 Linsen

Linsen sind optische Geräte mit einer kugelförmigen Oberfläche, bei welchen der Effekt der Brechung genutzt wird. Das Material der Linsen hat dabei eine größere optische Dichte als die sie umgebende Luft. Desweiteren wird auch die Tatsache verwendet, dass eine Kugel überall die gleiche Krümmung hat. Man unterscheidet zwischen zwei Arten von Linsen: Den **Sammellinsen** oder **konvexen** Linsen und den **Streulinsen** oder **konkaven** Linsen.

Eine Sammellinse vereinigt achsparallele Strahlen in einem Punkt, welcher als **Brennpunkt** der Linse definiert wird. Der Abstand f des Brennpunktes F von der Linsenebene heißt **Brennweite** der Linse, der Kehrwert

$$D = \frac{1}{f}$$

wird **Brechkraft** genannt.

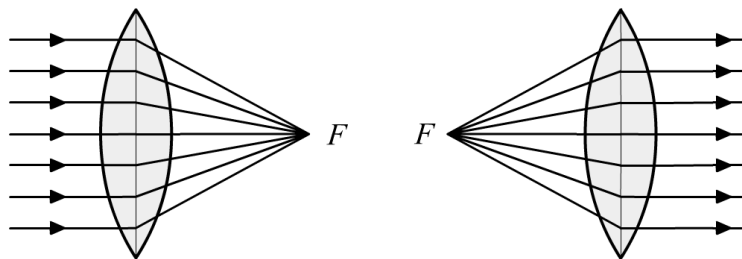


Abbildung 160: Strahlengang in einer Sammellinse.

Auch bei Konkavlinen kann man einen Brennpunkt definieren: Strahlen, welche auf den Brennpunkt zulaufen, werden so gebrochen, dass sie achsparallel werden.

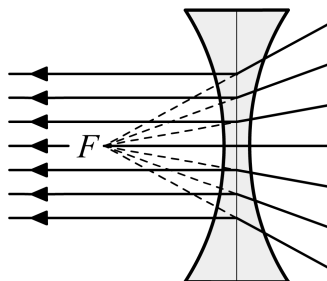


Abbildung 161: Strahlengang in einer Streulinse.

22.2.3 Virtuelle Bilder

Linsen erzeugen virtuelle Bilder.

Steht bei einer Sammellinse der zu betrachtende Gegenstand innerhalb der Brennweite der Linse, so entsteht ein aufrechtes vergrößertes virtuelles Bild, dass sich weiter als f hinter der Linse befindet. Die Linse bildet eine **Lupe**. Das Bild steht im Unendlichen hinter der Lupe, wenn der Gegenstand in der Brennebene liegt. Dann ist die Vergrößerung der Lupe $V = s_0/f$, dabei ist s_0 die **Bezugssehweite** $s_0 = 25\text{ cm}$, in der wir gerade noch angenehm scharf sehen können. Zieht man das Bild ins Endliche, indem man den Gegenstand ein wenig näher zur Linse bewegt, wächst die Vergrößerung nochmals, bis das Bild die Bezugssehweite erreicht. Die maximale Vergrößerung der Lupe ist damit

$$V = \frac{s_0}{f} + 1.$$

Steht der Gegenstand außerhalb der Brennweite, produziert eine Konvexlinse ein reelles spiegelverkehrtes kopfstehendes Bild.

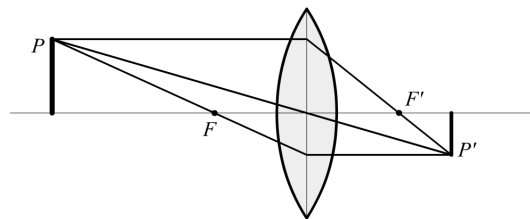


Abbildung 162: Virtuelles Bild einer Sammellinse.

Steht der Gegenstand innerhalb der doppelten Brennweite, so befindet sich sein vergrößertes Bild außerhalb der doppelten Brennweite. Steht der Gegenstand außerhalb der doppelten Brennweite, ist das Bild verkleinert und liegt zwischen f und $2f$ von der Linse entfernt.

Streulinzen produzieren verkleinerte virtuelle Bilder. Die von einem Gegenstand ausgehenden Lichtstrahlen scheinen von einem verkleinerten virtuellen aufrechtstehenden Gegenstand hinter der Linse zu stammen.

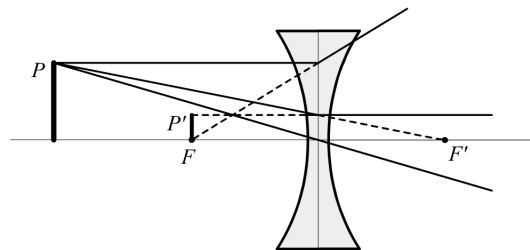


Abbildung 163: Virtuelles Bild einer Streulinse.

22.2.4 Das Mikroskop

Bei einem Mikroskop erzeugt eine Linse ein reelles Zwischenbild, welches dann durch eine Lupe betrachtet wird. Der Aufbau eines Mikroskops ist Abbildung 164 zu entnehmen.

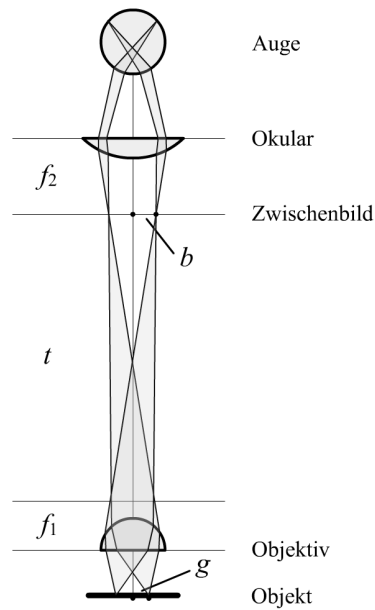


Abbildung 164: Aufbau eines Mikroskops.

Die Vergrößerung des Mikroskops setzt sich als Produkt aus den Vergrößerungen von **Okular** und **Objektiv** zusammen. Die Okularvergrößerung ist die einer Lupe, also

$$V_{Ok} = \frac{s_0}{f_{Ok}},$$

dabei ist f_{Ok} die Brennweite der Okularlinse und s_0 wieder die Bezugssehweite. Für das Objektiv und dessen Brennweite gilt

$$V_{Ob} = \frac{b}{g},$$

wobei b die **Bezugsweite** und g die **Gegenstandsweite** ist. Die Längen dieser Strecken sind auch Abbildung 164 zu entnehmen. Da der Gegenstand aber fast in der Brennebene des Objektivs liegt, ist das Zwischenbild fast ganz am Ende des **Tubus** zu finden, also

$$g \approx f_{Ob} \quad \text{und} \quad b \approx t,$$

womit wir

$$V_{Ob} \approx \frac{t}{f_{Ob}}$$

erhalten. Genaugenommen ist t dabei nicht die Länge des Tubus, sondern die um die Brennweite des Okulars reduzierte Tubuslänge, die sogenannte **optische Tubuslänge**. Damit wird die Mikroskopvergrößerung hinreichend gut durch

$$V = - \frac{t \cdot s_0}{f_{Ok} \cdot f_{Ob}}$$

beschrieben. Das Minuszeichen verdeutlicht, dass das Bild kopfstehend und spiegelverkehrt ist.

Das Mikroskop ähnelt damit dem Aufbau des Fernrohres. Dieses unterscheidet sich im Wesentlichen darin, dass die Brennweiten beider Linsen in einem Punkt zusammenfallen und einfallendes Licht von entfernten Objekten stammt, also annähernd parallel auftrifft.

22.2.5 Auflösungsvermögen und numerische Apertur

Das **Auflösungsvermögen** ist der kleinste Abstand zweier Punkte eines Objektes, die noch getrennt dargestellt werden können. Tritt Licht durch ein Gitter, so entstehen Beugungsmuster durch Interferenz [siehe Versuch 23: Das Prismen- und Gitterspektrometer]. Das Auflösungsvermögen wird auch über die **Rayleighsche Grenzlage** definiert: Zwei Objekte lassen sich unterscheiden, falls das nullte Beugungsmaximum der Wellenlänge des einen im ersten Beugungsminimum der des zweiten liegt.

Für eine naturgetreue Abbildung muss mindestens das nullte und erste Minimum per Objektiv beobachtbar sein. Dieses erste Minimum schließt ein Lichtbündel mit dem Öffnungswinkel φ ein, für das

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{g}$$

gilt, dabei ist λ die Wellenlänge und g der Linsenabstand. Das Auflösungsvermögen A ist damit der Kehrwert des minimalen Linsenabstandes g , also

$$A = \frac{1}{g} = \frac{\sin \varphi}{\lambda}.$$

Desweiteren hängt das Auflösungsvermögen von der Größe der **numerischen Apertur** N ab, die sich aus dem Brechungsindex n des Mediums und dem Winkel α zwischen dem äußeren Rand eines Lichtbündels und der optischen Achse ergibt:

$$N = n \cdot \sin \alpha.$$

Je größer die numerischen Apertur wird, desto geringer wird das Auflösungsvermögen des Aufbaus, da das Lichtbündel immer schmaler wird. Um diesen Verlust gering zu halten, werden große Differenzen der Brechungsindizes vermieden, indem etwa anstatt Luft eine **Immersionsflüssigkeit** wie zum Beispiel Zedernöl mit dem Brechungsindex $n = 1.5$ die Zwischenräume ausfüllt [siehe Abbildung 165].

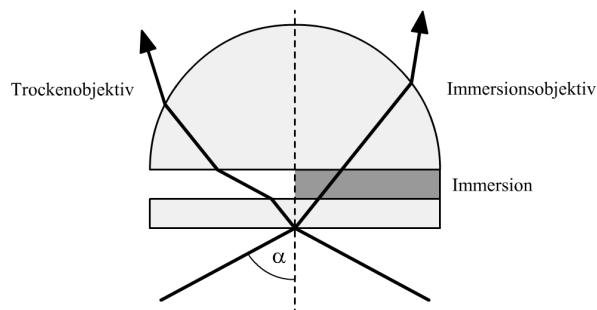


Abbildung 165: Strahlengang beim Trocken- und beim Immersionsobjektiv.

Die Immersion erlaubt größere Wellenlängen λ und das Auflösungsvermögen A hängt damit auch von der Wellenlänge ab: Mit abnehmender Wellenlänge steigt A an, es gilt

$$A = \frac{N}{\lambda} = \frac{n \cdot \sin \alpha}{\lambda}.$$

22.3 Versuchsdurchführung

Der Versuch gliedert sich in zwei Teile.

22.3.1 Versuchsteil 1

- (1) Es soll die Gesamtvergrößerung V eines Mikroskops zu zwei unterschiedlichen Objektiven bestimmt werden. Als Objekt dient dazu das Objektmikrometer, welches am Objektisch gespannt wird. Mittels eines Vergleichsmaßstabes wird die Vergrößerung bestimmt, drei Messungen für jedes Okular. Dabei wird mit einem Auge durch das Mikroskop geschaut, das andere Auge blickt auf den Vergleichsmaßstab. Die beiden Bilder werden so zur Deckung gebracht, und das Verhältnis der Skalenteile bestimmt. Die jeweiligen Einheiten sollten notiert werden.
- (2) Man entferne den Tubus samt Okular und ersetze ihn durch den Tubus mit verschiebbarer Mattscheibe. Durch Verschieben der Mattscheibe wird das Zwischenbild des Objektivs scharf gestellt. Man vermesse mit dem Meßschieber das Objektivbild zur zugehörigen Objektiv-Okular-Kombination.
- (3) Die verschiebbare Mattscheibe wird aus dem Tubus entfernt. Man vermesse nun die Objektivvergrößerung durch Messung der Zwischenbilder für beide Tubusse, nämlich durch das Auflegen der rechteckigen Mattscheibe auf den oberen Tubusrand und durch Auflegen der Mattscheibe auf dem unteren Rand bei abgenommenem Tubus. Die Länge der Tubusse wird gemessen und notiert.
- (4) Man eiche das Okularmikrometer an dem Objektmikrometer. Man nehme ein Haar, lege es zwischen zwei Objektträger und vermesse die Dicke des Haares. Drei Messungen aufnehmen.

22.3.2 Versuchsteil 2

- (1) Zunächst besteht der Versuchsaufbau nur aus einer Lichtquelle, dem Rotfilter, dem Glasmaßstab und einem Okular. Das Mikroskop wird auf den Glasmaßstab scharf eingestellt. Dann wird die Aperturblende [Spalt direkt vor dem Objektiv] so weit geschlossen, dass die Maßstabeinteilung gerade nicht mehr aufgelöst wird. Hierzu wird an der Rändelschraube gedreht, nachdem die Blende an dem kleinen Hebel weitgehend verschlossen wurde. Zur Bestimmung der Apertur dieser Anordnung wird zunächst der Abstand von Aperturblende und Gegenstand durch Verschieben des Spaltes bis zu dessen Scharfstellung bestimmt und anschließend wird die Spaltbreite mit dem Mikrometertrieb des Mikroskops ausgemessen. Es ist stets rotes Licht zu verwenden, dazu dient der Rotfilter vor der Lichtquelle.

- (2) Der Glasmaßstab und die Aperturblende werden aus dem Strahlengang entfernt, der Plexiglasmaßstab wird eingefügt. Das Mikroskop wird auf die polierte ebene Vorderseite des Plexiglasstabes scharf eingestellt. Dann wird das Okular durch eine Lochblende ersetzt, die, ganz eingesteckt, in der Ebene des Zwischenbildes liegt. Durch die Lochblende wird die auf der Rückseite des Plexiglasstabes eingeritzte Skala beobachtet und so der Bündeldurchmesser in der Skalaebene bestimmt [die sichtbaren Skalenteile werden abgezählt]. Zum Schluss wird noch die Länge des Plexiglasstabes gemessen.

22.4 Auswertung

22.4.1 Versuchsteil 1

Der Strahlengang in diesem Versuchsteil wird in Abbildung 166 gezeigt und ist damit dem Strahlengang eines üblichen Mikroskops, wie schon in Abbildung 164 vorgestellt, sehr ähnlich.

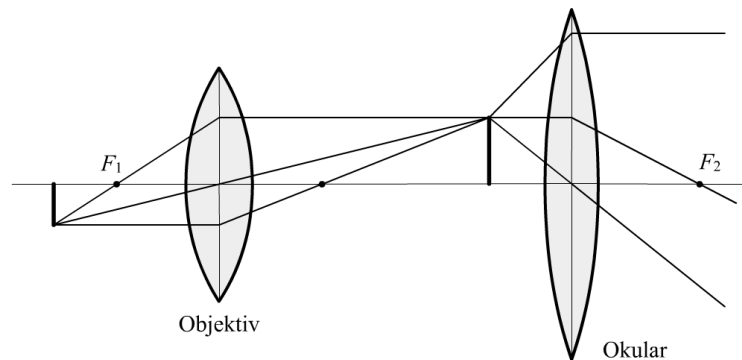


Abbildung 166: Strahlengang zum Versuchsteil 1.

Gesamt- und Okularvergrößerung

Wir unterscheiden die beiden verwendeten Okulare stets mit A und B . Die Gesamtvergrößerung des Mikroskops ergibt sich aus dem Verhältnis von der Abgeschätzten Längen aus Messung (1). Wir erzielten dabei die folgenden Mittelwerte:

$$V_A = 79.04 \pm 5 \quad \text{und} \quad V_B = 100.3 \pm 5.$$

Die Objektivergrößerung V_{Obj} kann nun durch Messung (2) bestimmt werden. Sie hängt natürlich nicht vom Okular ab, da wir das Zwischenbild jedoch zu beiden Okularen bestimmt haben, unterscheiden wir auch hier zwischen A und B :

$$V_{ObjA} = 10.2 \pm 0.5 \quad \text{und} \quad V_{ObjB} = 9.2 \pm 0.5.$$

Die Okularvergrößerung V_{Ok} ergibt sich nun aus V/V_{Obj} mit dem Fehler

$$\sigma_{V_{Ok}} = \sqrt{\left(\frac{1}{V_{Obj}\sigma_V}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_{Obj}^2\sigma_{V_{Obj}}}\right)^2}.$$

Wir erhalten damit die folgenden Ergebnisse:

$$V_{Ok_A} = 7.77 \pm 0.62 \quad \text{und} \quad V_{Ok_B} = 10.26 \pm 0.73.$$

Brennweite des Objektives

Die Vergrößerung des Objektives ist

$$V = \frac{b}{g},$$

wobei b die Bezugsweite und g die Gegenstandsweite beschreibt. Näherungsweise gilt für die Brennweite f für dünne Linsen gerade

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}.$$

Es sei V_{unten} die Objektivvergrößerung ohne Tubus und V_{oben} die Objektivvergrößerung mit Tubus, also

$$V_{unten} = \frac{b}{g} \quad \text{und} \quad V_{oben} = \frac{b+t}{g},$$

dabei ist t die Tubuslänge. Zusammen gilt für die Brennweite demnach

$$f = \frac{t}{V_{oben} - V_{unten}}$$

mit dem Fehler

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{t \cdot \sigma_{V_{oben}}}{(V_{oben} - V_{unten})^2}\right)^2 + \left(\frac{t \cdot \sigma_{V_{unten}}}{(V_{oben} - V_{unten})^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{V_{oben} - V_{unten}}\right)^2}.$$

Da wir zwei unterschiedliche Tubusse verwendet haben und somit unterschiedliche Werte für V_{oben} und für t erhalten, unterscheiden wir dies durch die Indizes C und D . Unsere Messwerte ergaben

$$\begin{aligned} V_{unten} &= 7.2 \pm 0.5, \\ V_{oben_C} &= 9.1 \pm 0.5, \\ V_{oben_D} &= 10.4 \pm 0.5, \\ t_C &= 91.4 \pm 2 \text{ mm}, \\ t_D &= 120.7 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$f_C = (46.5 \pm 16.7) \text{ mm} \quad \text{sowie} \quad f_D = (37.7 \pm 8.4) \text{ mm}$$

und als gewichteten Mittelwert

$$f = (39.5 \pm 7.5) \text{ mm}$$

für die Brennweite des Objektives.

Dicke unserer Haare

Aus der Eichung des Okularmikrometers ergibt sich der Faktor

$$p = \frac{0.81 \text{ mm}}{5 \text{ Skt}} = 0.162 \frac{\text{mm}}{\text{Skt}}$$

und damit haben wir folgende Dicken unserer Haare gemessen:

$$\begin{aligned} d_{\text{Daniel}} &= p \cdot 0.67 \text{ Skt} = 0.11 \text{ mm}, \\ d_{\text{Hauke}} &= p \cdot 0.27 \text{ Skt} = 0.043 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Hauke hat also sehr dünne Haare und die Dicke Daniels Haar entspricht den üblichen Angaben².

22.4.2 Versuchsteil 2**Theoretisches und gemessenes Auflösungsvermögen**

In diesem Versuchsteil haben wir zunächst eine Aufbau mit einem Strahlengang verwendet, wie er in Abbildung 167 skizziert wurde.

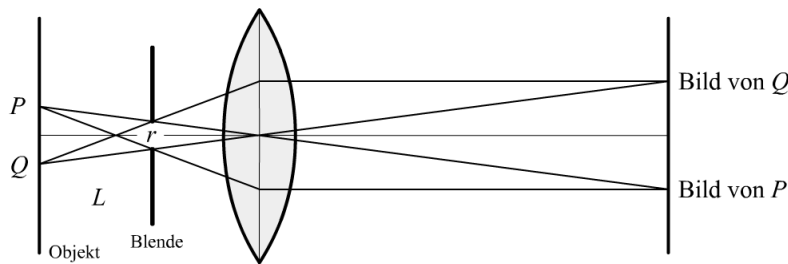


Abbildung 167: Strahlengang zum Versuchsteil 2.1.

Die Spaltbreite r der Blende haben wir mit

$$r = (0.03 \pm 0.02) \text{ mm}$$

vermessen. Den Abstand von Blende und Gegenstand haben wir mit

$$L = (32.0 \pm 3.0) \text{ mm}$$

aufgenommen. Für den verwendeten Öffnungswinkel φ gilt somit

$$\sin \varphi = \frac{r}{L} = 0.0009375.$$

Da wir rotes Licht und damit eine Wellenlänge von $\lambda = 650 \text{ nm}$ verwendeten und da der Brechungsindex von Luft ungefähr 1 ist, erhalten wir ein Auflösungsvermögen von

$$A = \frac{\sin \varphi}{\lambda} = \frac{r}{L \cdot \lambda} = (1.44 \pm 0.95) \text{ mm}^{-1},$$

² Nach Wikipedia: <http://de.wikipedia.org/wiki/Haar>. Aufgerufen am 9. Februar 2006.

dabei berechnet sich der Fehler aus

$$\sigma_A = \sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{L \cdot \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L \cdot r}{L^2 \cdot \lambda}\right)^2}.$$

Da die Skala auf dem Glasmaßstab 0.5 mm beträgt³, liegt das theoretische Auflösungsvermögen bei

$$A = \frac{1}{0.5\text{ mm}} = 2\text{ mm}^{-1}.$$

Damit haben wir keinen besonders guten Wert erzielt, aber immerhin liegt der wahre Wert im Fehlerbalken des gemessenen Auflösungsvermögens.

Apertur und Auflösungsvermögen

Wir wandelten den Versuchsaufbau leicht ab, um einen Strahlengang, wie er in Abbildung 168 gezeigt wird, zu erhalten.

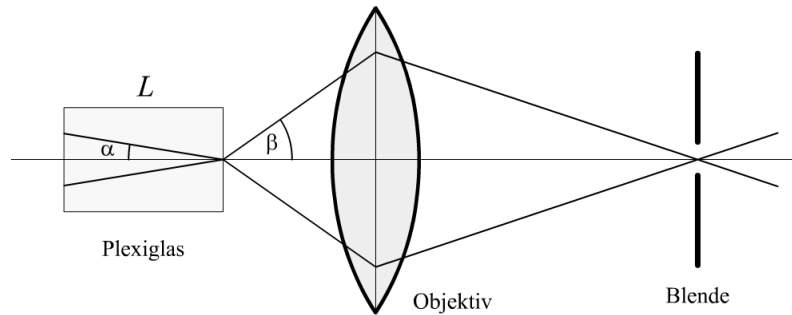


Abbildung 168: Strahlengang zum Versuchsteil 2.2.

In der Messung haben wir 12 Striche sehen können, was nach Praktikumsprotokoll genau $d = 6\text{ mm}$ entsprechen. Die Stablänge des Plexiglastabes betrug⁴ $L = 50\text{ mm}$ und der Brechindex von Plexiglas beträgt $n \approx 1.49$. Da jeweils nur die Bündelhälfte in Richtung von der Mittelachse weggeht, erhalten wir eine Apertur von

$$N = n \cdot \sin \varphi = n \cdot \frac{d/2}{\sqrt{L^2 + d^2/4}} = 0.089$$

und damit bei einer Wellenlänge von $\lambda = 650\text{ nm}$ das Auflösungsvermögen

$$A = \frac{N}{\lambda} = 137.2\text{ mm}^{-1}.$$

³ Nach Praktikumsprotokoll: Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 167.

⁴ Diesen Wert haben wir leider nicht selber gemessen, da nirgends in der Versuchsdurchführung notiert wurde, dass wir den Wert in der Auswertung benötigen. Wir haben ihn daher aus Vorgängerprotokollen übernommen. Der Versuchsaufbau bei unseren Vorgängern war definitiv der gleiche.

22.5 Diskussion

22.5.1 Versuchsteil 1

Gerade die groben Schätzungen mit dem Auge zu Beginn von Versuchsteil 1 ergeben eine große Fehlerquelle. Umso erstaunlicher sind die doch sehr guten Ergebnisse. Die angegebene Okularvergrößerung betrugen

$$V_{Ok_A} = 8 \quad \text{und} \quad V_{Ok_B} = 10.$$

Damit haben wir mit

$$V_{Ok_A} = 7.77 \pm 0.62 \quad \text{und} \quad V_{Ok_B} = 10.26 \pm 0.73$$

erstaunlich gute Werte berechnet, und das, obwohl wir total lustlos an den Versuch rangegangen sind. Sowohl die Brennweite als auch die bestimmten Haardicken liegen im zu erwartenden Bereich.

22.5.2 Versuchsteil 2

In diesem Versuchsteil haben kleine Abweichungen bei der Spaltbreite der Blende zu großen Abweichungen geführt. Dummerweise war gerade dieser Wert auch schwer zu ermitteln und somit birgt dieser eine besondere Fehlerquelle. Trotzdem erzielten wir den Umständen entsprechenden gute Werte.

Weiter haben wir gesehen, dass das Auflösungsvermögen für Plexiglas bedeutend größer ist.

Eigene Kommentare

[Man hatte ich schlechte Laune während des Versuchs, hat ja mal auch Null Spaß gemacht. Wieder einmal dran gezweifelt, ob ich wirklich Physiklehrer werden will :). Auswertung war dafür angenehmer als erwartet, Beschreibungen im Skript aber total fürn Arsch.]_{Daniel}

[Und wieder einmal versagt das Praktikumsskript auf ganzer Linie.]_{Hauke}

23 Das Prismen- und Gitterspektrometer

Versuch durchgeführt am 10. Februar 2006, Protokoll erarbeitet von Hauke Rohmeyer.

23.1 Einleitung

Bei der Spektrographie wird Licht in seine Wellenlängen aufgeteilt und die Intensität bzw. Existenz einzelner Wellenlängen gemessen. Durch die Analyse des Spektrums kann man zum Beispiel den Aufbau eines leuchtenden Gases feststellen.

Bei diesem Versuch werden zwei Methoden der Spektrographie insbesondere nach ihrem Auflösungsvermögen verglichen. Eine Quecksilberdampfampe, deren Spektrum klar unterscheidbare Linien hat, wird hierbei als Lichtquelle verwendet.

23.2 Theorie

23.2.1 Kohärentes Licht und Huygensches Prinzip

Nach dem *Huygenschen Prinzip* ist jeder Punkt einer sich ausbreitenden Wellenfront Quelle einer Kugelwelle, einer so genannten Elementarwelle. Die Wellenfront breitet sich durch Überlagerung all dieser Elementarwellen aus.

Beide Spektrographen verlangen die Arbeit mit *kohärentem Licht*, d.h. einzelne Lichtwellen dürfen keine Phasenverschiebung zueinander haben. Hierfür wird das Licht durch einen [infinitesimal] kleinen Spalt gebündelt. Der Spalt ist dann nach dem Huygenschen Prinzip Quelle einer Elementarwelle, die natürlich keine Phasendifferenz zu sich selber haben kann. Durch eine zweite Linse entsteht ein paralleles Strahlbündel mit kohärentem Licht.

23.2.2 Auflösungsvermögen von Spektrometern

Um das Auflösungsvermögen eines Spektrometers zu definieren, betrachtet man den Ablenkungswinkel γ in Abhängigkeit der Wellenlänge λ und definiert die Winkeldispersion D durch

$$D = \frac{d\gamma}{d\lambda}. \quad (23.1)$$

Um das Bild nun scharf zu bekommen, macht man den in das Spektrometer eintretenden Strahl möglichst schmal. Dabei tritt allerdings der Effekt eines Beugungsmusters auf. Für einen Lichtstrahl der Wellenlänge λ ist der Winkelabstand $\Delta\alpha$ zwischen dem nullten Beugungsmaximum und dem ersten Beugungsminimum nach (23.16) und (23.17) [siehe unten] gegeben durch

$$\Delta\alpha = \frac{\lambda}{N \cdot d} \quad \Leftrightarrow \quad N \cdot d \cdot \Delta\alpha = \lambda. \quad (23.2)$$

Im Falle eines Prismas ist d hier die Breite des Spaltes und $N = 1$. Im Falle des Gitters ist d die Gitterkonstante und N die Anzahl der beleuchteten Gitteröffnungen. Ein weiterer Lichtstrahl mit Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda$ wird nun um den Winkel $\Delta\gamma$ anders gebrochen, als der erste. Mit $D = d\gamma/d\lambda$ kann man $\Delta\gamma$ nähern durch

$$\Delta\gamma = D \cdot \Delta\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta\gamma}{D} = \Delta\lambda. \quad (23.3)$$

Ist $\gamma(\lambda)$ linear, so ist diese Näherung sogar exakt. Nach dem Rayleigh-Kriterium können zwei Linien eines Interferenzmusters noch aufgelöst werden, wenn das nullte Beugungsmaximum der einen Wellenlänge in das erste Beugungsminimum der anderen fällt. Es muss also gelten:

$$\Delta\gamma \geq \Delta\alpha.$$

Das Auflösungsvermögen A ist durch den Extremfall $\Delta\gamma = \Delta\alpha$ und

$$A := \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

definiert. Es gilt also nach (23.2) und (23.3)

$$A = \frac{d \cdot \Delta\alpha}{\Delta\gamma/D} = N \cdot d \cdot D. \quad (23.4)$$

23.2.3 Prismenspektrometer

Brechungsgesetz nach Snellius

Die Geschwindigkeit des Lichtes ist abhängig von dem Medium in dem es sich ausbreitet. In dieser Tatsache liegt der Grund dafür, dass Licht an der Grenzfläche zwischen zwei Materialien gebrochen wird. Der Brechungsindex n eines Materials ist definiert durch

$$n := \frac{c_0}{c}, \quad (23.5)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit in dem Material und c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Im Allgemeinen ist c [und damit auch n] von der Wellenlänge λ abhängig.

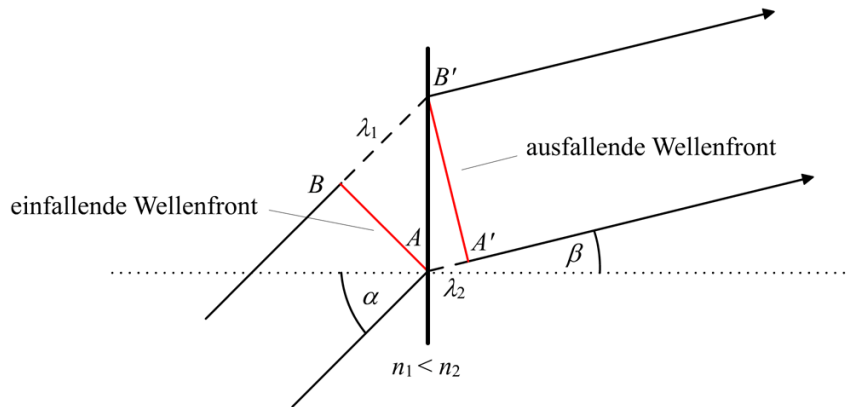


Abbildung 169: Brechungsgesetz nach Snellius.

Um das **Snelliussche Brechungsgesetz** herzuleiten, betrachten wir den Grenzübergang von einem Material mit geringerem Brechungsindex n_1 in ein Material mit höherem Brechungsindex n_2 [es gilt also $n_1 < n_2$, siehe auch Abbildung 169]. Der Lichtstrahl habe die Wellenlänge λ_1 im ersten Medium und λ_2 im zweiten. Er trifft mit Winkel α auf die Grenzfläche. Desweiteren sei T die Periodendauer der Lichtwelle. Es gilt also nach Gleichung (23.5)

$$\lambda_i = \frac{c_0}{n_i} \cdot T \quad \text{für } i = 1, 2. \quad (23.6)$$

Wir betrachten einen Zeitpunkt t_0 , zu welchem ein Punkt der Wellenfront des Lichtstrahls gerade auf die Grenzfläche am Punkt A trifft. Und einen weiteren Punkt B , welcher in Ausbreitungsrichtung den Abstand λ_1 zur Grenzfläche hat. Nach der Zeit T hat sich B nach B' bewegt und es gilt $|B - B'| = \lambda_1$. A kann sich aber nur bis zu einem Punkt A' bewegen, bei welchem $|A - A'| = \lambda_2$ gilt. Die Wellenfront liegt nun zwischen A' und B' und hat den Winkel β zur Grenzfläche. Aus Abbildung 169 geht hervor, dass

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot |A - B'| = \lambda_1$$

und

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot |A - B'| = \lambda_2$$

gilt. Daraus folgt mit (23.6)

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}. \quad (23.7)$$

Dies ist das Brechungsgesetz nach Snellius. Im Normalfall hängt der Brechungsindex eines Materials von der Wellenlänge λ ab. Daher schreiben wir auch $n = n(\lambda)$. Verschiedene Wellenlängen werden also verschieden stark gebrochen.

Fraunhofersche Formel

Ein Prisma ist ein Körper mit der Grundfläche eines gleichschenkligen Dreiecks. Der Winkel ε zwischen den gleichlangen Seiten nennt sich brechender Winkel. Die ihm gegenüber liegende Kante nennt sich Basis.

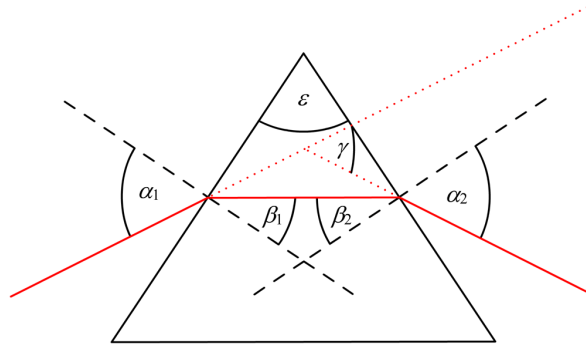


Abbildung 170: Strahlengang durch ein Prisma.

Abbildung 170 zeigt den Strahlengang durch ein Prisma und definiert die Winkel α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , ε und γ . Es gilt

$$\pi = \varepsilon + \frac{\pi}{2} - \beta_1 + \frac{\pi}{2} - \beta_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \beta_1 + \beta_2. \quad (23.8)$$

Damit folgt für den Gesamtablenkungswinkel γ

$$\gamma = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon. \quad (23.9)$$

Soll γ minimal sein, muss also gelten

$$0 = \frac{d\gamma}{d\alpha_1} = 1 + \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = -1. \quad (23.10)$$

Außerdem gilt immer wegen (23.8)

$$\beta_1 = \varepsilon - \beta_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\beta_1}{d\beta_2} = -1. \quad (23.11)$$

Im Allgemeinen gilt wegen (23.7) für $i = 1, 2$

$$\sin(\alpha_i) = n_p \sin(\beta_i) \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha_i) d\alpha_i = n_p \cos(\beta_i) d\beta_i,$$

wobei n_p der Brechungsindex des Prismas ist und vorausgesetzt wurde, dass der Brechungsindex von Luft durch $n_{\text{Luft}} \approx 1$ angenähert werden kann. Division ergibt mit (23.10) und (23.11)

$$\frac{\cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_2)} \cdot \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = \frac{\cos(\beta_1)}{\cos(\beta_2)} \cdot \frac{d\beta_1}{d\beta_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_2)} = \frac{\cos(\beta_1)}{\cos(\beta_2)}.$$

Mit (23.7) erhält man

$$\frac{1 - \sin^2(\alpha_1)}{1 - \sin^2(\alpha_2)} = \frac{\cos^2(\alpha_1)}{\cos^2(\alpha_2)} = \frac{\cos^2(\beta_1)}{\cos^2(\beta_2)} = \frac{1 - \sin^2(\beta_1)}{1 - \sin^2(\beta_2)} = \frac{n_p^2 - \sin^2(\alpha_1)}{n_p^2 - \sin^2(\alpha_2)}.$$

Für $n_p \neq 1$ ist diese Gleichung nur für $\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha$ erfüllt. Damit gilt natürlich auch $\beta_1 = \beta_2 =: \beta$. Das bedeutet, dass das Prisma symmetrisch durchleuchtet wird. Für diesen einfachen Fall folgt mit (23.8)

$$\sin\left(\frac{\gamma + \varepsilon}{2}\right) = \sin(\alpha) = n_p \cdot \sin(\beta) = n_p \cdot \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Also gilt die Fraunhofersche Formel

$$n_p = \frac{\sin\left(\frac{\gamma + \varepsilon}{2}\right)}{\sin(\varepsilon/2)}. \quad (23.12)$$

Dispersion und Auflösungsvermögen

Man nennt $dn/d\lambda$ die **Dispersion** des Materials. Gilt $dn/d\lambda > 0$, so wird die Dispersion **normal** genannt. Gilt $dn/d\lambda < 0$ bezeichnet man sie als **anormal**. Natürlich ist jetzt auch der Brechungswinkel γ für verschiedene Wellenlängen λ verschieden. Es gilt nach (23.12) und (23.1)

$$\begin{aligned} D &= \frac{d\gamma}{d\lambda} = \frac{d\gamma}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = \left(\frac{dn}{d\gamma} \right)^{-1} \frac{dn}{d\lambda} \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{\cos(\frac{\gamma+\varepsilon}{2})}{\sin(\varepsilon/2)} \right)^{-1} \frac{dn}{d\lambda} = 2 \frac{\sin(\varepsilon/2)}{\cos(\frac{\gamma+\varepsilon}{2})} \frac{dn}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (23.13)$$

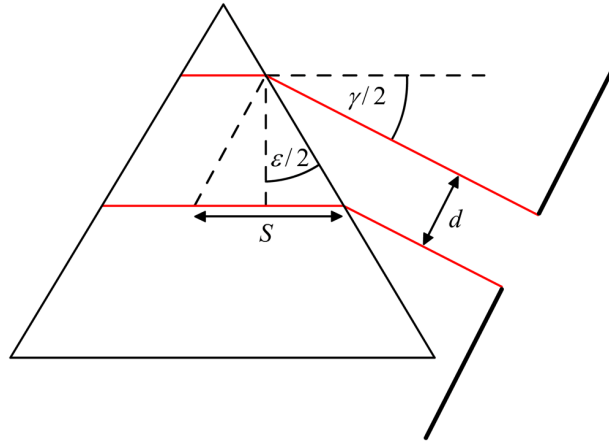


Abbildung 171: Effektive Basislänge.

Abbildung 171 definiert die effektive Basislänge S eines Strahlengangs der Breite d durch ein Prisma. Für den Winkel ϕ zwischen $\varepsilon/2$ und $\gamma/2$ gilt

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon + \gamma}{2}.$$

Für die Länge l der vom Licht erfassten Prismakante gilt also

$$l = \frac{d}{\cos(\pi/2 - \phi)} = \frac{d}{\cos(\frac{\varepsilon + \gamma}{2})}.$$

Mit l ergibt sich für S

$$\frac{S}{2} = \sin(\varepsilon/2) \cdot l = \sin(\varepsilon/2) \cdot \frac{d}{\cos(\frac{\varepsilon + \gamma}{2})}$$

und somit

$$S = 2 \cdot d \cdot \frac{\sin(\varepsilon/2)}{\cos(\frac{\varepsilon + \gamma}{2})}.$$

Mit (23.13) ergibt sich nach (23.4) für das Auflösungsvermögen A_{Prisma} des Prismas

$$A_{\text{Prisma}} = D \cdot d = S \frac{dn}{d\lambda}. \quad (23.14)$$

23.3 Gitterspektrometer

23.3.1 Beugung

Schickt man kohärentes Licht auf ein Gitter mit Gitterkonstante d [der Abstand zwischen zwei Öffnungen], so geht von jeder [vereinfacht infinitesimal kleinen] Gitteröffnung nach dem Huygensches Prinzip eine Kugelwelle aus. Diese Kugelwellen interferieren miteinander und erzeugen ein Beugungsmuster. Damit die Interferenz positiv ist, muss der Gangunterschied zweier aus benachbarten Lücken kommenden Lichtstrahlen ein Vielfaches der Wellenlänge λ sein [siehe auch Abbildung (172)].

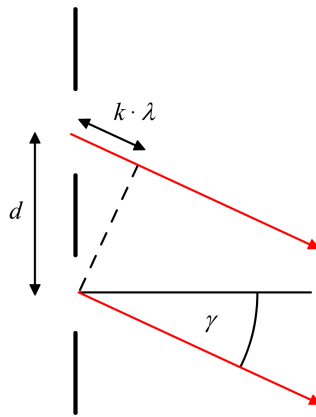


Abbildung 172: Beugung am Gitter.

Die Winkel, unter denen konstruktive Interferenz stattfindet, werden **Hauptmaxima** genannt. Für den Winkel γ_k des k -ten Hauptmaximums gilt also

$$\sin(\gamma_k) \cdot d = k \cdot \lambda. \quad (23.15)$$

Wir betrachten nun den Fall, dass der Gangunterschied λ/N ist, wobei N die Anzahl der beleuchteten Gitteröffnungen ist. Nummerieren wir die Gitteröffnungen von einer Seite zur anderen aufsteigend mit $1 \dots N$. Für jede Öffnung $k \leq N/2$ gibt es nun eine Öffnung $k + N/2$. Zwischen diesen Öffnungen ist der Gangunterschied

$$\frac{N}{2} \cdot \frac{\lambda}{N} = \frac{\lambda}{2}.$$

Die beiden Öffnung löschen sich also destruktiv aus. Damit interferieren alle Kugelwellen destruktiv. Diese Winkel werden **Hauptminima** genannt. Es gilt für den Winkel β_k des k -ten Hauptminimums

$$\sin(\beta_k) \cdot d = \frac{k \cdot \lambda}{N}. \quad (23.16)$$

Wenn man einen Einzelspalt der Breite d betrachtet, kann man ihn mit einem Gitter mit zwei Öffnungen [die beiden Hälften des Spaltes] vergleichen. Die Gitterkonstante ist dann $d/2$. Die Anzahl N der Öffnungen ist 2. Somit gilt mit der Näherung $\sin(\gamma) \approx \gamma$ für den Winkel γ des ersten Beugungsminimums

$$\gamma \cdot \frac{d}{2} = \frac{\lambda}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \cdot d = \lambda. \quad (23.17)$$

Diese Beziehung wurde weiter oben benutzt.

Auflösungsvermögen

Nach (23.1) und (23.15) gilt mit der Näherung $\sin(\gamma) \approx \gamma$ für die Winkeldispersion D_k des k -ten Hauptmaximums

$$D_k = \frac{d}{d\lambda} \frac{k}{d} \cdot \lambda = \frac{k}{d}.$$

Damit gilt bei Betrachtung des k -ten Hauptmaximums für das Auflösungsvermögen des Gitters

$$A_{\text{Gitter},k} = D_k \cdot N \cdot d = N \cdot k. \quad (23.18)$$

23.4 Durchführung

23.4.1 Prismenspektrometer

Mit der Kondensorlinse, einem Beleuchtungsspalt und einer zweiten Linse wird das Licht der Hg-Dampflampe parallel auf eine dritte Linse gerichtet, welche den Beleuchtungsspalt scharf auf das Okular abbildet. Das Okular wird auf den durchgehenden Strahl eingestellt. Dann werden alle Abstände auf der optischen Achse notiert. Nacheinander wird jedes der drei verwendeten Prismen [Kronglas, leichtes Flintglas, schweres Flintglas] in den Strahlengang gebracht, wobei folgende Schritte durchgeführt werden:

- (1) Der Ablenkungswinkel einer der gelben Linien wird bestimmt.
- (2) Mit dem Feintrieb wird die Winkeldifferenz zur grünen Linie bestimmt.
- (3) Der Abstand zwischen Okular und der dritten Linse wird notiert.
- (4) Ein zweiter Spalt wird zwischen die zweite Linse und das Prisma gebracht und der einfallende Strahl wird verkleinert, bis die beiden gelben Linien des Spektrums nicht mehr voneinander zu trennen sind.
- (5) Der zweite Spalt wird bei geradem Strahlengang an die Stelle des ersten gebracht und ein Rotfilter wird eingesetzt. Nun wird die Breite der roten Linie mit dem Feintrieb über das Okular bestimmt.

Die Prismen sind alle gleichseitig mit einer Basislänge von 6 cm.

23.4.2 Gitterspektrometer

Der Aufbau entspricht dem des Prismenspektrometers, wobei statt der Prismen ein Glasgitter [Breite $b = 1,5 \text{ cm}$] verwendet wird. Die folgenden Messungen werden jeweils für die erste, vierte und achte Ordnung durchgeführt:

- (1) Die Ablenkungswinkel der gelben, grünen und violetten Doppellinie werden bestimmt.
- (2) Die Winkeldifferenz zwischen den gelben Linien und zwischen einer gelben und der grünen werden bestimmt.

- (3) Vor das Gitter werden verschiedene Spalte mit fester Breite gesetzt. Diejenige Spaltbreite wird notiert, bei der die gelben Linien nicht mehr voneinander zu trennen sind.

23.5 Auswertung

23.5.1 Das Prismenspektrometer

Strahlengänge

Abbildung 173 zeigt die Strahlengänge im Versuch.

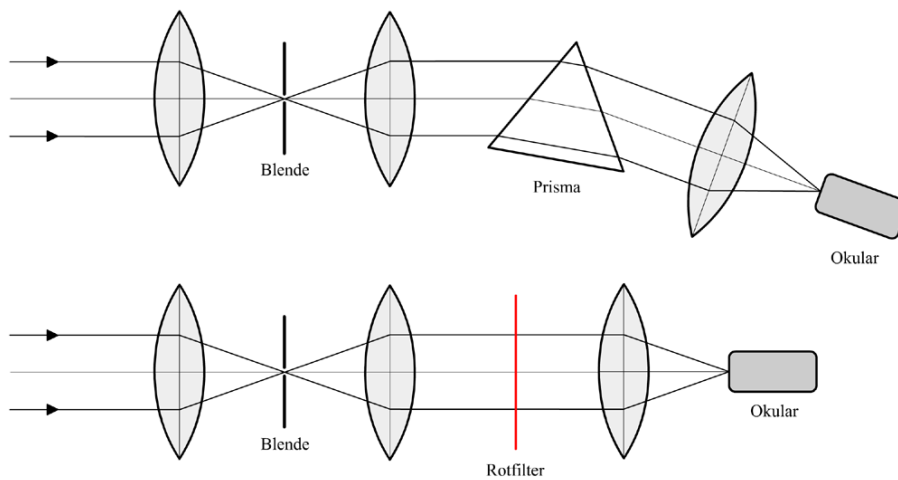


Abbildung 173: Strahlengang.

Der obere Teil stellt den Verlauf für die Messung mit dem Prisma dar, der untere Teil zeigt den Strahlengang bei der Bestimmung der Spaltbreite.

Wellenlängen der Emissionslinien von Quecksilber

In Tabelle 23.1 ordnen wir den [für unsere Auswertung relevanten] Wellenlängen der Emissionslinien von Quecksilber Indizes zu, so dass wir im Folgenden auf diese referenzieren können.

Wellenlänge	Farbe
$\lambda_1 = 579,07 \text{ nm}$	gelb
$\lambda_2 = 576,96 \text{ nm}$	gelb
$\lambda_3 = 546,07 \text{ nm}$	grün
$\lambda_4 = 407,78 \text{ nm}$	violett

Tabelle 23.1: Beobachtete Emissionslinien von Quecksilber.

Ablenkwinkel

Ohne das Prisma im Strahlengang haben wir den Drehtisch in Nullage gedreht und den Spalt mit dem Feintrieb im Fadenkreuz des Okulars zentriert. Somit müssen wir die Ablenkwinkel der gelben Linie φ_1 nicht um ihre Nullposition korrigieren. Da der Nonius eine Skala von $0,1^\circ$ hat, gehen wir von einem Ablesefehler von $\sigma_{\varphi_1} = 0,05^\circ$ aus.

Durch einfache Geometrieüberlegungen ergibt sich der Unterschied des Ablenkungswinkel $\Delta\varphi_{1,3}$ zwischen der gelben und der grünen Linie durch

$$\Delta\varphi_{1,3} = \arctan\left(\frac{|F_0 - F_1|}{d}\right),$$

wobei F_0 und F_1 die Nullposition und die eingestellte Position des Feintriebs sind und d der Abstand zwischen dem Okular und Linse 3. Wir nehmen an, dass $\sigma_d = 5\text{ mm}$ gilt. Den Fehler des Feintriebes vernachlässigen wir. Der Fehler des Unterschieds des Ablenkungswinkels berechnet sich dann durch das Gesetz der Fehlerfortpflanzung mit

$$\sigma_{\Delta\varphi_{1,3}} = \sqrt{\sigma_d^2 \left(\frac{\partial\Delta\varphi_{1,3}}{\partial d}\right)^2} = \frac{\sigma_d \cdot |F_0 - F_1|}{d^2 \left(1 + \frac{|F_0 - F_1|^2}{d^2}\right)}.$$

Somit gilt nach der Fehlerfortpflanzung $\sigma_{\varphi_3} = \sigma_{\varphi_1} + \sigma_{\Delta\varphi_{1,3}}$. Tabelle 23.2 zeigt die berechneten Ablenkungswinkel.

	$\varphi_1 [^\circ]$	$\sigma_{\varphi_1} [^\circ]$	$\Delta\varphi_{1,3} [^\circ]$	$\varphi_3 [^\circ]$	$\sigma_{\varphi_3} [^\circ]$
Kronglas	38,90	0,05	0,13	39,03	0,06
leichtes Flintglas	48,50	0,05	0,31	48,81	0,06
schweres Flintglas	60,00	0,05	0,44	60,44	0,06

Tabelle 23.2: Ablenkungswinkel der Prismenspektrometer.

Winkelabstand der gelben Linien

Wir nehmen an, dass die Winkeldispersion konstant ist. Dann gilt

$$\frac{\Delta\varphi_{1,2}}{\Delta\lambda_{1,2}} = \text{const.} = \frac{\Delta\varphi_{1,3}}{\Delta\lambda_{1,3}}.$$

Daraus folgt

$$\Delta\varphi_{1,2} = \frac{\Delta\varphi_{1,3}}{\Delta\lambda_{1,3}} \Delta\lambda_{1,2} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3} \Delta\varphi_{1,3}.$$

Der zugehörige Fehler ergibt sich mit der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{\Delta\varphi_{1,2}} = \sigma_{\varphi_{1,3}} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3},$$

dabei haben wir die Wellenlängen der Emissionslinien als exakt angenommen. In Tabelle 23.3 stellen wir unsere Ergebnisse dar.

	Kronglas	leichtes Flintglas	schweres Flintglas
$\Delta\varphi_{1,2} [^\circ]$	$0,008 \pm 0,001$	$0,020 \pm 0,001$	$0,027 \pm 0,001$

Tabelle 23.3: Winkelabstand der gelben Emissionslinien.

Winkeldispersion der Prismen

Mit der Winkeldifferenz $\Delta\varphi_{1,3}$ berechnen wir die Winkeldispersion der drei Prismen. Es gilt

$$D = \frac{\Delta\varphi_{1,3}}{\Delta\lambda_{1,3}}.$$

Durch die Angaben des Herstellers¹ über die Winkeldispersion $\Delta\varepsilon = \varepsilon_F - \varepsilon_C$, wobei ε_F der Austrittswinkel einer Welle mit $\lambda = 480\text{ nm}$ und ε_C derjenige für eine Welle mit $\lambda = 643,8\text{ nm}$ ist, können wir Vergleichswerte berechnen. In Tabelle 23.4 stellen wir die berechneten Werte der Winkeldispersion zusammen. Dabei bezeichnen die mit H. gekennzeichneten Spalten die Herstellerangaben. Hinter den herkömmlichen Namen der Prismen sind die Materialbezeichnungen des Herstellers vermerkt.

	$D [\frac{rad}{m}]$	H. $\Delta\varepsilon$	H. $D [\frac{rad}{m}]$
Kronglas [N-BK7]	68786 ± 1055	$0^\circ 42' 51''$	76096
leichtes Flintglas [N-F2]	165451 ± 2455	$1^\circ 51' 51''$	180873
schweres Flintglas [N-SF10]	230264 ± 3253	$3^\circ 00' 05''$	380096

Tabelle 23.4: Winkeldispersionen der Prismenspektrometer.

Dispersion der Prismen

Stellt man (23.13) nach $dn/d\lambda$ um, so erhält man einen direkten Zusammenhang zwischen der Dispersion und der Winkeldispersion. Es gilt

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{D \cos((\varphi + \varepsilon)/2)}{2 \sin(\varepsilon/2)}.$$

Dabei ist $\varepsilon = 60^\circ$ der brechende Winkel des Prismas und φ der Gesamtablenkungswinkel. Die berechneten Werte stellen wir in Tabelle 23.5 zusammen.

Auflösungsvermögen

Um das Auflösungsvermögen der Prismenspektrometer bestimmen zu können, müssen wir zunächst die Breite desjenigen Spaltes berechnen, bei dem die beiden

¹ http://www.linios-katalog.de/pdf/de05/04-094-097_d05.pdf, aufgerufen am 12.02.2006.

	$D \left[\frac{rad}{m} \right]$	$\varphi_1 [^\circ]$	$\frac{dn}{d\lambda} [mm^{-1}]$	H. $\frac{dn}{d\lambda} [mm^{-1}]$
Kronglas	68786	38,9	44718 ± 686	49471
leichtes Flintglas	165451	48,5	96665 ± 1434	117587
schweres Flintglas	230264	60	115132 ± 1626	190048

Tabelle 23.5: Dispersionen der Prismenspektrometer.

gelben Linien gerade noch voneinander unterscheidbar waren. Die Vergrößerung V unseres System ergibt sich durch

$$V = \frac{\text{Bildweite}}{\text{Gegenstandsweite}} = \frac{f_3 - f_{\text{Okular}}}{f_2}.$$

Da wir die Brennweite des Okulars nicht kennen, setzen wir $d := f_3 - f_{\text{Okular}}$, wobei d der Abstand zwischen Linse 3 und dem Okular ist. Da weiterhin der von uns verwendete Spalt nicht richtig funktionierte, haben wir nur einen Wert für das schwere Flintglas erhalten. Der Fehler der Vergrößerung ergibt sich durch

$$\sigma_V = \frac{\sigma_d}{f_2}.$$

Wir nehmen f_2 als exakt an und schätzen $\sigma_d = 5 \text{ mm}$. Damit erhalten wir $V = 35,4 \text{ cm} / 35 \text{ cm} \approx 1,012 \pm 0,02$. Wir maßen eine Breite von $B' = 0,89 \text{ mm}$, somit ergibt sich die wahre Spaltbreite B zu

$$B = V \cdot B' = 0,90 \pm 0,02 \text{ mm}.$$

Wieder ergibt sich der Fehler durch die Fehlerfortpflanzung, wobei wir $\sigma_{B'}$ vernachlässigen.

Die theoretische Auflösung $A_{\text{theor.}}$ berechnet sich nach (23.14) mit

$$A_{\text{theor.}} = S \frac{dn}{d\lambda} = 2 \cdot B \cdot \frac{\sin(\varepsilon/2)}{\cos\left(\frac{\varepsilon+\varphi}{2}\right)} \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|.$$

Dabei ist $\varepsilon = 60^\circ$ der brechende Winkel des Prismas und φ der Gesamtablenkungswinkel. Der zugehörige Fehler berechnet sich nach der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{A_{\text{theor.}}} = \sqrt{\sigma_B^2 \left(\frac{\partial A}{\partial B} \right) + \sigma_{\text{Disp.}}^2 \left(\frac{\partial A}{\partial \text{Disp.}} \right) + \sigma_\varphi^2 \left(\frac{\partial A}{\partial \varphi} \right)}.$$

Wir erhalten ein theoretisches Auflösungsvermögen von

$$A_{\text{theor.}} = 207,3 \pm 4,6.$$

Das tatsächliche Auflösungsvermögen, d.h. das Auflösungsvermögen, welches das Prismenspektrometer mindestens hat, berechnet sich durch

$$A_{\text{mind.}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Dies bedeutet, dass Licht mit der Wellenlänge λ gerade noch von Licht der Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda$ zu unterscheiden ist. Wir haben die beiden gelben Linien voneinander unterscheiden können, und somit gilt

$$A_{\text{mind.}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = 274,5.$$

Wir bemerken, dass das theoretische Auflösungsvermögen kleiner ist, als das tatsächliche. Dies sollte nicht der Fall sein. Darum berechnen wir das theoretische Auflösungsvermögen noch einmal mit den Herstellerangaben der Dispersion und erhalten

$$A_{\text{H. theor.}} = 342,2.$$

Dieser Wert erscheint uns realistischer.

Maximal erreichbares Auflösungsvermögen

Wir hatten die theoretische Auflösung durch

$$A_{\text{theor.}} = S \frac{dn}{d\lambda}$$

berechnet. Nehmen wir an, dass die gesamte geometrische Basislänge von $S = 6 \text{ cm}$ ausgeleuchtet wird, so erhalten wir die maximalen Auflösungsvermögen des Prismenspektrometers. Die kleinste noch trennbare Wellenlängendifferenz, die im Bereich des gelben Lichts noch aufgelöst werden kann, ergibt sich dann durch

$$\Delta\lambda_{\text{min.}} = \frac{\lambda_1}{A_{\text{max.}}}.$$

Die folgende Tabelle zeigt unsere Ergebnisse.

	Kronglas	leichtes Flintglas	schweres Flintglas
$A_{\text{max.}}$	4127	9927	13816
$\Delta\lambda_{\text{min.}} [\text{nm}]$	0,14031	0,05833	0,04191

23.5.2 Das Gitterspektrometer

Ablenkwinkel

Analog zu 23.5.1 berechnen wir die Ablenkungswinkel. Wir konnten die gelben Emissionslinien in der 1. Ordnung nicht unterscheiden und geben somit keinen Wert für ihre Winkeldifferenz an. Wir stellen unsere Ergebnisse in Tabelle 23.6 dar. Der Fehler ist jeweils $0,05^\circ$.

Gitterkonstante

Es gilt²

$$\sin \varphi_{\text{max.}} = \frac{k\lambda}{a},$$

² Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 171.

Ordnung	$\varphi_1 [^\circ]$	$\varphi_3 [^\circ]$	$\varphi_4 [^\circ]$	$\varphi_{1,2} [^\circ]$	$\varphi_{1,3} [^\circ]$
1	3,3	3,15	2,3	-	0,15
4	13,4	12,6	10	0,1	0,8
8	31,35	29,45	28,65	0,15	1,9

Tabelle 23.6: Ablenkwinkel beim Gitterspektrometer.

dabei ist $\sin \varphi_{\max.}$ der Ablenkwinkel, unter welchem ein Beugungsmaximum zur Wellenlänge λ in der k -ten Ordnung auftritt, und a die Gitterkonstante. Somit folgt

$$a = \frac{k\lambda}{\sin \varphi_{\max.}}.$$

Für den Fehler gilt

$$\sigma_a = \sigma_{\varphi_{\max.}} \left(\frac{\partial a}{\partial \varphi_{\max.}} \right) = \sigma_{\varphi_{\max.}} \frac{\lambda k \cos(\sigma_{\varphi_{\max.}})}{\sin(\sigma_{\varphi_{\max.}})^2}.$$

Bei der Berechnung der Gitterkonstante aus den Winkeldifferenzen der gelben und grünen Linien gilt analog

$$a = \frac{k\Delta\lambda}{\sin \Delta\varphi_{\max.}}. \quad (23.19)$$

Auch der Fehler berechnet sich auf gleiche Art und Weise wie bei den totalen Ablenkungswinkeln. Unsere berechneten Werte stellen wir in Tabelle 23.7 zusammen. Alle Angaben sind in μm . Aus Gründen, die wir weiter unten erläutern

	1. Ordnung	4. Ordnung	8. Ordnung
φ_1	$10,04 \pm 0,12$	$9,98 \pm 0,04$	$8,89 \pm 0,01$
φ_3	$9,94 \pm 0,16$	$10,01 \pm 0,04$	$8,89 \pm 0,01$
φ_4	$10,16 \pm 0,22$	$9,39 \pm 0,05$	$6,8 \pm 0,01$
$\varphi_{1,2}$	-	$4,84 \pm 2,42$	$6,45 \pm 2,15$
$\varphi_{1,3}$	$12,2 \pm 4,2$	$9,15 \pm 0,59$	$7,71 \pm 0,21$

Tabelle 23.7: Gitterkonstante in μm .

werden, benutzen wir nur die Werte aus der 1. und 4. Ordnung, um den gewichteten Mittelwert der Gitterkonstante zu berechnen. Wir erhalten

$$a = 9,86 \pm 0,03 \mu\text{m}.$$

Wellenlängendifferenz der gelben Emissionslinien

Stellen wir (23.19) nach $\Delta\lambda$ um, so können wir bei gegebener Gitterkonstante den Wellenlängenabstand zwischen den beiden gelben Emissionslinien berech-

nen. Es gilt

$$\Delta\lambda_{1,2} = \frac{a \sin(\Delta\varphi_{1,2})}{k},$$

mit den gleichen Bezeichnungen wie oben. Der Fehler ergibt sich durch

$$\sigma_{\Delta\lambda_{1,2}} = \sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sin(\Delta\varphi_{1,2})}{k}\right)^2 + \sigma_{\Delta\varphi_{1,2}}^2 \left(\frac{a \cos(\Delta\varphi_{1,2})}{k}\right)^2}.$$

Wir erhalten in der 4. Ordnung eine Wellenlängendifferenz von

$$\Delta\lambda_{1,2}^{(4)} = 4,3 \pm 2,2 \text{ nm}$$

und in der 8. Ordnung

$$\Delta\lambda_{1,2}^{(8)} = 3,2 \pm 1,1 \text{ nm}.$$

Der Literaturwert³ liegt bei $2,1 \text{ nm}$ und somit in unserem Fehlerbalken.

Da wir grade schon so gut dabei sind, sonst nichts zu tun haben und diese Auswertung auch sonst nicht zu lange dauert, berechnen wir abweichend vom Praktikumnsskript auch noch die Wellenlängendifferenz zwischen der gelben und der grünen Emissionslinie. Wir erhalten in der 4. Ordnung eine Wellenlängendifferenz von

$$\Delta\lambda_{1,3}^{(4)} = 34,4 \pm 2,2 \text{ nm}$$

und in der 8. Ordnung

$$\Delta\lambda_{1,3}^{(8)} = 40,8 \pm 1,1 \text{ nm}.$$

Der Literaturwert⁴ liegt bei 33 nm und somit leider nur bei der Messung in der 4. Ordnung in unserem Fehlerbalken.

Auflösungsvermögen

Das tatsächliche Auflösungsvermögen, d.h. das Auflösungsvermögen, welches das Gitterspektrometer mindestens hat, berechnet sich analog zu dem tatsächlichen Auflösungsvermögen des Prismenspektrometers. Es gilt

$$A_{\text{mind.}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = 274,5.$$

Das theoretische Auflösungsvermögen in der k -ten Ordnung wird nach (23.18) durch

$$A_{\text{theor.}} = N \cdot k$$

berechnet. Dabei ist N die Anzahl der beleuchteten Spalte. Es gilt $N = B/a$, wobei a die Gitterkonstante und B die Breite der Spaltblende ist, bei welcher die beiden gelben Emissionslinien gerade noch zu unterscheiden waren. Somit folgt

$$A_{\text{theor.}} = N \cdot k = \frac{kB}{a}.$$

³ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 173.

⁴ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 173.

Der zugehörige Fehler berechnet sich durch

$$\sigma_{A_{\text{theor.}}} = \frac{\sigma_a B k}{a^2}.$$

Wir erhalten in der 4. Ordnung

$$A_{\text{theor.}}^{(4)} = 304 \pm 1$$

und in der 8. Ordnung

$$A_{\text{theor.}}^{(8)} = 609 \pm 2.$$

Das theoretische Auflösungsvermögen ist wie erwartet größer als das tatsächliche. Das maximal erreichbare Auflösungsvermögen in der 1. Ordnung ergibt sich, wenn das gesamte Gitter der Breite $B = 1,5 \text{ cm}$ ausgeleuchtet wird. Es ergibt sich

$$A_{\text{max.}} = 1521.$$

Wellenlänge der violetten Emissionslinie

Die Wellenlänge der violetten Emissionslinie erhalten wir durch

$$\lambda_4 = \frac{a \sin(\varphi_4)}{k},$$

mit denselben Bezeichnungen wie oben. Der Fehler ergibt sich durch

$$\sigma_{\lambda_4} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a \sin(\varphi_4)}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\varphi_4} a \cos(\varphi_4)}{k}\right)^2}.$$

In Tabelle 23.8 stellen wir unsere Ergebnisse zusammen. Der Literaturwert⁵ liegt

Ordnung	1.	2.	3.
$\lambda_4 [nm]$	396 ± 10	428 ± 3	591 ± 2

Tabelle 23.8: Wellenlänge der violetten Emissionslinie.

bei $407,78 \text{ nm}$. Somit liegt unser Wert der 1. Ordnung im gewünschten Bereich, der Wert der 4. Ordnung noch in akzeptablem Abstand. Der Wert der 3. Ordnung liegt jedoch völlig daneben und wir erkennen durch „Rückwärtsrechnen“, dass wir wohl nicht die 8. sondern eher die 11. Ordnung ausgemessen haben. Deswegen haben wir auch weiter oben bei der Berechnung der Gitterkonstante die Werte für die 8. Ordnung außer Acht gelassen.

⁵ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 173.

23.6 Diskussion

Allgemeine Anmerkungen

Die berechneten Werte sind alle mehr oder weniger zufriedenstellend. Die meisten Schwierigkeiten lagen bei der Justierung des Versuchsaufbaus. Die so verlorene Zeit hat ganz offensichtlich unsere Motivation für genaue Messungen verringert. Doch das Praktikumsskript⁶ weist insbesondere bei diesem Versuch massive Lücken bei der Versuchsdurchführung auf, was die zu messenden Größen betrifft. Auch Literaturwerte vermisst man schmerzlich. Immer auf Vorgängerprotokolle angewiesen zu sein, kann auch seine Tücken haben. Natürlich hat man in der Forschung auch keine Literaturwerte zur Verfügung, doch ich denke, dass man bei einem Versuch, bei dem alle Ergebnisse aufeinander aufbauen, ruhig solch eine Stütze geben kann.

Auflösungsvermögen

Die theoretischen Auflösungsvermögen von Prismen- und Gitterspektrometer stimmen ungefähr überein. Das Auflösungsvermögen in den höheren Ordnungen des Gitterspektrometers ist jedoch sehr viel höher. Die maximalen erreichbaren Werte für das Auflösungsvermögen sind im Experiment nicht erreichbar. Die Intensität der Emissionslinien ist dafür viel zu schwach. Das tatsächliche Auflösungsvermögen sagt viel mehr über den Versuchsaufbau aus, da wir oft schon Schwierigkeiten hatten die beiden gelben Linien zu unterscheiden.

Eigene Kommentare

[Auswertung erinnert an Messung großer Widerstände: Viel, viel Rumgerechne, wobei der Sinn nur teilweise erkannt wurde. Durch ständiges Nachjustieren hat auch der Versuch ansich null Spaß gemacht.]_{Daniel}

[Der Versuch war nach der Justierung des Strahlengangs fix durchgeführt. Die Auswertung hat viel zu lange gedauert. Der didaktische Sinn der Auswertung blieb mir auch unbekannt. Es war viel zu viel rumgerechne. Man hätte die Auswertung wirklich auf einige interessante Punkte kürzen können, um somit die Motivation der Praktikanten hochzuhalten. So finde ich es zum Beispiel völlig übertrieben die Gitterkonstante nicht anzugeben, zumal man diese Angaben vom Hersteller beziehen kann. Viel spannender wäre es bei gegebener Gitterkonstante lediglich die Wellenlängen der Emissionslinien auszurechnen. Ist dies nicht der eigentliche Sinn eines Spektrometers?]_{Hauke}

⁶ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 168-174.

24 Das Gasinterferometer

Versuch durchgeführt am 13. Februar 2006, Protokoll erarbeitet von Daniel Scholz.

24.1 Einleitung

Die Lichtgeschwindigkeit ist im Vakuum von der Frequenz unabhängig und somit für alle elektromagnetischen Wellen wie zum Beispiel sichtbaren Licht aber auch Röntgen- und Radiowellen gleich.

In Materie ist die Lichtgeschwindigkeit jedoch geringer als im Vakuum. Das Verhältnis der Vakuumslichtgeschwindigkeit c_0 zur Lichtgeschwindigkeit c_m in Materie wird **Brechungsindex** genannt. Dieser ist von Stoff zu Stoff verschieden und zudem im Allgemeinen von der Frequenz sowie von Temperatur und Druck abhängig.

In diesem Versuch bestimmen wir der Brechungsindex der Luft. Dazu verwenden wir ein Gasinterferometer.

24.2 Theorie

24.2.1 Licht als Welle und Interferenz

Nach den Maxwell Gleichungen ist Licht eine elektromagnetische Welle. Damit steht das E -Feld senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung und dem H -Feld. Wir bemerken, dass weißes Licht aus einer Überlagerung von Wellen mit verschiedenen Wellenlängen, Phasenverschiebungen und Polarisationsrichtungen besteht.

Die Interferenz von zwei Wellen lässt sich am einfachsten verstehen, wenn man zwei harmonische Wellen gleicher Wellenlänge überlagert. Die resultierende Welle ergibt sich aus der Addition der beiden einzelnen Wellen.

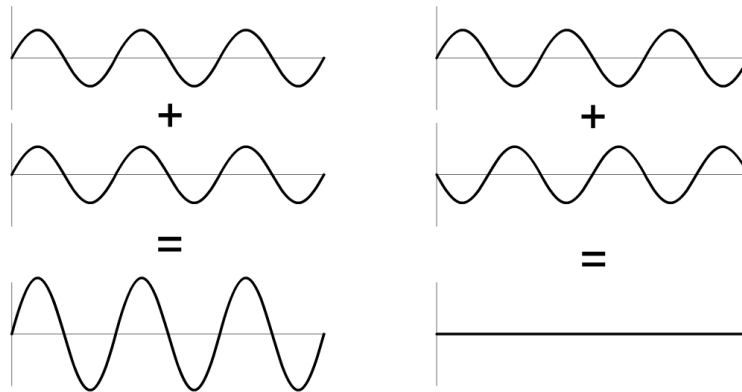


Abbildung 174: konstruktive und destruktive Interferenz.

Bei einer Phasenverschiebung der Wellen, bei der Wellenberg auf Wellenberg trifft, hat man **konstruktive** bzw. **verstärkende Interferenz**. Die resultierende Welle besitzt eine größere Amplitude. Ist die Phasenverschiebung der Wellen dagegen so, dass der Wellenberg der einen Welle auf ein Wellental der anderen Welle trifft, so kommt es zur Auslöschung bzw. **destruktiven Interferenz**.

Im Allgemeinen benötigt man kohärentes Licht, also Licht mit einer konstanten Phasenbeziehung, um Interferenzphänomene gut beobachten zu können.

24.2.2 Doppelspalt am Gasinterferometer

Für feste und flüssige Körper hängt der Brechungsindex nur in sehr geringem Maße von Druck und Temperatur ab. Anders verhält es sich bei Gasen, bei denen der Brechungsindex nicht als konstant angenommen werden kann.

Um den Brechungsindex von Luft zu bestimmen, benutzen wir ein Gasinterferometer, welches genau auf diesem Prinzip beruht. Man betrachtet zwei kohärente Lichtstrahlen mit festem Abstand d , dies wird durch einen Doppelspalt realisiert. Auf einem dahinter angebrachten Schirm entsteht ein Interferenzstreifenmuster.

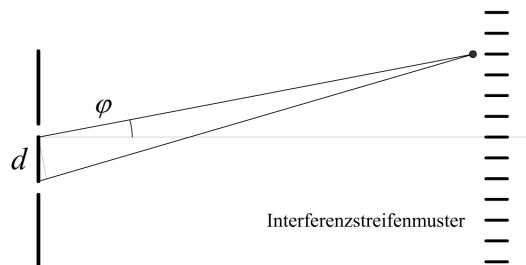


Abbildung 175: Gangunterschied beim Doppelspalt.

Bei einer Situation wie in Abbildung 175 findet man maximale konstruktive Interferenz bei Winkeln φ , für die

$$\varphi = \arcsin \frac{m\lambda}{d}$$

gilt, wobei m die Ordnung des Maximums, d der Spaltabstand und λ die Wellenlänge ist. Ändert man die Ordnung m nun um 1, so hat sich der Gangunterschied um die Wellenlänge λ geändert.

Durch Einbringen einer Druckkammer mit Gas zwischen einem der Spalte und Schirm, verändert man ebenfalls den Gangunterschied, da für den Brechungsindex im Medium

$$n = \frac{c_0}{c_m}$$

gilt. Dabei ist c_0 die Vakuumgeschwindigkeit und c_m die Lichtgeschwindigkeit im Medium. Besitzt die Druckkammer die Länge l , so ergibt sich ein Gangunterschied von m Ordnungen, wenn die Gleichung

$$l(n - n_L) = m\lambda \quad (24.1)$$

erfüllt wird.

24.2.3 Druckabhängigkeit des Brechungsindex

In einem Medium findet die dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (1 + \chi) \varepsilon_0 \vec{E}$$

statt, dabei ist ε_0 die Influenzkonstante, \vec{E} das elektrische Feld, \vec{P} die Polarisierung und χ die magnetische Suszeptibilität. Weiter gilt für die Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon_r = (1 + \chi) = n^2,$$

sodass man für die dielektrische Verschiebung den Ausdruck

$$\vec{D} = (1 + \chi) \varepsilon_0 \vec{E} = n^2 \varepsilon_0 \vec{E}$$

erhält. Durch Gleichsetzen erhalten wir damit

$$n^2 \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{P} = (n^2 - 1) \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Da die Polarisierung als Anzahl der Dipolmomente pro Volumen definiert ist, gilt in einem Gas die Proportionalität

$$\vec{P} = \alpha \frac{N}{V} \vec{E},$$

wobei α die atomare Polarisierbarkeit, N die Teilchenanzahl und V das Volumen ist. Damit erhalten wir

$$(n^2 - 1) \varepsilon_0 \vec{E} = \alpha \frac{N}{V} \vec{E} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N}{V} = \frac{(n^2 - 1)}{\alpha} \varepsilon_0$$

und somit auch

$$N = \frac{(n^2 - 1)}{\alpha} \varepsilon_0 V.$$

Setzen wir dies in die allgemeine Gasgleichung $pV = Nk_B T$ ein, so erhalten wir

$$pV = \frac{(n^2 - 1)}{\alpha} \varepsilon_0 V k_B T \quad \Leftrightarrow \quad T \frac{n^2 - 1}{p} = \frac{\alpha}{\varepsilon_0 k_B} = \text{konst.}$$

Wir betrachten einen Brechungsindex von $n \approx 1$, somit können wir auch $n^2 \approx n$ setzen und erhalten unter Ausnutzung, dass die obige Größe konstant ist,

$$T_0 \frac{n_0 - 1}{p} = T \frac{n - 1}{p} \quad \Leftrightarrow \quad n_0 = p_0 \frac{T}{T_0} \frac{n - 1}{p} + 1.$$

Wir wählen die Normalbedingungen $p_0 = 1013 \text{ hPa}$ sowie $T_0 = 293 \text{ K}$. Weiter leiten wir die Gleichung

$$T \frac{n - 1}{p} = \text{konst} \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{\text{konst}}{T} p + 1$$

partiell nach dem Druck ab, da wir im Versuch gerade $\partial n / \partial p$ [indirekt] messen werden. Wir erhalten

$$\frac{\partial n}{\partial p} = \frac{\text{konst}}{T} \quad \Leftrightarrow \quad T \frac{\partial n}{\partial p} = \text{konst}.$$

Damit ergibt sich schließlich die Formel

$$n_0 = 1 + p_0 \frac{T}{T_0} \frac{\partial n}{\partial p}, \quad (24.2)$$

welche wir in der Auswertung benötigen werden. In dieser Gleichung betrachten wir nur Druckunterschiede. Daher benötigen wir keinen aktuellen Luftdruck, wohl aber die aktuelle Temperatur T .

24.3 Versuchsdurchführung

Der vereinfachte Versuchsaufbau ist in Abbildung 176 dargestellt.

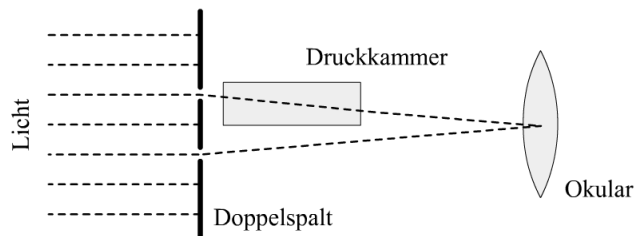


Abbildung 176: Prinzip des Gasinterferometers.

Zunächst ist die Justierung der Apparatur und die Erkennbarkeit des Interferenzbildes zu überprüfen und notfalls zu korrigieren.

Der eigentliche Versuch besteht darin, dass die Verschiebung der Interferenzstreifen um je eine Ordnung Δm in Abhängigkeit vom Druck gemessen wird. Dazu beginnen wir bei einem Druck von 2000 mm Wassersäule in der Druckkammer und verringern diesen langsam bis zum Umgebungsdruck. Dabei notieren wir jeweils den Druck nach einer Verschiebung der Interferenzstreifen um $\Delta m = 1$. Diese Messung führen wir vier mal durch.

Abschließend ist die aktuelle Temperatur T zu messen und zu notieren.

24.4 Auswertung

Die Einheit mm Wassersäule lässt sich durch

$$1\,mmWS = 9.81\,Pa$$

direkt in Pascal umrechnen. In Abbildung 177 haben wir den Druck gegen die Ordnung des Gangunterschiedes aufgetragen.

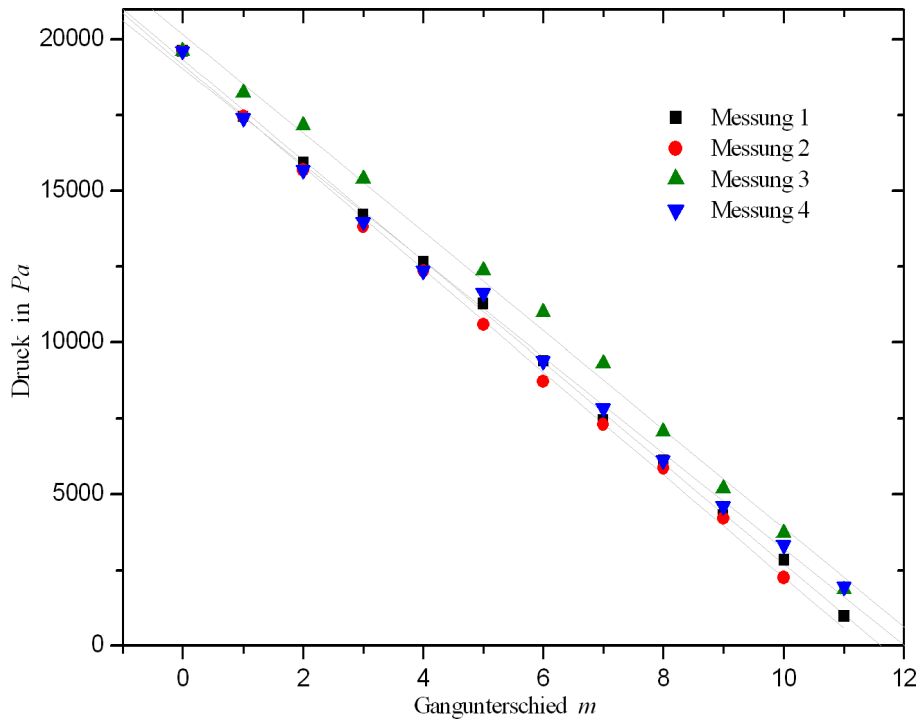


Abbildung 177: Abhängigkeit von Druck und Gangunterschied.

Durch lineare Regression erhalten wir folgende Steigungen:

	Steigung in Pa
Messung 1	-1663.9 ± 14.7
Messung 2	-1690.0 ± 22.8
Messung 3	-1628.9 ± 34.5
Messung 4	-1585.7 ± 27.6

Davon betrachten wir den Betrag des gewichteten Mittelwertes

$$k = (1654,5 \pm 10.7)\,Pa.$$

Mittels Gleichung (24.1) erhalten wir aus

$$l(n - n_L) = m\lambda \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{l(n - n_L)}{\lambda} = \frac{ln}{\lambda} - \frac{ln_L}{\lambda}$$

und durch partielle Differentiation

$$\frac{\partial m}{\partial p} = \frac{\partial m}{\partial p} \left(\frac{ln}{\lambda} - \frac{ln_L}{\lambda} \right) = \frac{l}{\lambda} \frac{\partial n}{\partial p} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial n}{\partial p} = \frac{\lambda}{l} \frac{\partial m}{\partial p} = \frac{\lambda}{l \cdot k}.$$

Mit den Normalbedingungen $p_0 = 1013 \text{ hPa}$ und $T_0 = 293 \text{ K}$, mit der gemessenen Temperatur von $T = (291.2 \pm 1) \text{ K}$ sowie mit den angegebenen Daten¹ $l = (111 \pm 0.5) \text{ mm}$ und $\lambda = 546 \text{ nm}$ erhalten wir nach Gleichung (24.2) den Brechungsindex

$$n_0 = 1 + p_0 \frac{T}{T_0} \frac{\partial n}{\partial p} = 1 + p_0 \frac{T}{T_0} \frac{\lambda}{l \cdot k} = 1.00029932.$$

Dabei erwarten wir einen Fehler von

$$\begin{aligned} \sigma_{n_0} &= \sqrt{\left(\frac{\partial n_0}{\partial T} \sigma_T\right)^2 + \left(\frac{\partial n_0}{\partial l} \sigma_l\right)^2 + \left(\frac{\partial n_0}{\partial k} \sigma_k\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{p_0 \lambda}{T_0 l k} \sigma_T\right)^2 + \left(\frac{p_0 T \lambda}{T_0 l^2 k} \sigma_l\right)^2 + \left(\frac{p_0 T \lambda}{T_0 l k^2} \sigma_k\right)^2} = 0.0000257. \end{aligned}$$

24.5 Diskussion

Die Brechzahl der Luft² beträgt bei einer Temperatur von $T_0 = 293 \text{ K}$ und einer Wellenlänge von $\lambda = 589 \text{ nm}$ gerade $n = 1.000272$. Dieser Wert hängt wie bereits angegeben von der Wellenlänge ab. Wir hatten eine Wellenlänge von $\lambda = 546 \text{ nm}$ verwendet. Außerdem wird der Brechungsindex durch spezielle Zusammensetzung der Luft – insbesondere der Luftfeuchte – beeinflusst. Daher ist auch der Literaturwert nicht exakt und unser gemessener Wert mit

$$n_0 = 1.00029932 \pm 0.0000257$$

entspricht in vollem Umfang unseren Erwartungen, zumal es teilweise schwierig war eine Verschiebung der Interferenzstreifen um genau eine Ordnung zu ermitteln.

Sehr schön war auch, dass die gesamte Anlage bereits bestens justiert und eingestellt vorgefunden wurde.

Eigene Kommentare

[Naja, gibt spannendere Versuche, dafür dauerte der Spaß immerhin auch nur 30 Minuten.]_{Daniel}

[Die Theorie könnte schöner sein. An der Kürze der Auswertung könnte sich manch anderer Versuch ein Beispiel dran nehmen.]_{Hauke}

¹ Nach Praktikumsript: Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 177.

² Nach D. Meschede (2001): "Gerthsen Physik", 21. Auflage, Springer Verlag Berlin.

25 Fresnelsche Formeln und Polarisat-ion

Versuch durchgeführt am 14. Februar 2006, Protokoll erarbeitet von Hauke Rohmeyer.

25.1 Einleitung

Dieser Versuch behandelt die Polarisat-ion von Licht und das Verhältnis der Lichtintensität vom einfallenden, reflektierten und gebrochenen Strahl. Dieses Verhältnis lässt sich durch die **Fresnelschen Formeln** beschreiben.

Beiden Eigenschaften des Lichtes werden in diesem Versuch benutzt, um den **Brewsterwinkel** zu bestimmen.

25.2 Theorie

25.2.1 Polarisat-ion

Licht ist eine elektromagnetische Welle. Elektrischer und magnetischer Feldvektor \vec{E} und \vec{B} schwingen gleichphasig und sowohl senkrecht zueinander als auch senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Dies bedeutet, dass elektromagnetische Wellen **Transversalwellen** sind, was man durch die Maxwell-Gleichungen einsehen kann. Hätte der magnetische Feldvektor eine Komponente in Ausbreitungsrichtung, so hätte das magnetische Feld Quellen und Senken. Dies steht aber im Widerspruch zu der Maxwellschen Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

nach der das Magnetfeld quellenfrei ist. Selbiges gilt für eine Elektromagnetische Welle, wenn sie sich durch den ladungsfreien Raum bewegt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0.$$

Die **Polarisation** wird nach der Schwingungsrichtung des elektrischen Feldvektors definiert. Da elektromagnetische Wellen Transversalwellen sind, lassen sie sich polarisieren. Man unterscheidet drei Arten von Polarisat-ion:

- (1) Lineare Polarisat-ion: Der Feldvektor zeigt immer in eine feste Richtung, bzw. in die entgegengesetzte Richtung und ändert dabei seinen Betrag periodisch mit einer bestimmten Amplitude.

- (2) Elliptische Polarisation: Der Feldvektor rotiert um den Wellenvektor und ändert dabei periodisch seinen Betrag. Die Spitze des Feldvektors beschreibt dabei eine Ellipse.
- (3) Zirkulare Polarisation: Spezialfall der elliptischen Polarisation, bei der der Feldvektor einen Kreis beschreibt, also seinen Betrag nicht verändert.

Überlagert man zwei linear polarisierte Wellen, bei denen die E -Vektoren senkrecht zueinander mit einer Phasendifferenz von $\pi/2$ schwingen, so erhält man zirkular polarisiertes Licht.

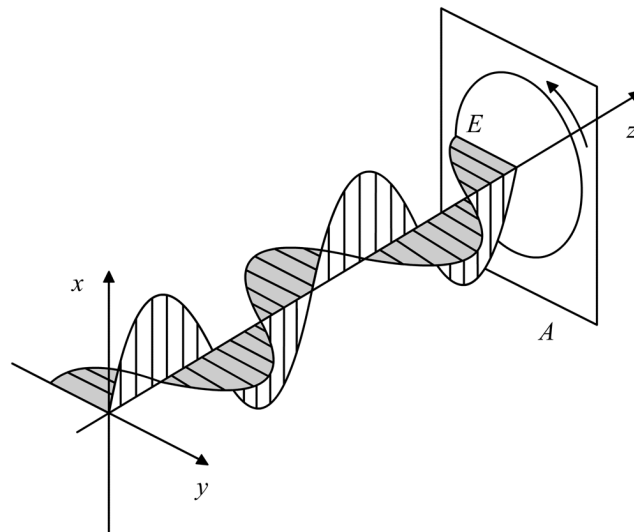


Abbildung 178: Entstehung von zirkular polarisiertem Licht.

Ist die Phasendifferenz ungleich $\pi/2$, erhält man elliptisch polarisiertes Licht.

Brechung und Reflexion von Licht

Wechselt ein Lichtstrahl das Medium in dem es sich ausbreitet, so wird ein Teil an der Grenzfläche reflektiert, ein anderer Teil des Lichtes wird gebrochen. Die **Brechzahl** oder **Brechungsindex** n eines Mediums bezeichnet das Verhältnis zwischen der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c_0 und der Lichtgeschwindigkeit im betreffenden Medium c_n :

$$n := \frac{c_0}{c_n}.$$

Ist die Brechzahl n_1 des eines Mediums höher als die Brechzahl n_2 eines anderen Mediums, so ist das erste Medium **optisch dichter** als das zweite, welches im Gegensatz zum ersten Medium **optisch dünner** ist. Breitet sich Licht von einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium aus, so wird der Lichtstrahl zum Lot hin, andernfalls vom Lot weg gebrochen. Der Brechungswinkel, welcher auch vom Einfallswinkel abhängt, kann durch das **Snelliussche Brechungsgesetz** berechnet werden, welches wir nun herleiten wollen.

25.2.2 Snelliussches Brechungsgesetz

Nach dem Huygenschen Prinzip ist jeder Punkt einer bestehenden Wellenfront Ausgangspunkt einer neuen kugelförmigen Elementarwelle. Die Einhüllende aller Elementarwellen ergibt die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt.

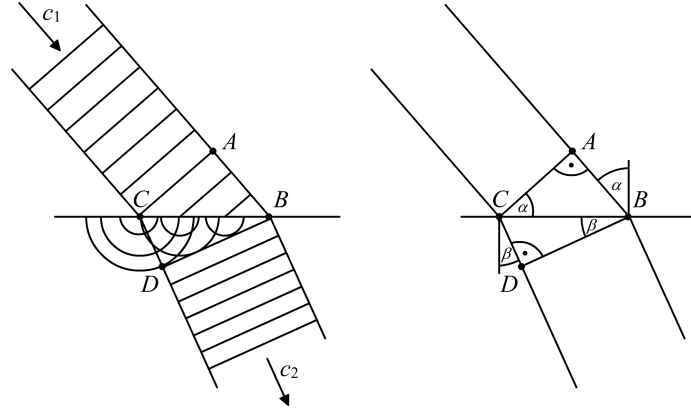


Abbildung 179: Geometrische Herleitung des Brechungsgesetzes.

In verschiedenen Medien ändert sich die Geschwindigkeit des Lichtes. Sei c_o die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, diejenige im oberen Medium c_1 und die im unteren c_2 [vergleiche Abbildung 179]. Die Schnittpunkte der ursprünglichen Welle mit der Grenzfläche zum unteren Medium sind die Ausgangspunkte der Huygenschen Kugelwellen. Für die Brechungswinkel α und β gilt

$$\sin \alpha = \overline{AB}/\overline{CB} \quad \text{und} \quad \sin \beta = \overline{CD}/\overline{CB}.$$

Trifft eine Wellenfront im Punkt C auf die Grenzfläche, so vergeht noch die Zeit $t = \overline{AB}/c_1$, bis auch Punkt B von der Wellenfront erreicht wird. Inzwischen hat die Kugelwelle, die von C ausging, den Weg $\overline{CD} = c_2 t$ zurückgelegt. Mit den Brechungsindizes $n_1 = c_0/c_1$ und $n_2 = c_0/c_2$ folgt

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \overline{AB}/\overline{CD} = \frac{tc_1}{tc_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Daraus folgt das Snelliussche Brechungsgesetz

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta.$$

25.2.3 Fresnelsche Formeln

Die Fresnelschen Formeln beschreiben die Intensität des reflektierten und des gebrochenen Strahls. Wir bezeichnen mit E_e , E_r und E_g den einfallenden, den reflektierten und den gebrochenen Lichtstrahl. Das **Reflexionsverhältnis** $\rho = E_r/E_e$ ist das Verhältnis zwischen einfallendem und reflektiertem Strahl, die **Durchlässigkeit** $\sigma = E_g/E_e$ jenes zwischen gebrochenem und einfallendem Strahl.

Steht \vec{E} senkrecht zur Einfallsebene, so gilt

$$\rho_s = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{und} \quad \sigma_s = \frac{2 \sin(\beta) \cos(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (25.1)$$

Steht \vec{E} parallel zur Einfallsebene, so gilt

$$\rho_p = -\frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \quad \text{und} \quad \sigma_p = \frac{2 \sin(\beta) \cos(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}. \quad (25.2)$$

Dies sind die Fresnelschen Formeln, auf deren Beweis wir an dieser Stelle verzichten¹.

25.2.4 Brewsterwinkel

Stellt man das Snelliusche Brechungsgesetz nach β um und setzt das Ergebnis in die Fresnelschen Formeln ein, so kann man den Reflexionskoeffizienten $|\rho|$ als Funktion des Einfallswinkels α berechnen.

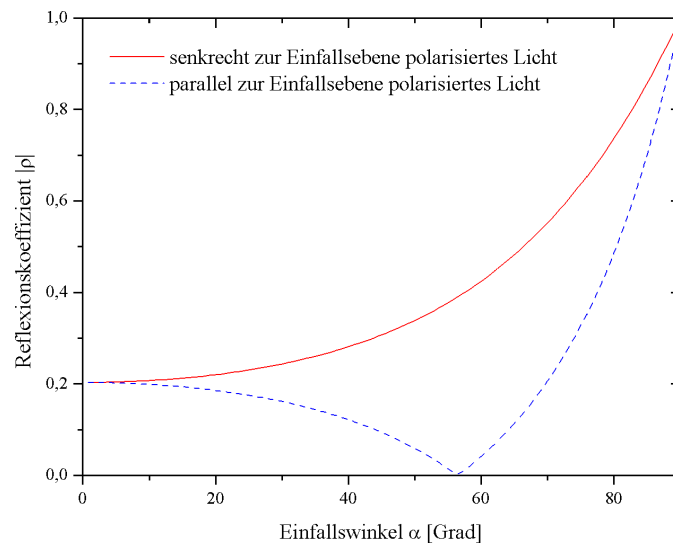


Abbildung 180: Reflexionsvermögen in Abhängigkeit vom Einfallswinkel für $n = 1.51$.

Trägt man nun den Reflexionskoeffizienten gegen den Einfallswinkel an der Grenzfläche zwischen Luft und Kronglas² auf, kann man beobachten, dass das Reflexionsvermögen in einem bestimmten Winkel bei parallel zur Einfallsebene polarisiertem Licht verschwindet. Dies ist, wie aus Gleichung (25.2) für ρ_p abzulesen ist, der Fall, wenn $\alpha + \beta = 90^\circ$. Dies gilt wiederum genau dann, wenn der reflektierte und der gebrochene Strahl im Winkel von 90° zueinander stehen. Dies ist der sogenannte **Brewsterwinkel**, bei welchem das einfallende, parallel zur Oberfläche polarisierte, Licht vollständig durch die Oberfläche dringt. Das Licht mit senkrechter Polarisation wird hingegen teilweise reflektiert. Das reflektierte Licht ist somit vollständig linear polarisiert. Man benutzt den Brewsterwinkel unter anderem bei Lasern, um den Lichtstrahl linear zu polarisieren.

¹ Siehe hierzu D.Meschede (2001): "Gerthsen Physik", 21. Auflage, Springer Verlag Berlin, Seite 547 f.

² Luft hat einen Brechungsindex von $n = 1,000292 \approx 1$, Kronglas hat einen Brechungsindex von $n = 1.51$.

Man kürzt den Brewsterwinkel oft mit θ_B ab. Weil der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel ist, gilt

$$\beta = 90^\circ - \theta_B$$

und somit folgt mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin(90^\circ - \theta_B) = n_2 \cos \theta_B.$$

Hieraus folgt ein Zusammenhang zwischen dem Brewsterwinkel und dem Brechungsindex

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (25.3)$$

25.2.5 Totalreflexion

Strahlt Licht von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium, so wird ab einem bestimmten Einfallswinkel das Licht nicht mehr gebrochen, sondern total reflektiert. Diesen Sachverhalt kann man durch das Snelliussche Brechungsgesetz herleiten. Für den Einfallswinkel α gilt

$$\sin \alpha = \frac{n_2}{n_1} \sin \beta.$$

Es gilt stets $\sin \beta \leq 1$ und somit folgt

$$\sin \alpha \leq \frac{n_2}{n_1}.$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so findet anstatt der Brechung die Totalreflexion statt.

25.2.6 Polarisation durch Doppelbrechung

Die meisten durchsichtigen Materialien sind *isotrop*. Das bedeutet, dass die Lichtgeschwindigkeit in ihnen in jeder Richtung gleich groß ist. Bei einigen Materialien hängt die Lichtgeschwindigkeit jedoch von der Polarisations- und Ausbreitungsrichtung in ihnen ab. Man nennt diese Materialien *anisotrop*. Trifft ein Lichtstrahl in ein anisotropes Material ein, findet eine **Doppelbrechung** statt. Der Lichtstrahl wird in zwei Strahlen aufgespaltet: In einen **ordentlichen Strahl** und in einen **außerordentlichen Strahl**. Diese beiden Strahlen breiten sich im Allgemeinen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aus. Aufgrund der unterschiedlichen Brechungsindizes für verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten werden ordentlicher und außerordentlicher Strahl somit auch verschieden stark gebrochen.

In einem doppelbrechendem Material gibt es eine ausgezeichnete Richtung, in der die beiden Strahlen dieselbe Ausbreitungsgeschwindigkeit haben. Man nennt sie *optische Achse*. Der ordentliche Strahl wird im doppelbrechenden Material senkrecht zur optischen Achse polarisiert und breitet sich wie in einem nicht doppelbrechendem Material aus. Die Polarisationsrichtungen von ordentlichem und außerordentlichem Strahl stehen immer senkrecht zueinander.

Ein anisotroper Kristall ist Kalkspat, welcher bei einem *Nicolschen Prisma* Verwendung findet.

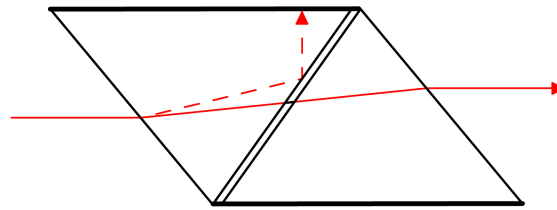


Abbildung 181: Strahlengang im Nicol-Prisma.

Der Kristall wird diagonal zersägt und mit Kanadabalsam wieder zusammengekittet. Kanadabalsam ist ein transparent austrocknendes Baumharz, dessen Brechungsindex im ausgehärteten Zustand nahe dessen vom außerordentlichen Strahls im Kalkspat liegt. Die optische Achse liegt senkrecht zur Einfallsebene des Lichtes. Beim Einfall werden ordentlicher und außerordentlicher Strahl unterschiedlich stark gebrochen: Ein Strahl wird an der Kittfläche total reflektiert und an der geschwärzten Außenwand absorbiert, der andere Strahl wird leicht parallel verschoben und tritt polarisiert aus dem Prisma wieder heraus.

25.3 Durchführung

Der Versuchsaufbau besteht aus einer Quecksilberdampfampe, deren Licht über einen Polarisator auf ein Prisma geleitet wird. Dieses Prisma liegt auf einem Tischchen, welches durch die Drehung eines Schwenkarmes um den halben Drehwinkel mitgedreht wird. An dem Schwenkarm sind hintereinander ein Analysator und ein Okular befestigt. Der Schwenkarm dreht das Tischchen immer genau so, dass das aufs Prisma fallende Licht immer auf das Okular gebrochen wird.

Der Versuch besteht nun aus folgenden Schritten:

- (1) Ohne das Prisma im Strahlengang werden Polarisator und Analysator gerade hintereinander gedreht. Die Linsen werden so justiert, dass das grüne Lichtbündel scharf auf das Okular abgebildet wird.
- (2) Das Nicolsche Prisma wird so auf das Tischchen gelegt, dass die Polarisationsrichtung vertikal zur Einfallsebene liegt. Der Analysator wird aus dem Strahlengang entfernt und der Polarisator so gedreht, dass im Okular Dunkelheit herrscht. Die Polarisationsrichtung des Polarisators steht nun parallel zur Einfallsebene. Aus dieser Stellung wird der Polarisator um 45° verdreht.
- (3) Der Einfallswinkel wird auf 90° eingestellt und das Fadenkreuz im Okular durch Verstellen des Feintriebes ausgerichtet. Nun wird der Einfallswinkel auf 45° gestellt. Ist der Spalt immer noch unter dem Fadenkreuz, so ist das Prisma richtig justiert. Ansonsten muss das Prisma anders ausgerichtet werden, bis bei beiden Positionen der Spalt unter dem Fadenkreuz liegt. Die Justierung des Prisma muss sehr exakt geschehen.
- (4) Der Analysator wird wieder in den Strahlengang eingefügt. Die Drehung der Schwingungsebene des Lichtbündels wird in Abhängigkeit des Einfallswinkels α in Schritten von $2,5^\circ$ gemessen, solange bis im Okular Dunkelheit herrscht. Die Analysatorstellung bei $\alpha = 90^\circ$ bildet den Nullpunkt der Drehung der Schwingungsebene.

- (5) Wie unter (2) beschrieben wird die Polarisationsrichtung parallel zur Einfallsebene justiert. Der Einfallswinkel, unter welchem die Intensität des reflektierten Strahls verschwindet, wird 5 mal gemessen.

25.4 Auswertung

25.4.1 Brechungsindex aus der Drehung der Schwingungsebene

Dreht man den Schwenkarm der Apparatur um $\varphi = 1^\circ$, so dreht sich das Tischchen um $0,5^\circ$. Die Nullposition des Schwenkarmes ist diejenige Position, in welcher der Einfallswinkel α am Prisma gleich 90° ist. Somit gilt

$$\alpha = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

Die Analysatorstellung bei $\alpha = 90^\circ$ [also $\varphi = 0^\circ$] bildet den Nullpunkt für die Drehung γ der Schwingungsebene. Somit muss die anfängliche Analysatorstellung von allen Messwerten abgezogen werden.

Die theoretischen Werte kann man mit Hilfe des Snelliuschen Brechungsgesetzes und den Fresnelschen Formeln berechnen. Der reflektierte Strahl setzt sich aus senkrecht und parallel zur Einfallsebene polarisiertem Licht zusammen. Die Polarisationsrichtungen stehen senkrecht aufeinander.

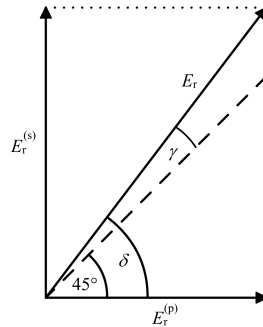


Abbildung 182: Zerlegung des reflektierten Strahles.

Aus Abbildung 182 erkennt man, dass

$$\tan \delta = \frac{E_r^{(s)}}{E_r^{(p)}}$$

gilt. Der E-Vektor war im Versuch schon um 45° gedreht, somit folgt $\delta = \gamma + 45^\circ$. Mit den Fresnelschen Formeln ergibt sich

$$\begin{aligned} \tan(\gamma + 45^\circ) &= \frac{E_r^{(s)}}{E_r^{(p)}} = - \frac{\sin(\alpha - \beta) \tan(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta)} \\ &= - \frac{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)} \\ &= - \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}. \end{aligned} \quad (25.4)$$

Im Versuch haben wir die Reflexion von Licht zwischen Luft und Kronglas beobachtet. Mit dem Brechungsindex von Luft $n_1 \approx 1$ und dem Brechungsindex von Kronglas $n_2 = 1,51$ definieren wir $n := n_2/n_1$. Nach dem Snelliuschen Brechungsgesetz gilt dann $n = \sin \alpha / \sin \beta$ und somit folgt

$$\beta = \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right).$$

Setzen wir dies in (25.4) ein und formen nach γ um, so erhalten wir

$$\gamma = \arctan \left(- \frac{\cos \left(\alpha - \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right) \right)}{\cos \left(\alpha + \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right) \right)} \right) - 45^\circ$$

Bei der Berechnung der theoretischen Werte bemerken wir, dass der Winkel γ zwischen $\alpha = 55^\circ$ und $\alpha = 57,5^\circ$ den Quadranten wechselt. Dies kann behoben werden, indem wir einfach 180° zu diesen Werten hinzuaddieren. Später bemerken wir, dass dies gerade bei dem Brewsterwinkel geschieht. In Abbildung 183 tragen wir unsere Messwerte und die theoretischen Werte der Drehung der Schwingungsebene gegen den Einfallswinkel α auf.

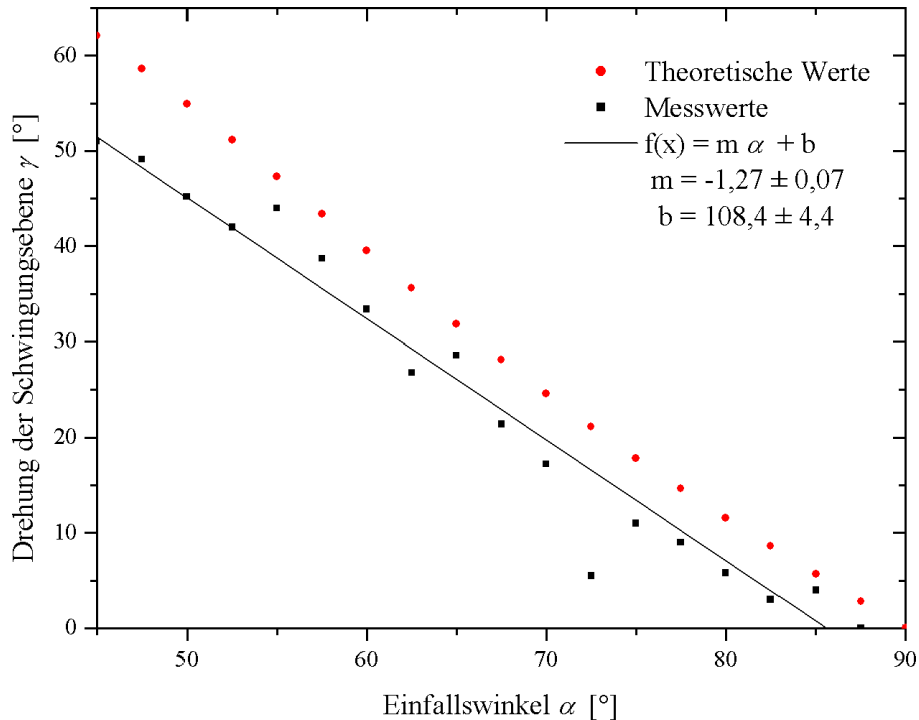


Abbildung 183: Auftragung der Messwerte und der theoretischen Werte.

Für $\gamma = 45^\circ$ ist der reflektierte Strahl senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Daher muss in diesem Fall der Einfallswinkel gleich dem Brewsterwinkel sein. Der Zusammenhang von γ und α ist näherungsweise linear. Somit können wir eine lineare Regression durchführen und erhalten

$$\gamma = -(1,27 \pm 0,07) \cdot \alpha + (108,4 \pm 4,4).$$

Setzen wir in unsere Regressionsgerade $\gamma = 45^\circ$ ein, können wir also den Brewsterwinkel $\alpha = \theta_B$ berechnen. Es gilt

$$\theta_B = \frac{45^\circ - b}{m}, \quad \text{mit} \quad \sigma_{\theta_B} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{m}\right)^2 + \sigma_m^2 \left(\frac{45^\circ - b}{m^2}\right)^2}.$$

Wir erhalten

$$\theta_B = (50 \pm 4,5)^\circ.$$

Nach (25.3) gilt für den Brechungsindex n des Prismas

$$n = \frac{n_2}{n_1} = \tan(\theta_B).$$

Der zugehörige Fehler ergibt sich durch

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{\theta_B}}{\cos(\theta_B)^2}.$$

Wir berechnen

$$n = 1,2 \pm 0,2.$$

Der Literaturwert³ liegt bei

$$n = 1,51 \pm 0,005.$$

Somit liegt der wahre Brewsterwinkel des Prismas bei

$$\theta_B = \arctan(n) \approx 56,49^\circ.$$

Unser Wert ist etwas zu klein, was uns aber nicht verwundert, da es sehr schwer war den richtigen Wert für γ zu finden und das von uns verwendete Prisma stark beschädigt war. In Abbildung 183 kann man auch sehen, dass unsere Messwerte stark streuen. Wir bemerken, dass unsere Messwerte alle unter den theoretischen Werten liegen. Es kann sich also auch um einen systematischen Fehler handeln.

25.4.2 Brechungsindex aus direkter Bestimmung von θ_B

Bei der direkten Bestimmung des Brewsterwinkels gehen wir von einem jeweiligen Fehler von $\sigma_{\theta_B} = 2^\circ$ aus. Berechnen wir den Mittelwert unserer Messungen, erhalten wir

$$\theta_B = (58,72 \pm 2)^\circ.$$

und somit einen Brechungsindex von

$$n = 1,64 \pm 0,13.$$

Der Literaturwert liegt also im Fehlerbalken unserer Messung.

³ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 185.

25.5 Diskussion

Vergleich der Werte

Der aus der direkten Messung bestimmte Brewsterwinkel liegt trotz des großen Fehlers näher am Literaturwert. Dies ist nicht verwunderlich, da das Einstellen von γ mit großen Fehlern behaftet war. Wir wundern uns jedoch, dass der Fehler der linearen Regression nicht größer ist, obwohl unsere Werte teilweise stark streuen und der untersuchte Zusammenhang eigentlich nicht linear ist.

Eigene Kommentare

[Na die Auswertung war ja mal auch fair.]_{Daniel}

[Wir erkennen, dass die Physik lieber mehr Geld für neue Prismen als für einstürzende Neubauten ausgeben sollte. Der Versuch war nach langer Justierung fix gemacht, das scheinen die Optik-Versuche so an sich zu haben. Die Auswertung war auch nicht zu lang.]_{Hauke}

26 Beugung und Interferenz von Laserlicht

Versuch durchgeführt am 15. Februar 2006, Protokoll erarbeitet von Hauke Rohmeyer.

26.1 Einleitung

In diesem Versuch wird das Beugungs- und Interferenzverhalten von Laserlicht an verschiedenen Objekten wie zum Beispiel Steg oder Doppelloch untersucht. Als Lichtquelle dient ein Helium-Neon-Laser, welcher in der Theorie näher erläutert wird.

26.2 Theorie

26.2.1 Erzeugung von Laserlicht

Energieniveaus in Atomen

Elektronen nehmen in der Atomhülle nur diskrete Energieniveaus an. Diese Niveaus werden auch **Schalen** genannt. Die Elektronen füllen diese Schalen beginnend mit dem geringsten Energieniveau. So bilden sie den Grundzustand, welcher der energetisch günstigste Zustand ist. Führt man den Elektronen durch Wärme oder Photonen Energie zu, kann es passieren, dass ein Elektron seinen Platz verlässt und auf ein höheres Energieniveau springt. Dazu muss das Photon an das Elektron genau die Energiedifferenz der beiden Energieniveaus abgeben. Dieser Vorgang heißt **Absorption**, man sagt, dass das Elektron nun “angeregt” ist. Dieser angeregte Zustand ist aber nicht stabil und nach einer kurzen Zeit [Größenordnung Nanosekunde] wechselt das Elektron wieder auf das niedrigere Energieniveau, wobei es ein Photon emittiert, welches genau so viel Energie besitzt, wie die Energiedifferenz zwischen den beiden Niveaus beträgt. Man spricht auch von **spontaner Emission**. Es ist auch möglich eine Emission zu **induzieren**. Hierzu muss ein Photon mit einer bestimmten Energie auf ein angeregtes Atom treffen und so das angeregte Elektron zum wechseln in den geringeren Energiezustand bewegen, dabei wird dann wie bei der spontanen Emission ein Photon erzeugt.

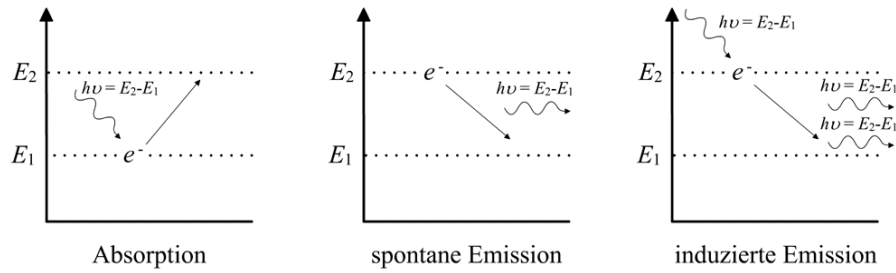


Abbildung 184: Absorption, spontane und induzierte Emission.

Nach den Regeln der Quantenmechanik sind direkte Übergänge zwischen Energieniveaus nicht immer möglich, es entstehen metastabile Zustände. In diesen ist die Verweildauer wesentlich höher als in "normalen" Zuständen. Dies nutzt man beim Laser aus, denn ohne metastabile Zustände würde dieser aufgrund zu geringer Aufenthaltsdauern im angeregten Zustand nicht funktionieren.

Besetzungszahlen

Die Besetzungszahlen N eines Atoms verhalten sich nach der Boltzmannverteilung

$$N = \exp\left(\frac{-E}{k \cdot T}\right). \quad (26.1)$$

Es gelten für die Übergänge zwischen dem Niveau 1 [niedrigere Energie] und Niveau 2 [höhere Energie] die folgenden Formeln

$$\begin{aligned} \text{Absorption } [1 \rightarrow 2]: \quad & dN^{A_{12}} = B_{12}u(\nu)N_1 dt \\ \text{spontane Emission } [2 \rightarrow 1]: \quad & dN^{sE_{21}} = A_{21}N_2 dt \\ \text{induzierte Emission } [2 \rightarrow 1]: \quad & dN^{iE_{21}} = B_{21}u(\nu)N_2 dt \end{aligned}$$

Dabei sind A_{21} , B_{12} und B_{21} die Einsteinkoeffizienten und $u(\nu)$ die Dichte des Strahlungsfeldes. Es werden genauso viele Elektronen absorbiert wie emittiert:

$$N^{A_{12}} = N^{sE_{21}} + N^{iE_{21}}.$$

Hieraus kann man mit Hilfe von (26.1) die **Plancksche Strahlungsdichteformel** folgern:

$$u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12}e^{(h\nu/kT)} - B_{21}}.$$

Aufbau und Funktionsweise eines Lasers

Für möglichst intensives Licht benötigt man sehr viele Lichtemissionen. Es ist dafür notwendig, dass sich viele Atome im gleichen angeregten Zustand befinden, um bei diesen eine induzierte Emission auszulösen. Man spricht von einer Inversion der Besetzungszahlen. Jedoch sind die Verweildauern in den meisten angeregten Zuständen sehr kurz und die Atome werden auch nicht immer in den gleichen Zustand angeregt. Deswegen benutzt man hier die metastabile Zustände, welche eine längere Verweildauer haben.

Bei einem Drei-Niveau-Laser regt man die Atome in den metastabilen Zustand oder darüber hinaus an. Aufgrund der kurzen Verweildauer der Elektronen in den höheren Energieniveaus und der langen Verweildauer im metastabilen Zustand befinden sich immer mehr Atome im gewünschten metastabilen Zustand, von welchem man sie induziert in den Grundzustand bringt und so Licht einer bestimmten Wellenlänge erzeugt. Bei einem Vier-Niveau-Laser verhindert man den Übergang in den häufig zu voll besetzten Grundzustand, indem man ein wenig über dem Grundzustand liegendes metastabiles Niveau als Endpunkt der Elektronen nach der induzierten Emission benutzt.

Laserresonator

Bei einem Gaslaser [zum Beispiel He-Ne-Laser] benutzt man Spiegel an den Enden einer mit Gas gefüllten Röhre, um die induzierte Emission zu erhalten und zu verstärken. Das Licht wird zwischen den Spiegeln reflektiert und der Strahl durch die induzierte Emission weiter verstärkt. Einer der Spiegel ist teildurchlässig, sodass ein Teil des Strahls austritt. Die anderen Wände der Röhre sind so gestaltet, dass sie schräg auf die Spiegel treffendes Licht absorbieren. Die Länge der Röhre sollte ein Vielfaches der halben Wellenlänge des zu verstärkenden Lichtes betragen, damit sich im Resonator eine stehende Welle ausbreiten kann.

He-Ne-Laser

Bei diesem Laser werden Heliumatome [88% des Gasgemisches] durch Gasentladung in einen Zustand gebracht, aus dem sie die Neonatome [12% des Gasgemisches] auf das 3s oder 2s Niveau anregen können. Von dort aus kommt es zu Übergängen in die 3p und 2p Zustände, wobei Licht der Wellenlängen $632,8\text{ nm}$ [rot], $3,39\text{ }\mu\text{m}$ und $1,15\text{ }\mu\text{m}$ [beide infrarot] emittiert wird. Das sichtbare rote Licht bildet dabei den Hauptanteil. Aus den 3p und 2p Zuständen gehen die Atome dann wieder durch spontane Emission oder Stöße mit der Rohrwand in den Grundzustand oder das metastabile Niveau 1s über.

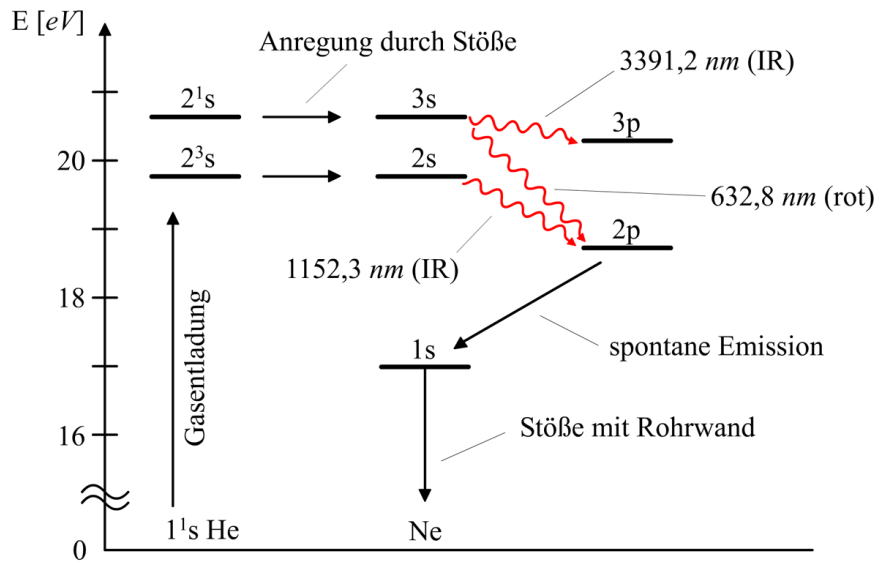


Abbildung 185: Niveauschema des He-Ne-Lasers in vereinfachter Darstellung.

26.2.2 Lichtintensität und Phasenverschiebung

Lichtintensität

Die Intensität I ist als Leistung pro Fläche definiert, lässt sich aber auch über die Energiedichte bestimmen:

$$I = \frac{\left(\frac{dW}{dt}\right)}{dA} = c \cdot \frac{dW}{dA}.$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit. Bei einer elektromagnetischen Welle ist die Energiedichte des elektrischen Feldes genau so groß, wie die Energiedichte des magnetischen Feldes. Man kann also die Intensität angeben, indem man die elektrische Energiedichte

$$\frac{dW_{el}}{dV} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r |\vec{E}|^2$$

mit 2 multipliziert und ausnutzt, dass

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}}$$

gilt. Es folgt

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} |\vec{E}|^2.$$

In diesem Versuch, also bei der Aufnahme von Intensitätsverteilungen, interessiert uns allerdings nur die Proportionalität der Intensität zum Quadrat der elektrischen Feldstärke.

Gangunterschied und Phasenverschiebung

Der Gangunterschied g zwischen zwei Lichtstrahlen der Wellenlänge λ führt zu einer Phasenverschiebung δ der einen Welle gegenüber der anderen. Es gilt

$$\delta = \frac{2\pi g}{\lambda}. \quad (26.2)$$

Die Phasenverschiebung ist bei der Betrachtung der resultierenden E -Feld Amplitude wichtig. Betrachtet man zwei sich überlagernde Strahlen mit gleicher E -Feld Amplitude aber einer Phasenverschiebung δ , so gilt für die resultierende Amplitude E_r

$$\vec{E}_r = \vec{E}_0 + \vec{E}_0 e^{i\delta}. \quad (26.3)$$

26.2.3 Interferenz- und Beugungsmuster**Beugung am Spalt**

Bei der Beugung am Spalt betrachtet man Lichtstrahlen, die von verschiedenen Positionen im Spalt auf einen Punkt treffen. Für große Entfernungen des Punktes ist die Annahme von parallelen Strahlen zulässig.

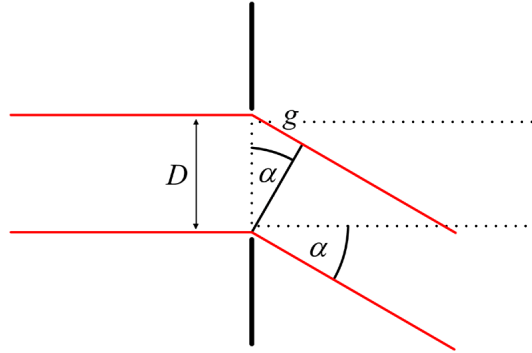


Abbildung 186: Beugung am Spalt.

Teilt man den Spalt in kleine Teilstücke ΔD ein und betrachtet den Gangunterschied g zwischen zwei Strahlen im Abstand von ΔD , dann führt dieser Gangunterschied wieder zu einer Phasenverschiebung. Es ergibt sich die E -Feld Amplitude

$$\vec{E}_r = \frac{\vec{E}_0}{D} + \frac{\vec{E}_0 e^{(i \frac{2\pi \Delta D \alpha}{\lambda})}}{D}.$$

Für die Summierung über alle Lichtstrahlen und die Grenzwertbildung

$$\Delta D \rightarrow 0$$

gilt

$$\vec{E}_r = \frac{\vec{E}_0}{D} \int_0^D e^{(i \frac{2\pi D' \alpha}{\lambda})} dD' = \frac{\vec{E}_0}{D} \left[\frac{\lambda}{2i\pi\alpha} \cdot e^{(i \frac{2\pi D' \alpha}{\lambda})} \right]_0^D$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\vec{E}_0}{D} \frac{\lambda}{2i\pi\alpha} \left(e^{(i\frac{2\pi D\alpha}{\lambda})} - 1 \right) = \frac{\vec{E}_0}{D} \frac{\lambda e^{(i\frac{\pi D\alpha}{\lambda})}}{2i\pi\alpha} \left(e^{(i\frac{\pi D\alpha}{\lambda})} - e^{(-i\frac{\pi D\alpha}{\lambda})} \right) \\
&= \vec{E}_0 e^{(i\pi D\alpha/\lambda)} \frac{\sin(\pi D\alpha/\lambda)}{\pi D\alpha/\lambda}.
\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon = \pi D\alpha/\lambda$ erhält man

$$I(\varepsilon) \sim E_0 \frac{\sin^2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}.$$

Diese Funktion hat ein Maximum, wenn $|\sin(\varepsilon)| = 1$ gilt. Damit folgt als Bedingung an ein Maximum

$$\varepsilon = \frac{2n+1}{2} \cdot \pi \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (26.4)$$

Für ein Minimum lautet die Bedingung $|\sin(\varepsilon)| = 0$. Also

$$\varepsilon = n \cdot \pi \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (26.5)$$

Hierbei ist n die Ordnung des jeweiligen Extremums.

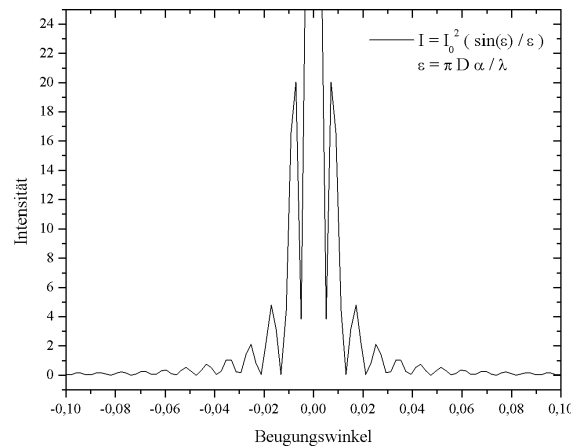


Abbildung 187: Beugungsmuster am Spalt.

In Abbildung 187 haben wir den theoretischen Verlauf der Intensität des Beugungsmuster gegen den Beugungswinkel aufgetragen [die Einheiten sind nicht wirklichkeitstreu]. Man kann erkennen, dass das erste Nebenmaximum relativ intensiv ist, die weiteren Maxima jedoch sehr schwach sind.

Beugung am Steg

Die Intensitätsverteilung hinter dem Steg entspricht der Intensitätsverteilung hinter einem Spalt, jedoch sind die auftreffenden Lichtwellen um π phasenverschoben, was das menschliche Auge aber nicht wahrnehmen kann. Eine Kombination aus Spalt und Steg führt zu einer vollständigen Auslöschung, wie es bei komplementären Objekten auch zu erwarten ist, da hinter einem unendlich ausgedehnten Schirm Dunkelheit herrscht. Ist der Lichtstrahl zu dünn, so entsteht jedoch ein Beugungsmuster wie beim Doppelspalt. Also darf der Lichtstrahl nicht zu fokussiert sein, um das Beugungsmuster des Stegs hervorzurufen. Die Bedingungen für Maxima und Minima an $\varepsilon = \pi D\alpha/\lambda$ sind natürlich auch dieselben wie am Steg.

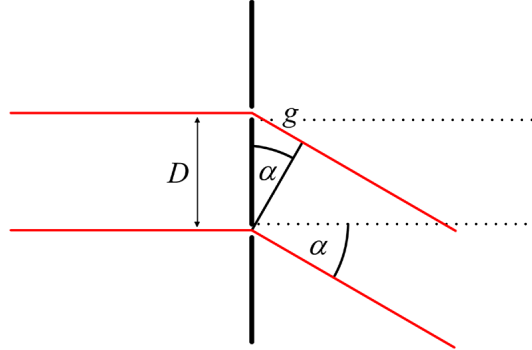
Beugung am Doppelloch

Abbildung 188: Beugung am Doppelloch.

Für den Gangunterschied g zwischen zwei Strahlen aus verschiedenen Spalten mit Abstand D gilt mit $\alpha \approx \sin(\alpha)$ für kleine Winkel

$$g = \sin(\alpha)D \approx \alpha D.$$

Mit (26.3) bekommt man für das resultierende elektrische Feld

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &= \vec{E}_0(1 + e^{i\delta}) \\ &= \vec{E}_0 e^{i\delta/2} (e^{-i\delta/2} + e^{i\delta/2}) \\ &= 2\vec{E}_0 \cos(\delta/2) e^{i\delta/2}. \end{aligned}$$

Mit (26.2) und der Proportionalität $I \sim |\vec{E}|^2 = \vec{E}_r \cdot \vec{E}_r$ bekommt man für die Intensität in Abhängigkeit vom Winkel α

$$I \sim 2E_0 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) e^{i\delta/2} \cdot 2E_0 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) e^{-i\delta/2} = 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{D\pi\alpha}{\lambda}\right).$$

Man führt die Abkürzung $\varepsilon = \pi D\alpha/\lambda$ ein und erhält

$$I(\varepsilon) = I_0 \cos^2(\varepsilon).$$

Diese Funktion ein Maximum, wenn $|\cos(\varepsilon)| = 1$ gilt. Damit folgt für ein Maximum

$$\varepsilon = n \cdot \pi \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (26.6)$$

Für eine Minimum lautet die Bedingung $|\cos(\varepsilon)| = 0$, also

$$\varepsilon = \frac{2n+1}{2} \cdot \pi \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (26.7)$$

Beugung an der Lochblende

Zur Berechnung der Intensitätsverteilung hinter einer Lochblende führt man zuerst Polarkoordinaten ρ und φ zur Beschreibung von Punkten auf der Blende ein.

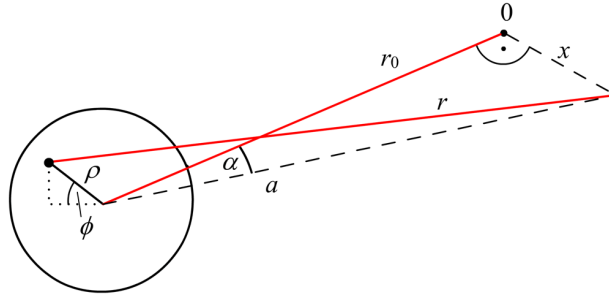


Abbildung 189: Beugung an einer Lochblende.

Der Abstand eines beliebigen Punktes auf der Lochblende zu einem Punkt auf dem Schirm kann über den Abstand dieses Punktes zur Blendenmitte und den Abstand zwischen Blende und Schirm ausgedrückt werden. Es ergibt sich

$$r = \sqrt{(x + \rho \cos(\varphi))^2 + r_0^2 + (\rho \sin(\varphi))^2} = \sqrt{a^2 + 2x\rho \cos(\varphi) + \rho^2}.$$

Geht man davon aus, dass der Schirm weit von der Lochblende entfernt, also ρ gegenüber r_0 sehr klein ist, so bekommt man durch Taylorentwicklung um $\rho = 0$ folgende Näherung für r

$$r = a + \frac{x\rho \cos(\varphi)}{a}.$$

Der Gangunterschied zwischen einem Lichtstrahl der bei (ρ, φ) austritt und einem Lichtstrahl von der Blendenmitte beträgt

$$g = r - a = \frac{x\rho \cos(\varphi)}{a} = \rho \cos(\varphi) \sin(\alpha).$$

Der Beitrag eines Strahls zur resultierenden Feldstärke auf dem Schirm ist somit

$$dE_r = \frac{E_0}{\pi R^2} \exp\left(\frac{i2\pi\rho \cos(\varphi) \sin(\alpha)}{\lambda}\right) \rho \, d\rho \, d\varphi.$$

Durch Integration über die gesamte Lochblende mit Radius $R = D/2$ erhält man

$$\begin{aligned} E_r &= \int_0^R \frac{2E_0}{R^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\left(\frac{i2\pi\rho \cos(\varphi) \sin(\alpha)}{\lambda}\right)} \rho \, d\rho \, d\varphi \\ &= \frac{2E_0}{R^2} \int_0^R J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho \sin(\alpha)\right) \rho \, d\rho, \end{aligned}$$

wobei J_0 die Besselfunktion ist. Dieses Integral bring man in die Form

$$\int_0^x \xi J_0(\xi) \, d\xi,$$

damit man die Eigenschaft

$$\int_0^x \xi J_0(\xi) \, d\xi = -x \cdot J_1(x)$$

der Besselfunktion nutzen kann. Da man hierbei auch die Integrationsvariable ändert, muss man die Grenzen ebenfalls anpassen:

$$\begin{aligned}
 E_r &= \frac{2E_0}{R^2 \left(\frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda} \right)} \int_0^{\frac{2\pi R \sin(\alpha)}{\lambda}} J_0 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho \sin(\alpha) \right) \frac{2\pi}{\lambda} \rho \sin(\alpha) d \left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho \sin(\alpha) \right) \\
 &= \frac{2E_0}{R^2 \left(\frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda} \right)} \int_0^{\frac{2\pi R \sin(\alpha)}{\lambda}} \xi J_0(\xi) d\xi \\
 &= -2 \frac{E_0}{((2\pi R \sin(\alpha))/\lambda)} J_1 \left(\frac{2\pi R \sin \alpha}{\lambda} \right),
 \end{aligned}$$

wobei

$$\xi = \frac{2\pi}{\lambda} \rho \sin(\alpha).$$

Setzt man hier nun noch $R = D/2$ und $\varepsilon = (\pi D \sin \alpha)/\lambda$ ein und bildet das Quadrat der Feldstärke, so erhält man einen zur Intensität proportionalen Ausdruck:

$$I \sim 4 \cdot E_0^2 \left(\frac{J_1(\varepsilon)}{\varepsilon} \right)^2.$$

Diese Funktion hat nun Maxima bzw. Minima an den Stellen, wo die Besselfunktion Maxima bzw. Minima hat. Diese sind im Skript¹ zu finden.

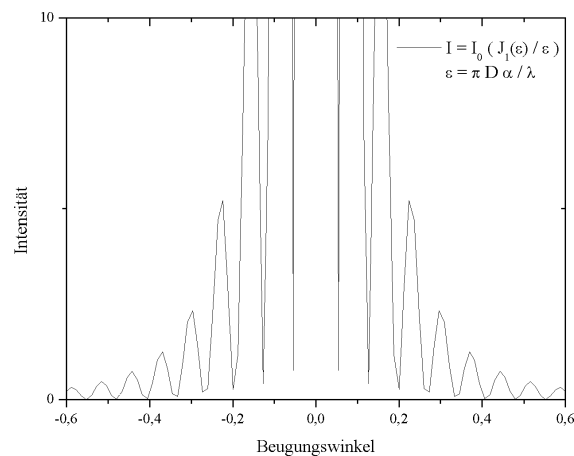


Abbildung 190: Beugungsmuster am der Lochblende.

Abbildung 190 zeigt den theoretischen Verlauf der Intensität des Beugungsmusters [die Einheiten sind nicht wirklichkeitstreu]. Man kann erkennen, dass die ersten Maxima sehr breit im Gegensatz zu den Minima sind. Man muss bei dem Versuch also darauf achten, dass man die Stelle mit der höchsten Intensität genau ausmisst².

¹ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 196.

² Wir haben dies nicht gemacht und können unsere Messung daher nicht auswerten.

Beugung am Gitter

Das Gitter kann man sich als Aneinanderreihung von einzelnen Spalten vorstellen. Diese N Spalten nummeriert man von 0 bis $N - 1$ durch und summiert über die Amplituden des E -Feldes der Lichtwellen samt der zugehörigen Phasen. So erhält man nach einer etwas längeren Rechnung, welche hier nicht ausgeführt werden soll

$$I \sim E_0^2 \left(\frac{\sin \left(\pi D \frac{\alpha}{\lambda} \right)}{\pi D \frac{\alpha}{\lambda}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \left(N \pi D \frac{\alpha}{\lambda} \right)}{\pi D \frac{\alpha}{\lambda}} \right)^2.$$

Dabei ist D die Spaltbreite. Man beachte, dass sich diese Funktion aus der Spaltfunktion [erster Term] und der sogenannten **Gitterfunktion** zusammensetzt.

26.3 Durchführung

Der Laser wird durch den kleinen Schiebeschalter auf der Rückseite angeschaltet. Der Computer wird eingeschaltet [Benutzername „laser“; Kennwort „prakt“]. Ein Terminal wird gestartet, und mit „cd PRAKTIKUM“ in das richtige Verzeichnis gewechselt. Das Messprogramm wird nun über „start“ gestartet und die Referenzfahrt durchgeführt. Dabei wird der Reiter auf die Nullposition gefahren. Der Reiter kann nun mit dem Befehl „r“ bewegt werden. Hierbei handelt es sich um eine Relativbewegung, das heißt, das positive und negative Werte eingegeben werden können. Man beachte, dass es allerdings keine negativen Positionen gibt, so dass der Reiter zunächst in den „positiven“ Bereich gefahren werden muss. Das Hauptmaximum der Beugungsmuster befindet sich meistens zwischen 16000 und 20000. Beim Schrittmotor ergeben 400 Schritte einen Millimeter. Es empfiehlt sich für seine Messdaten einen eindeutigen Präfix zu wählen, sodass die Daten später leichter auf die Diskette kopiert werden können. Anders als bei anderen Versuchen kann man hier kein eigenes Verzeichnis für seine Messungen anlegen, und auch ein Internetzugang steht nicht zur Verfügung³.

Für den Spalt, den Steg, die Kreisblende, einer Doppelochblende und das Gitter werden nun folgende Schritte durchgeführt:

- (1) Das Objekt wird in den Strahlengang gebracht und der Laserstrahl durch die Streulinse soweit aufgeweitet, dass er das gesamte Objekt ausleuchtet.
- (2) Durch eine Testmessung wird diejenige Verstärkung ausgewählt, bei der das Hauptmaximum nicht übersteuert wird. Es empfiehlt sich eine Schrittweite von 100. Der angezeigte Plot ist nur für die Visualisierung der Messdaten gedacht und wird für die Weiterverarbeitung der Daten nicht mehr gebraucht, kann also gelöscht werden.
- (3) Das Hauptmaximum mit jeweils 4 Nebenmaxima [links und rechts] wird ausgemessen.

³ Auch auf Spielereien während der Messung muss man leider verzichten, da die Computer schon ein wenig älter sind.

- (4) Durch eine Testmessung wird diejenige Verstärkung ausgewählt, bei der das erste Nebenmaximum nicht übersteuert wird.
- (5) Die vier Nebenmaxima werden gemessen. Die Schrittweite muss so angepasst werden, dass alle Extrema klar zu erkennen sind.
- (6) In einem zweiten Terminal kann mit „xmgrace DATEINAME“ ein Plot der Messung mit dem Befehl „Drucken“ in das Postscriptformat umgewandelt werden. Mit dem Befehl „lpr DATEINAME.ps“ kann der entsprechende Plot auf dem Drucker ausgegeben werden.

Zum Schluss wird noch der Abstand zwischen dem beugenden Objekt und der Photodiode gemessen. Diese Messung ist für die Auswertung von höchster Bedeutung und sollte deshalb sehr exakt geschehen.

26.4 Auswertung

Der Beugungswinkel α kann mit einfachen Geometrieüberlegungen aus dem Abstand l zwischen der Photodiode und dem Beugungsobjekt und dem relativen Abstand x zum Hauptmaximum bestimmt werden. Es gilt

$$\alpha = \arctan\left(\frac{x}{l}\right)$$

und wir haben $l = (99,7 \pm 1) \text{ cm}$ gemessen.

26.4.1 Berechnung von D

Es gilt

$$\varepsilon = \frac{\pi D \sin \alpha}{\lambda},$$

und somit

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{D} \frac{\varepsilon}{\pi} = m \frac{\varepsilon}{\pi}. \quad (26.8)$$

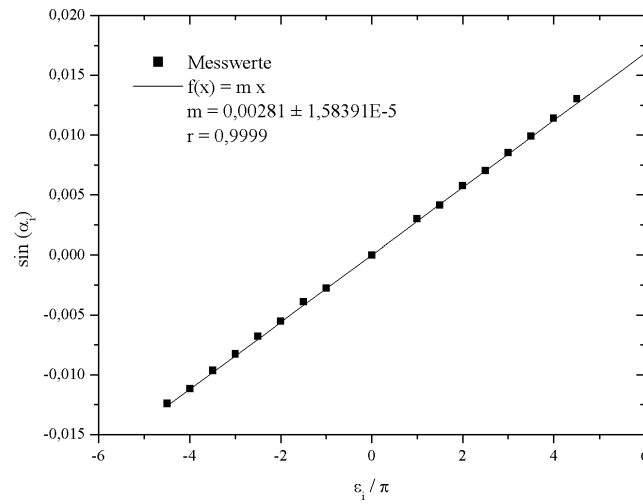
Dabei ist m die Steigung der Auftragung von dem Sinus Winkels des i -ten Extremums $\sin \alpha_i$ gegen seine Ordnung ε_i/π . Die Intensitätsverteilungen und deren Extrema wurden im Theorieteil hergeleitet. Somit können wir ε_i/π berechnen. Nun kann die charakteristische Größe D des jeweiligen Beugungsobjektes nach Gleichung (26.8) bestimmt werden. Es gilt

$$D = \frac{\lambda}{m} \quad \text{mit dem Fehler} \quad \sigma_D = \frac{\sigma_m \lambda}{m^2}.$$

Der Literaturwert⁴ der Wellenlänge des Lasers liegt bei $\lambda = 632,8 \text{ nm}$. Im Folgenden stellen wir die jeweiligen linearen Regressionen⁵, die berechneten Werte für D und den jeweiligen Literaturwert dar.

⁴ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 190.

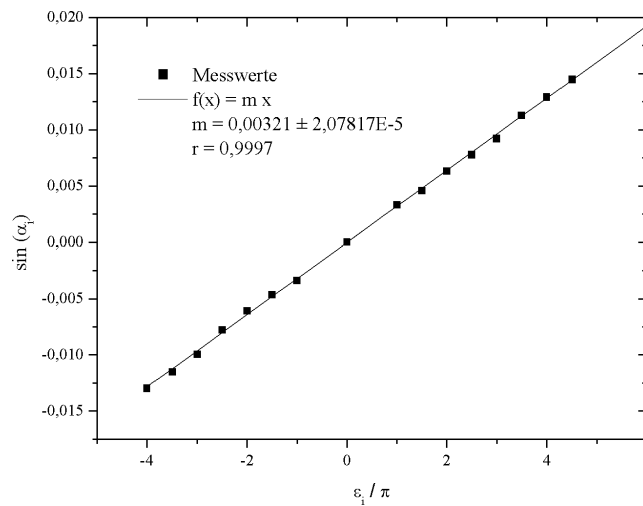
⁵ Die Steigung m mit Fehler und der Korrelationskoeffizient r können den Auftragungen entnommen werden.

Beugung am SpaltAbbildung 191: Bestimmung von D vom Spalt.

Die Werte der Ordnungszahlen ergeben sich durch (26.4) und (26.5). Wir erhalten

$$D = (225 \pm 2) \mu m.$$

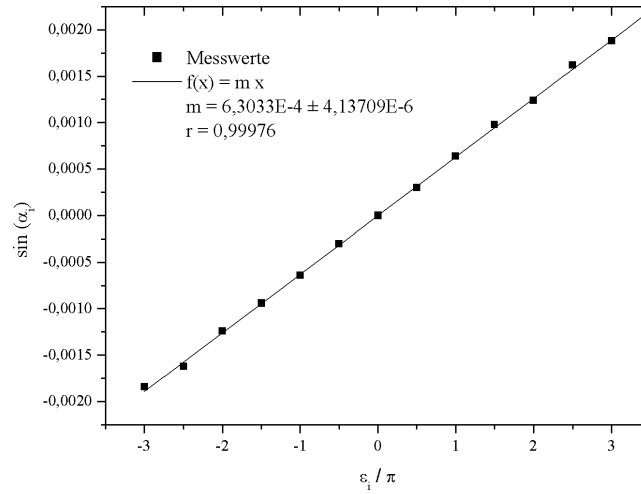
Der Literaturwert liegt bei $237 \mu m$.

Beugung am StegAbbildung 192: Bestimmung von D vom Steg.

Die Werte der Ordnungszahlen ergeben sich wieder durch (26.4) und (26.5). Wir erhalten

$$D = (197 \pm 2) \mu m.$$

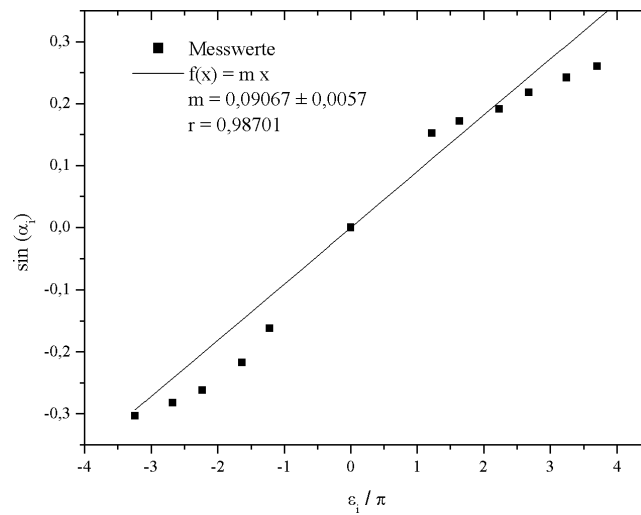
Der Literaturwert liegt bei $195 \mu m$.

Beugung am DoppellochAbbildung 193: Bestimmung von D des Doppelloches.

Die Werte der Ordnungszahlen ergeben sich durch die Werte im Skript⁶. Wir erhalten

$$D = (1004 \pm 7) \mu\text{m}.$$

Der Literaturwert liegt bei $1500 \mu\text{m}$.

Beugung an der KreisblendeAbbildung 194: Bestimmung von D der Kreisblende.

⁶ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 196.

Die Werte der Ordnungszahlen ergeben sich durch die Werte im Skript⁷. Wir erhalten

$$D = (7 \pm 1) \mu\text{m}.$$

Der Literaturwert liegt bei $200 \mu\text{m}$. Dies ist eine beträchtliche Abweichung. Wir haben, wie schon erwähnt, wahrscheinlich nicht die richtigen Extrema aufgenommen, da wir das Hauptmaximum nicht genau genug vermessen haben. Leider sind uns auch die höheren Zahlenwerte der Extrema der Besselfunktion $J_1(\varepsilon)$ nicht bekannt. Somit können wir keinen besseren Wert für D bestimmen. Zudem sind unsere Plots mit vielen Störungen behaftet, die eventuell von dem Licht der Computermonitore erzeugt wurden. Somit können wir auch kaum Maxima oder Minima unterscheiden, geschweige denn Hauptmaxima oder Nebenmaxima.

Beugung am Gitter

Uns ist leider nicht klar, wie wir die Ordnungszahlen des Gitters bestimmen sollen. Laut Vorgängerprotokoll hängt ε und somit die Ordnungszahl von der Stegbreite S und der Spaltbreite D ab. Da wir aber D bestimmen wollen, macht diese Rechnung keinen Sinn.

26.4.2 Bestimmung der Wellenlänge

Um die Wellenlänge des He-Ne-Lasers zu bestimmen, formen wir (26.8) nach λ um und erhalten

$$\lambda = m \cdot D \quad \text{mit dem Fehler} \quad \sigma_\lambda = \sigma_m \cdot D.$$

Nehmen wir also D als gegeben an, können wir λ berechnen. Die beste Korrelation r^2 haben wir bei den Messungen am Spalt und am Steg erreicht. Wir erhalten

$$\lambda_{\text{Spalt}} = (666 \pm 4) \text{ nm} \quad \text{und} \quad \lambda_{\text{Steg}} = (626 \pm 5) \text{ nm}.$$

Es ergibt sich ein gewichteter Mittelwert von

$$\lambda = (650 \pm 4) \text{ nm}.$$

Der Literaturwert liegt, wie schon erwähnt, bei $632,8 \text{ nm}$.

26.5 Diskussion

Die Messwerte bei Spalt und Gitter sind erstaunlich exakt. Leider war im Praktikumsskript etwas ungenau beschrieben, was bei der Kreisblende zu messen war, so dass wir unsere Messungen nicht verwerten können. Auch die höheren Extrema der Besselfunktion konnten wir leider nicht bestimmen, so dass wir die Messung nicht retten können. Wir hoffen, dass unsere Nachfolger unser Protokoll lesen, und etwas genauer, und vor allem schneller, wissen, was sie zu tun haben.

⁷ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 196.

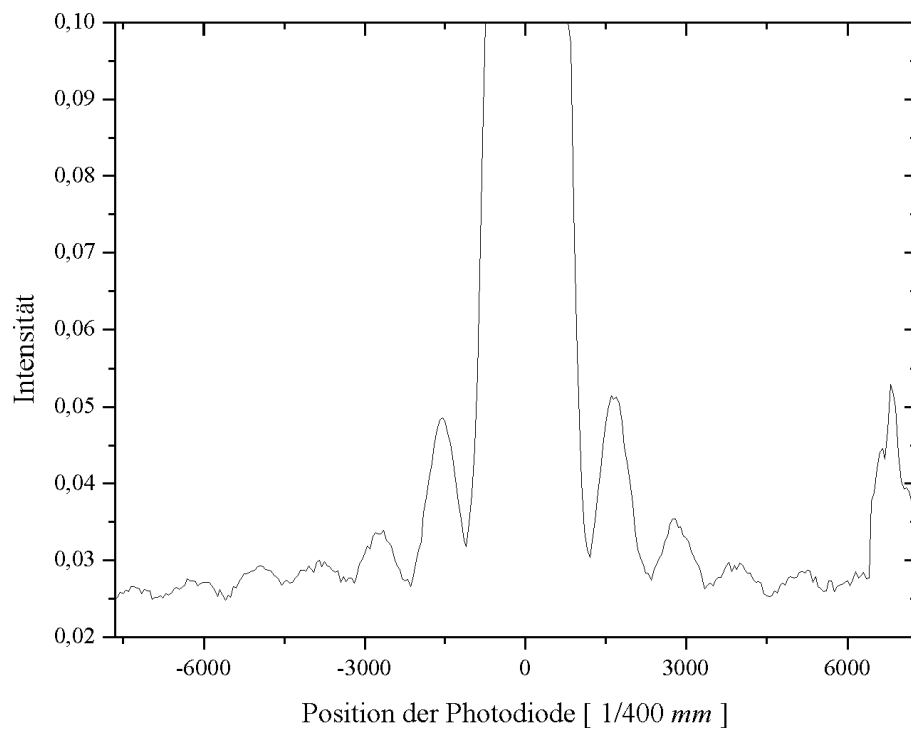
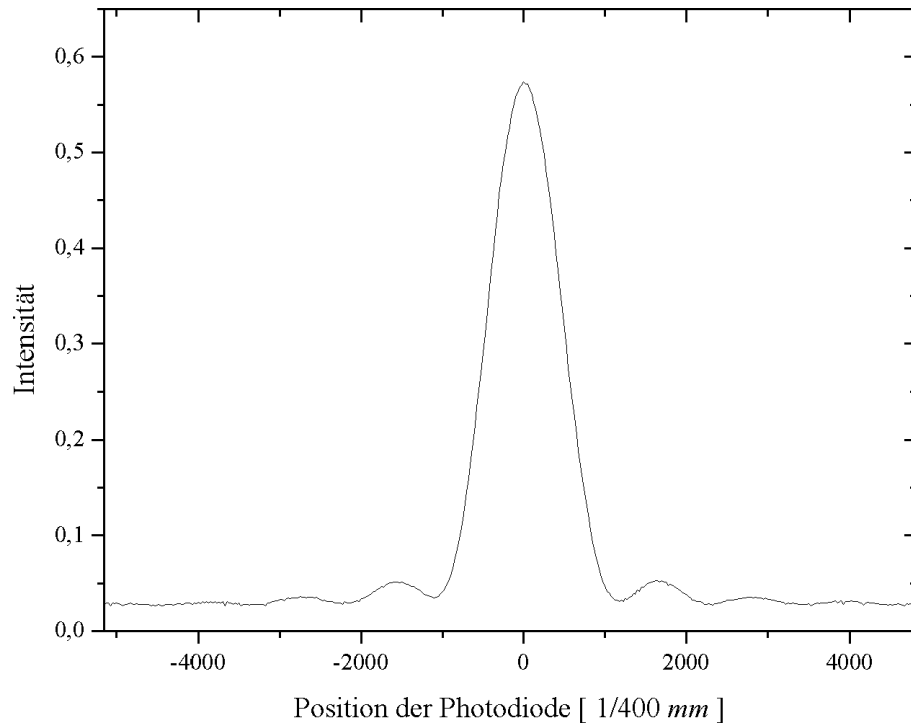
Eigene Kommentare

[Also ich fand den Versuch ganz nett.]_{Daniel}

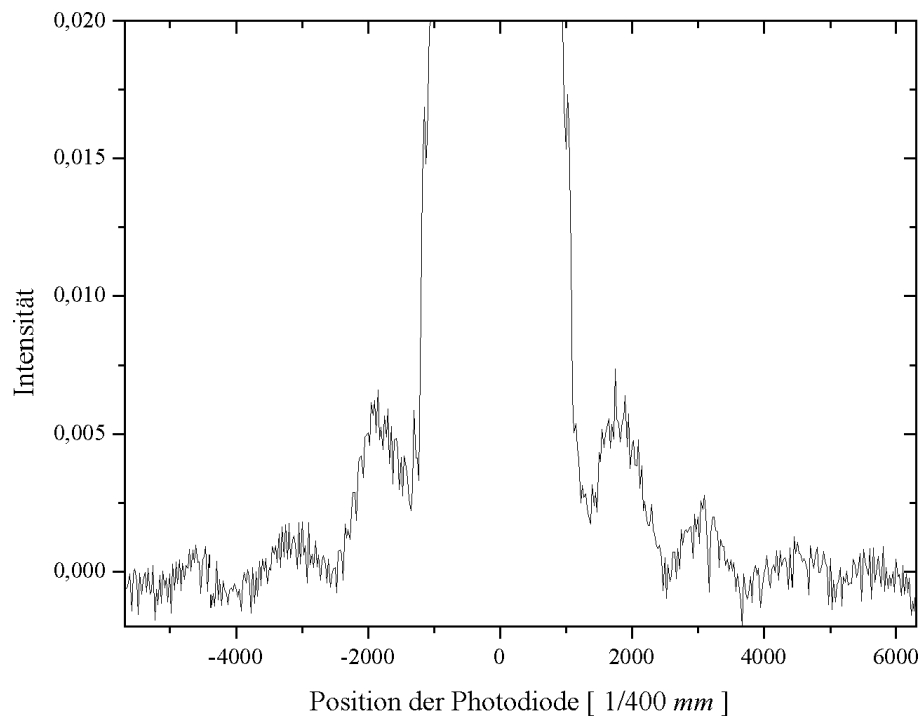
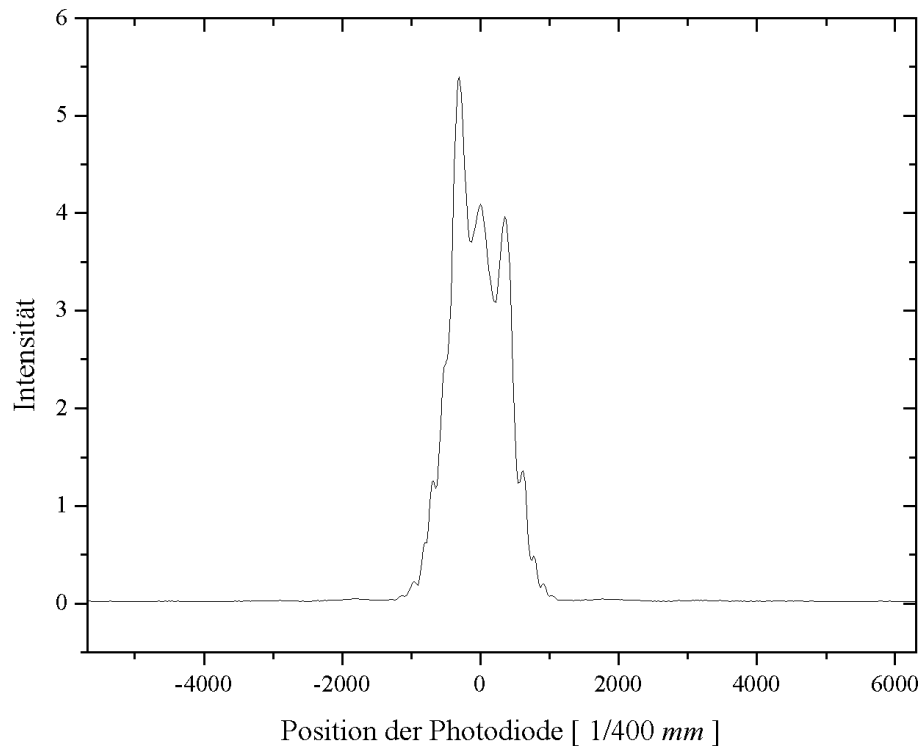
[Der Versuch war eigentlich ganz spaßig, auch wenn es ewig gedauert hat die Messungen aufzunehmen, und ganz so intuitiv war das Messprogramm nun auch wieder nicht. Die Auswertung war sehr nervig. Es hat ewig gedauert alle Extrema richtig zu bestimmen, auch Computerprogramme konnten hier nicht helfen, da die Messungen mit vielen Störungen überlagert waren. Ich habe einige Stunden versucht den Versuch mit der χ^2 -Methode auszuwerten, was leider nicht geklappt hat, da mir das Verhältnis zwischen der Spannung an der Photodiode und der Intensität des Laserstrahls nicht klar war, und zuviel Störungen in den Messwerten waren. Ansonsten hätte diese Methode die Auswertung sehr viel eleganter und effektiver gemacht.]_{Hauke}

26.6 Anhang

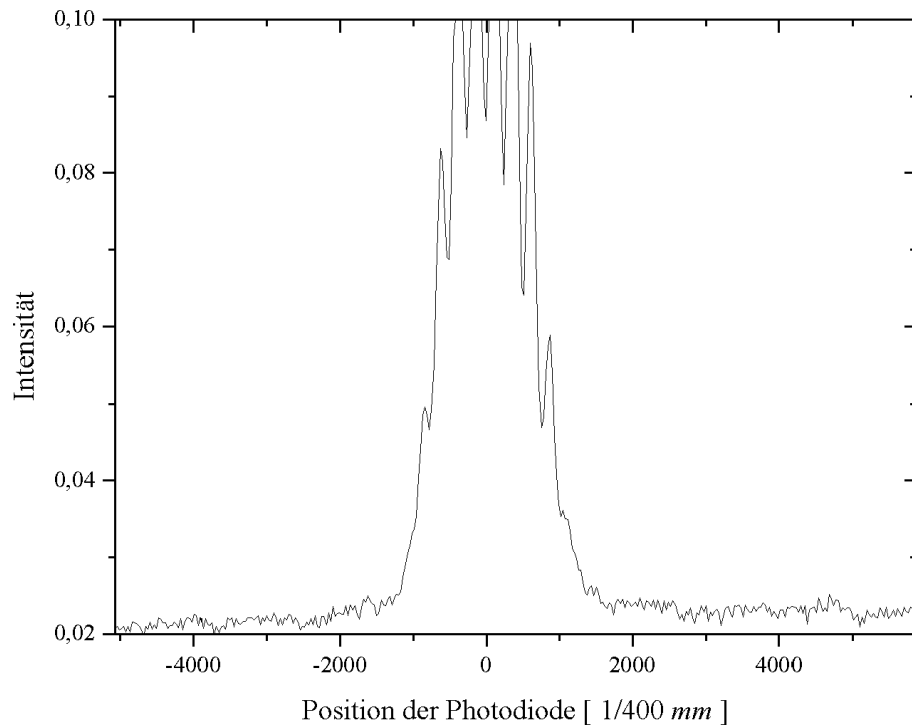
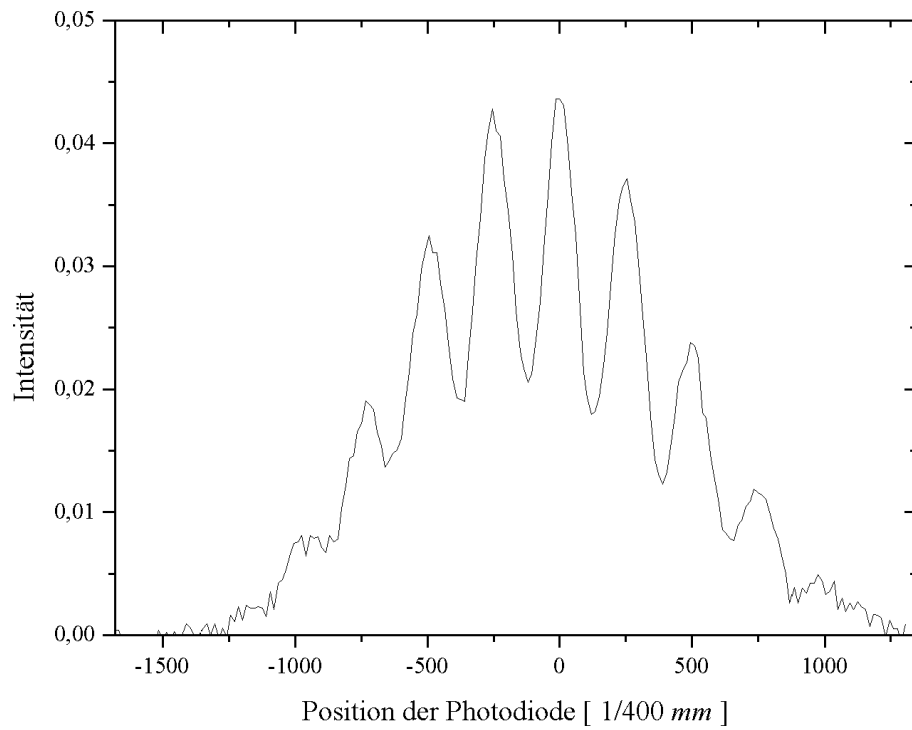
Beugung am Spalt



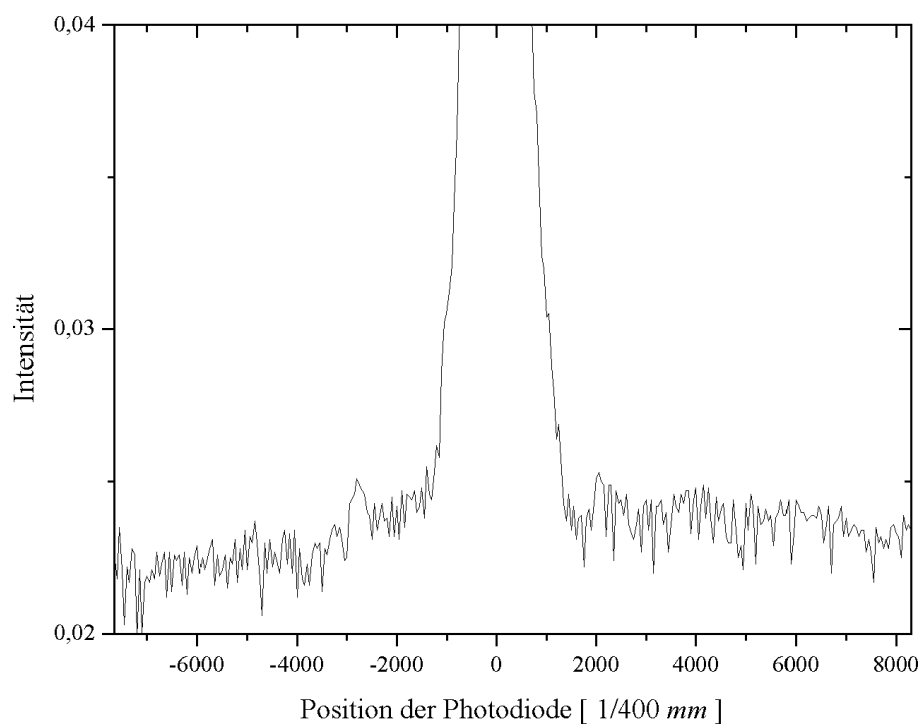
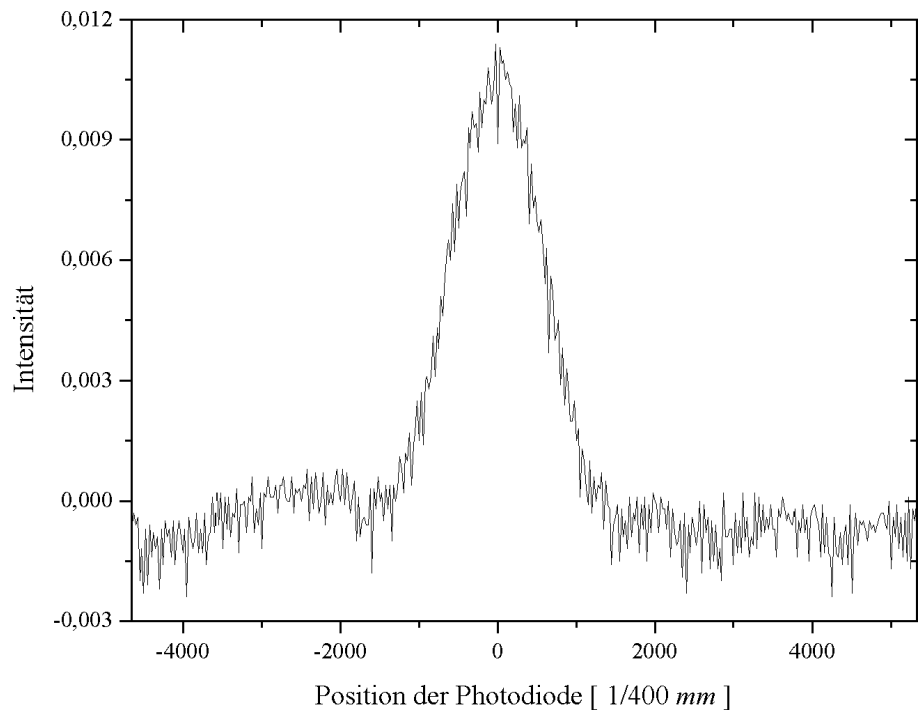
Beugung am Steg



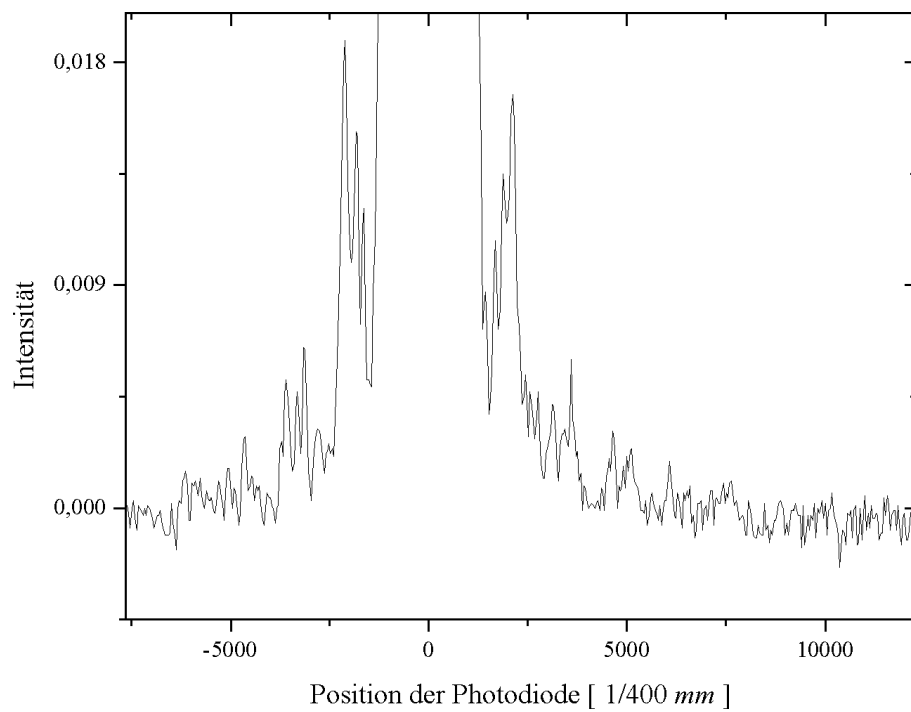
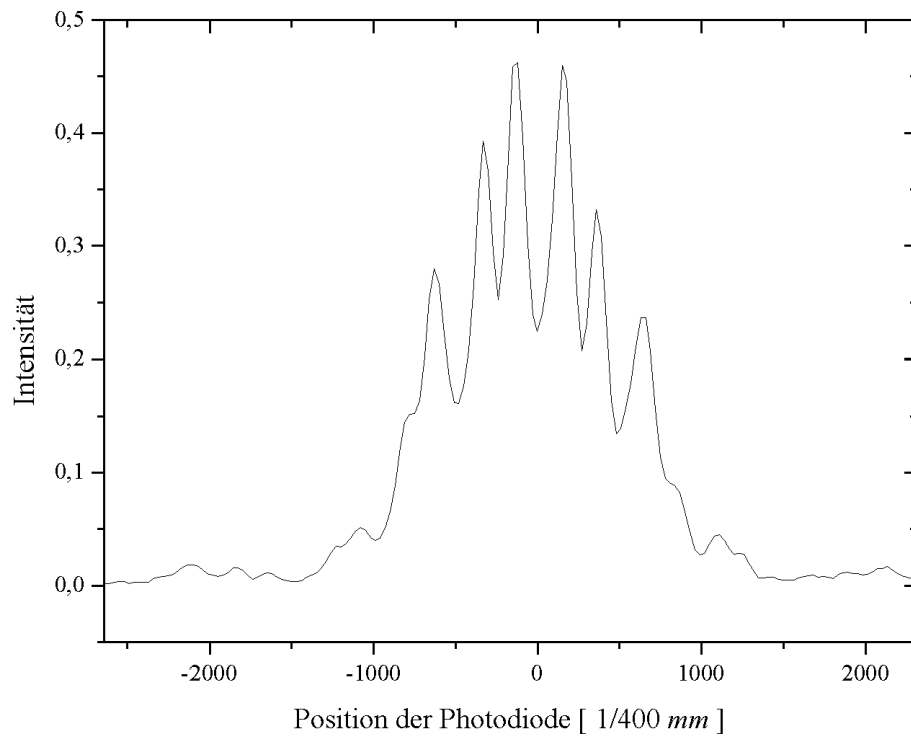
Beugung am Doppelloch



Beugung an der Kreisblende



Beugung am Gitter



27 Der Franck-Hertz-Versuch

Versuch durchgeführt am 16. Februar 2006, Protokoll erarbeitet von Daniel Scholz.

27.1 Einleitung

Mit Hilfe des **Franck-Hertz-Versuches** konnte 1913 zum ersten Mal durch ein quantenphysikalisches Experiment nachgewiesen werden, dass die Energieabgabe von Atomen nur in festen Portionen [**Quanten**] erfolgen kann. Damit konnte das Bohrsche Atommodell bestätigt werden.

Im Versuch werden Quecksilberatome mit verschiedenen Energien konfrontiert und somit versucht sie anzuregen. Es stellt sich heraus, dass sich das Quecksilberatom nur mit bestimmten Energien anregen lässt. Daraus kann man schließen, dass Elektronen im Atom nur zwischen fest vorgegebenen Energien wechseln können, oder wie es im Bohrschen Atommodell beschrieben wird: Elektronen können nur auf bestimmten Bahnen um den Kern kreisen.

27.2 Theorie

27.2.1 Das Bohrsche Atommodell

Nach dem Bohrschen Atommodell kreisen die negativ geladenen Elektronen um einen positiv geladenen Atomkern, ähnlich wie die Planeten im Sonnensystem. Die Zentrifugalkraft des sich bewegende Elektrons wird gleichgesetzt mit der Coulombkraft zwischen Elektronen und Protonen. Nach den Maxwellgleichungen müsste das Elektron als ein beschleunigter Ladungsträger elektromagnetische Strahlung aussenden. Dabei würde es Energie verlieren. Die Kreisbahn des Elektron würde kleiner werden, bis es schließlich in den Kern stürzt. Um seine Theorie zu retten, stellte Bohr Postulate auf. Demnach können Elektronen auf bestimmten Bahnen um den Kern kreisen, ohne Strahlen abzugeben und somit Energie zu verlieren. Man sagt, diese Bahnen seien **gequantelt**. Bei einem unangeregten Atom sind die Elektronen im energieniedrigsten Zustand. Durch Energiezufuhr kann ein Atom angeregt werden, das heißt, dass ein Elektron von einem niedrigen in einen höheren Energiezustand springt. Die Energiezufuhr entspricht dann genau der Differenz dieser beiden Zustände. Ist Licht der Energielieferant, so können die Lichtwellen die Atome anregen. Licht kann man als Teilchen mit einer Energie auffassen. Man nennt sie dann **Lichtquanten**. Lichtquanten, die die richtige Energie besitzen um ein Atom anzuregen, werden

absorbiert, man sieht sie nicht mehr. Die anderen Lichtquanten bleiben unverändert. Im vorher kompletten Lichtspektrum fehlen die absorbierten Lichtquanten, dort ist anstelle der Farbe ein schwarzer Strich. Springt das Elektron in seinen ursprünglichen Zustand zurück, so wird Energie in Form von Lichtwellen frei, man nennt dies **Emission**. Der emittierte Lichtquant hat dieselbe Energie, welche notwendig war, um das Elektron in den höheren Zustand anzuregen. Die Energie des Lichtquanten ist dann

$$E = h\nu,$$

dabei ist $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ die Plancksche Konstante¹ und ν die Frequenz des emittierten Lichts.

Ein Atom kann auch so weit angeregt werden, dass das Elektron den Einflußbereich des Atom verlässt. Das Atom ist dann ein Ion, dem ein Elektron fehlt, daher ist es positiv geladen.

Im Franck-Hertz-Versuch ist der Energielieferant nicht Licht, sondern es sind freie Elektronen. Ihnen wird kinetische Energie durch eine Beschleunigungsspannung zugeführt. Die Elektronen können bei ihrem Gang durch die Röhre mit Quecksilberatomen zusammenstoßen. Dabei muss man zwei Fälle unterscheiden:

- (1) Die Elektronen haben nicht genug Energie, um die Quecksilberatome anzuregen.

In diesem Fall ist der Stoß unelastisch, es findet kein Energieaustausch statt. Die Elektronen haben noch ihre gesamte kinetische Energie, nur ihre Richtung kann geändert werden.

- (2) Die Elektronen haben genug Energie, um die Quecksilberatome anzuregen.

In diesem Fall ist der Stoß elastisch, es findet ein Energieaustausch statt. Das Elektron gibt genau so viel Energie ab, wie das Quecksilberatom braucht, um angeregt zu werden. Die kinetische Energie geht dem freien Elektron verloren, seine Geschwindigkeit wird kleiner.

27.2.2 Sättigungsdampfdruck

Betrachtet man eine Flüssigkeit, die in ein Vakuumgefäß gebracht wurde, so wird ein Teil der Flüssigkeit verdampfen und es stellt sich ein charakteristischer Druck in diesem Gefäß ein [siehe Versuch 8: Der Dampfdruck von Wasser]. Dieser Druck wird als **Sättigungsdampfdruck** bezeichnet. Er ist temperaturabhängig: Bei steigender Temperatur steigt auch der Dampfdruck. Dies liegt daran, dass bei hohen Temperaturen mehr Teilchen die Energie aufbringen können um die Kohäsionskräfte der Nachbarpartikel zu überwinden und somit aus der Flüssigkeit austreten können.

Bei unserem Versuch wird ausgenutzt, dass ein höherer Druck eine höhere kinetische Energie der Teilchen bedeutet, und somit die Kollisionswahrscheinlichkeit größer wird.

¹ Nach D. Meschede (2001): "Gerthsen Physik", 21. Auflage, Springer Verlag Berlin.

27.2.3 Mittlere freie Weglänge

Zwischen Elektronen und Quecksilbergasatomen kommt es zu Zusammenstößen. Als **mittlere freie Weglänge** bezeichnet man dabei den Weg, den das Teilchen im Mittel zurücklegt, ohne auf ein anderes Teilchen zu treffen. Diese Weglänge ist abhängig von der kinetischen Energie der Teilchen und damit auch abhängig von der Temperatur des gesamten Systems sowie unabhängig von der Teilchenzahldichte.

Für den Franck-Hertz-Versuch sollten die Elektronen idealerweise eine mittlere freie Weglänge haben, die kurz genug ist, so dass die Elektronen während ihres Weges von der Kathode zur Anode auf ein Quecksilberatom treffen können.

27.2.4 Der Franck-Hertz-Versuch

In einer mit Quecksilberdampf gefüllten Röhre liegen eine Glühkathode und eine Anode. Dazwischen liegt ein Gitter, an welchem eine regelbare Spannung anliegt. Wird nun die Glühkathode erwärmt, erhalten einige Elektronen genug Energie, um aus der Kathode auszutreten. Durch die Spannung am Gitter werden die Elektronen beschleunigt. Ihre Energie beträgt dann $E = eU$, dabei ist U die **Beschleunigungsspannung** mit 0 bis 30 V. Die Anode ist gegenüber dem Gitter negativ geladen. Die Elektronen müssen also Energie aufbringen, um die Anode zu erreichen, dort fließt dann ein Strom. Dieser **Auffängerstrom** wird gemessen, wodurch man erfährt, wie viele Elektronen genug Energie aufbringen konnten, um gegen die Anodenspannung anzukommen.

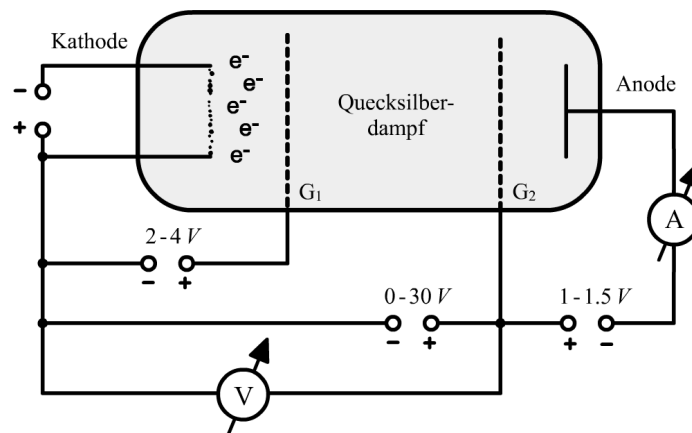


Abbildung 195: Aufbau des Franck-Hertz-Versuches mit Raumladungsgitter G_1 und Beschleunigungsgitter G_2 .

Auf ihrem Weg von der Kathode zur Anode treffen einige Elektronen also auf Quecksilberatome, mit denen sie kollidieren. Haben die Elektronen wenig Energie, so werden diese Stöße nur elastisch sein und es kommt zu keinem Energieaustausch. Der Anodenstrom steigt dann proportional zur Beschleunigungsspannung.

Ab einer bestimmten Beschleunigungsspannung sinkt der Anodenstrom ab. Dies liegt daran, dass die Elektronen genug kinetische Energie aufbringen können, um die Quecksilberatome anzuregen. Diese kinetische Energie entspricht gerade der

Anregungsenergie des Quecksilberatoms² von 4.9 eV . Hierzu geben sie kinetische Energie ab und sind daher nicht mehr in der Lage die Anodenspannung zu überwinden.

Bei einem weiteren Anstieg der Beschleunigungsspannung steigt auch der Anodenstrom weiter an, bis die Elektronen genug Energie haben zwei Quecksilberatome anzuregen und so weiter. Wir erwarten also einen Verlauf, wie er in Abbildung 196 skizziert wurde.

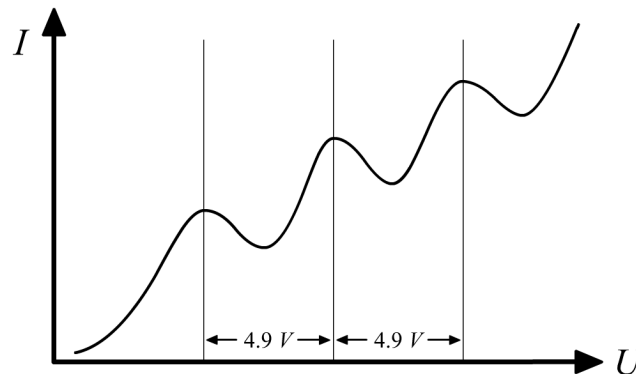


Abbildung 196: Erwarteter Zusammenhang zwischen Beschleunigungsspannung U und Auffängerstrom I .

Aus der Spannungsdifferenz zweier Maxima von 4.9 V und der Elementarladung $E = eU$ erhält man die Energie, die nötig ist, um ein Quecksilberatom auf ein höheres Niveau anzuregen.

An der Stelle eines Anodenstromminimums gilt

$$eU = h\nu,$$

dabei ist wieder e die Elementarladung, U die Beschleunigungsspannung, h die Plancksche Konstante und ν die Frequenz des Lichts, das bei der Rückkehr in den Grundzustand ausgestrahlt wird. Man erhält also einen Zusammenhang zwischen elektrisch gemessener Energie und Lichtwellenlänge.

Ziel des Versuches wird es nun sein, diese Phänomene zu untersuchen.

Der Raumladungseffekt

Da die Quecksilberatome ungeladen sind, herrscht innerhalb der Röhre im Idealfall ein homogenes elektrisches Feld. Dies ist aber in der Realität nicht der Fall. Insbesondere bei kleinen Anodenspannungen bildet sich zwischen Anode und Kathode eine negative Raumladung aus und nur deren oberste Schicht wird durch das Feld beschleunigt. Ihr Feld stößt auch abgedampfte Elektronen in die Kathode zurück, so dass sie zeitlich konstant bleibt. Bei wachsender Anodenspannung wird diese Raumladung schrittweise abgebaut, da Elektronen

² Nach Praktikumsript: Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 204.

„abgesaugt“ werden und die Emissionsfähigkeit der Kathode begrenzt ist. Daher beginnt der regulär zu messende Stromfluss erst bei einer Spannung, die der negativen Raumladung überwiegt. Für die Auswertung hat dies die Folge, dass nicht der Absolutbetrag des ersten Maximums als Anregungsenergie verwendet werden kann, sondern nur die Differenz zwischen den Maxima, die von der Theorie ja mit 4.9 eV pro Quecksilberatom als konstant vorhergesagt wird.

27.3 Versuchsdurchführung

Der allgemeine Versuchsaufbau wurde bereits in Abbildung 195 veranschaulicht und unter Kapitel 27.2.4 beschrieben.

Nach halbstündigem Vorheizen auf 167°C wird die Kathodenspannung [Beschleunigungsspannung] in 0.2 V Schritten von 0 V bis ca. 30 V hochgeregelt und die entstehenden Ströme [Auffängerstrom] über das Nanoamperemeter abgelesen.

Anschließend wird die Anlage auf 191°C vorgeheizt und es wird eine analoge Messung durchgeführt.

Es sollte auch die Nummer der verwendeten Anlage notiert werden.

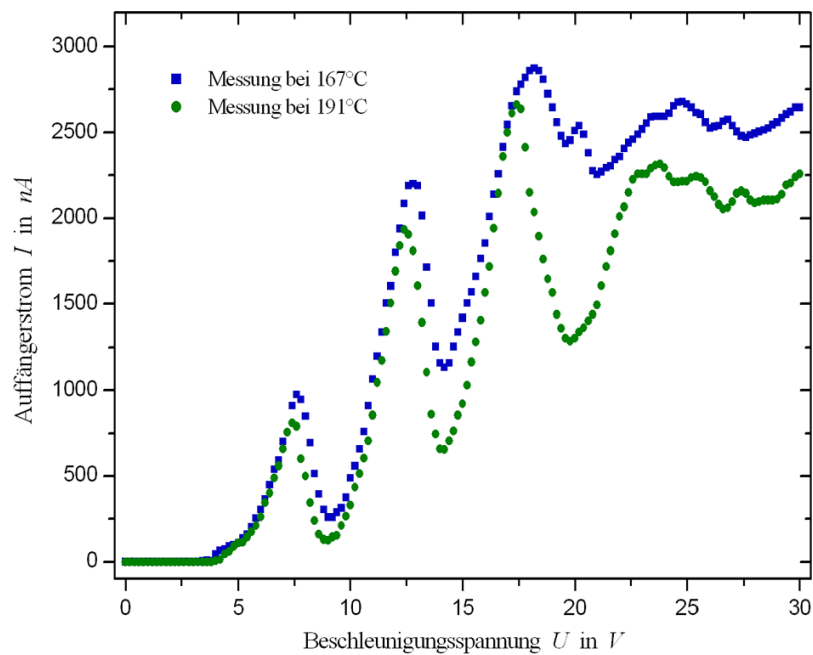
27.4 Auswertung

Zunächst möchten wir festhalten, dass der Versuch sehr viel schlechter verlief, als wir erwartet hätten. Unserer erste Messung [nach langem Vorheizen] mussten wir abbrechen, da wir an der Skala des Ampèremeters unseren Auffängerstrom bereits bei einer Beschleunigungsspannung von 12 V nicht mehr messen konnten.

Bei unseren weiteren Messungen entschlossen wir uns, die Skala des Ampèremeters auf der größten Auflösung zu halten. Somit erwarten wir im gesamten Versuch alleine durch Ableseschwierigkeiten recht große Fehler.

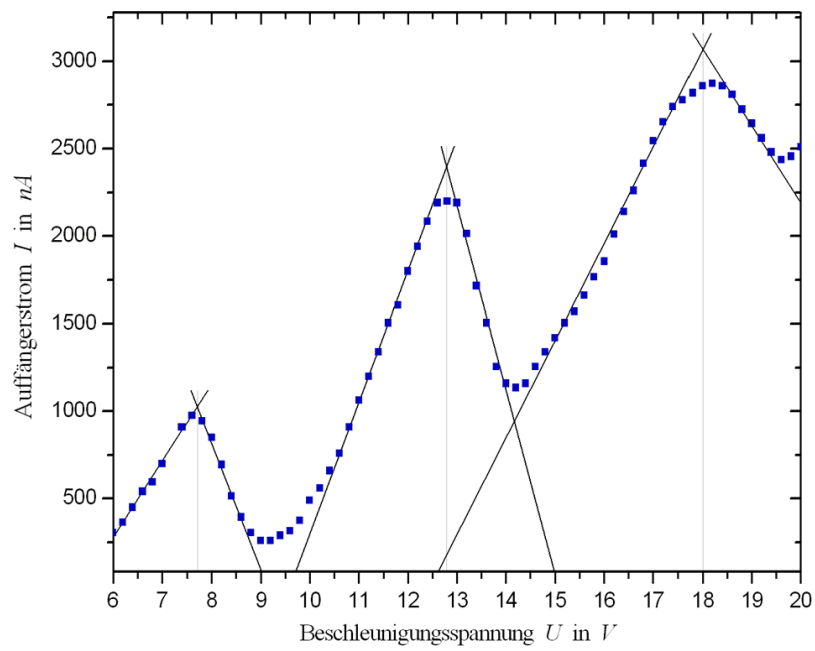
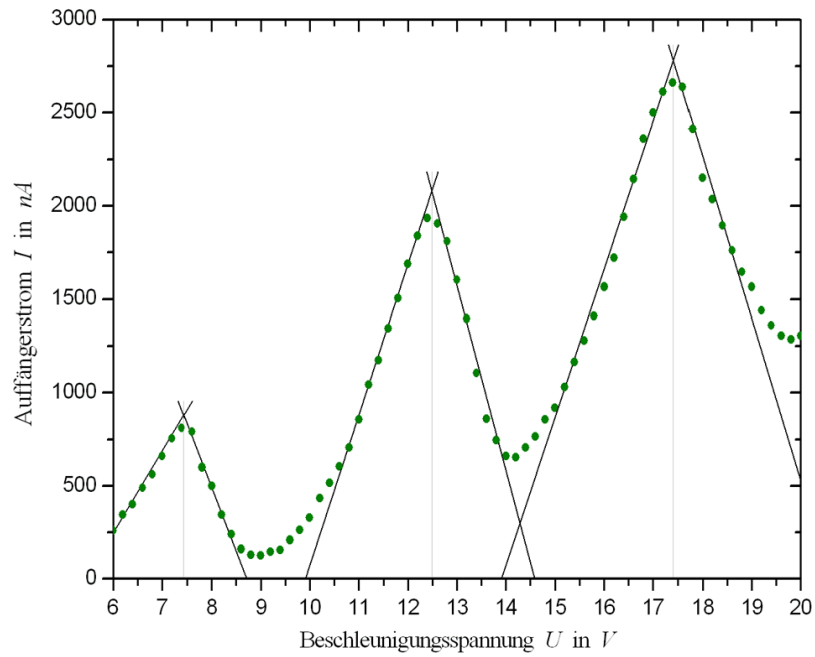
27.4.1 Bestimmung der Anregungsenergie des Quecksilbers

Zunächst haben wir in Abbildung 197 den Auffängerstrom I gegen die Beschleunigungsspannung U von beiden Messungen gemeinsam aufgetragen.

Abbildung 197: Auffängerstrom I gegen Beschleunigungsspannung U .

Bei diesen Auftragungen haben wir bereits einige Messwerte ignoriert, die ganz offensichtlich Ablesefehler darstellten. Desweiteren haben wir auch eine Sprünge in den Kurven korrigiert. Diese Sprünge entstanden evtl. durch eine Verschiebung des Offsets oder Ähnliches. Die originalen Auftragungen ohne jegliche Korrekturen sind im Anhang zu finden.

Aus beiden Messungen bestimmen wir die lokalen Maxima dadurch, dass wir die Schnittpunkte der Tangenten an den Linienflacken bestimmen, siehe dazu Abbildung 198 und Abbildung 199.


Abbildung 198: Bestimmung der lokalen Maxima bei der Messung bei 167°C .

Abbildung 199: Bestimmung der lokalen Maxima bei der Messung bei 191°C .

Dabei erschien es uns am sinnvollsten, die Tangenten mit dem Auge und nicht durch lineare Regression zu bestimmen³. Die Fehler der ermittelten Maxima ergeben sich aus den Einstellungsschwierigkeiten der Beschleunigungsspannung sowie aus dem geschätzten Fehler bei der Ermittlung der Tangenten. Durch sinnvolle Schätzungen der Fehler erhalten wir die folgenden Werte der Maxima:

	Maximum 1	Maximum 2	Maximum 3
Messung 167 °C	$(7.44 \pm 0.15) V$	$(12.50 \pm 0.1) V$	$(17.41 \pm 0.2) V$
Messung 191 °C	$(7.73 \pm 0.15) V$	$(12.79 \pm 0.1) V$	$(17.52 \pm 0.15) V$

Als gewichteten Mittelwert aus den Differenzen zwischen den Maxima erhalten wir

$$(4.94 \pm 0.07) V.$$

Nach Definition der Spannung erhält man die Energie, die die Elektronen brauchen, um die Quecksilberatome in einen angeregten Zustand zu versetzen:

$$U = \frac{\Delta E}{Q} \quad \Rightarrow \quad \Delta E = U \cdot Q.$$

Bei uns beträgt die Anregungsenergie also

$$\Delta E = (4.94 \pm 0.07) eV.$$

27.4.2 Wellenlänge des optischen Übergangs zwischen den Niveaustufen

Mit der Planckschen-Konstante $h = 6.626 \cdot 10^{-34} Js$ und der Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 2.997 \cdot 10^8 m/s$ kann nun die Wellenlänge des von Quecksilber ausgesandten Lichts beim Übergang vom angeregten in den Grundzustand bestimmen werden, denn es gilt

$$\Delta E = eU = h\nu = h \frac{c_0}{\lambda}$$

und damit folgt

$$\lambda = h \frac{c_0}{\Delta E}.$$

Wir erwarten dabei einen Fehler von

$$\sigma_\lambda = \left| \frac{\partial \lambda}{\partial \Delta E} \cdot \sigma_{\Delta E} \right| = \left| h \frac{c_0}{(\Delta E)^2} \cdot \sigma_{\Delta E} \right|$$

und berechneten eine Wellenlänge von

$$\lambda = (251 \pm 3) nm.$$

³ Zur sinnvollen Abschätzungen mit dem Auge hat auch Herr Schaaf in der Vorbesprechung zum Praktikum geraten.

Übergang der Elektronen

Ein Quecksilberatom besitzt 80 Elektronen, die nach dem Bohrschen Atommodell auf 6 Schalen angeordnet sind. Auf der n -ten Schale finden maximal $2n^2$ Elektronen Platz. Ein Quecksilberatom hat im Grundzustand auf der $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Schale genau $\{2, 8, 18, 32, 18, 2\}$ Elektronen. Somit sind die fünfte und die sechste Schale nicht vollständig besetzt und können angeregte Elektronen aus darunter liegenden Schalen aufnehmen. Die hier beobachteten Anregungen sind also P - Q - bzw. O - P -Übergänge.

27.5 Diskussion

Bei höherer Temperatur haben wir einen Verlauf erwartet, der deutlicher unter dem bei geringerer Temperatur liegt, da hier der höhere Dampfdruck die Bewegung der Elektronen beeinträchtigt. Bei großen Beschleunigungsspannungen sind die Maxima nicht mehr ausreichend erkennbar, zudem liefern diese zunehmend schlechtere Werte, es wurden daher nur die ersten drei lokalen Maxima betrachtet.

Die gemessene Anregungsenergie $(4.94 \pm 0.07) \text{ eV}$ liegt nahe beim Literaturwert von 4.9 eV .

Der Literaturwert der berechneten Wellenlänge⁴ beträgt $\lambda = 253.7 \text{ nm}$. Damit haben wir mit $\lambda = (251 \pm 3) \text{ nm}$ einen hervorragenden Wert erzielt. Trotz der großzügigen Schätzungen unserer Fehler haben sich schließlich viele Messungenauigkeiten gegeneinander aufgehoben.

Eigene Kommentare

[Mal wieder ein Versuch mit drei Gruppen in einem Raum, das macht 20 Leute. Ansonsten nette Theorie, netter Versuch, aber recht stumpf.]_{Daniel}

[Schade, dass wir den Versuch schon drei mal in der Physik III Vorlesung gesehen haben. Sonst wäre er ja vielleicht spannender gewesen und man hätte nicht gewusst, dass dieser Versuch auch innerhalb von 20 s durchführbar ist.]_{Hauke}

⁴ Nach Praktikumsript: Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 204.

28 Röntgenstrahlung

Versuch durchgeführt am 17. Februar 2006, Protokoll erarbeitet von Daniel Scholz.

28.1 Einleitung

Röntgenstrahlung ist verglichen mit Licht sehr kurzwellige elektromagnetische Strahlung. Mit ihr konnte erstmals die periodische Gitterstruktur eines Kristalls direkt gezeigt werden, inzwischen ist sie nicht nur in vielen Bereichen der Medizin, sondern auch in der Physik und in Materialwissenschaften ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung feiner oder mit normalem Licht nicht sichtbarer Strukturen geworden.

Im vorliegenden Versuch soll die Erzeugung von Röntgenstrahlung, ihr Spektrum sowie das Absorptionsverhalten einiger Materialien untersucht werden.

28.2 Theorie

28.2.1 Aufbau einer Röntgenröhre

Eine Röntgenröhre besteht aus einem evakuierten Glaszylinder, in dem Elektronen aus einer Glühkathode austreten und durch eine sehr hohe Anodenspannung [typisch sind 50 kV und mehr] beschleunigt werden. Anschließend werden die Elektronen mit sehr hoher Geschwindigkeit auf die abgeschrägte Anode aufzutreffen.

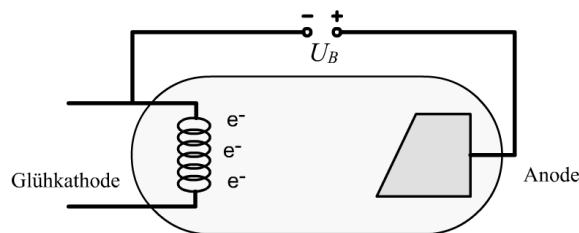


Abbildung 200: Aufbau einer Röntgenröhre.

Verschiedene Effekte, die im Folgenden näher erläutert werden, tragen dazu bei, dass beim Auftreffen und Abbremsen auf der Anode elektromagnetische Strahlung in Wellenlängenbereichen zwischen etwa 0.001 nm und 1 nm emittiert wird. Ein unerwünschter Nebeneffekt ist, dass die kinetische Energie der Elektronen hauptsächlich nicht in Röntgenstrahlung umgesetzt wird, sondern in Wärme, was eine ausreichend leistungsfähige Kühlung unabdingbar macht.

28.2.2 Bremsstrahlung und Abhängigkeit von der Anodenspannung

Ein Ergebnis der Elektrodynamik ist, dass beschleunigte Ladungen elektromagnetische Strahlung emittieren. Dies geschieht hauptsächlich senkrecht zur Beschleunigungsrichtung [vergleiche Hertzscher Dipol]. Dies wird also insbesondere bei den an der Anode stark abgebremsten Elektronen der Fall sein. Zur schlagartigen Bremsung gehört ein kontinuierliches Frequenz-Spektrum, so dass zu erwarten ist, dass die Bremsstrahlung über alle Frequenzen verteilt auftritt. Dies ist nicht der Fall.

Die vorhandene kinetische Energie lässt sich durch

$$E = e \cdot U_B$$

berechnen, dabei ist e die Elementarladung und U_B die Beschleunigungsspannung. Diese Energie wird von Photonen der Frequenz ν mit der Energie

$$E = h \cdot \nu$$

schrittweise abgegeben, wobei h die Planck Konstante ist. Nach Energieerhaltung, nach der Annahme, dass die gesamte kinetische Energie in die Energie eines Röntgenphotons übergeht, und mit dem Zusammenhang $c = \nu \lambda$ zwischen Frequenz und Wellenlänge erhalten wir das **Gesetz von Duane und Hunt**:

$$\lambda_{\text{Gr}} = \frac{h \cdot c}{e \cdot U_b}. \quad (28.1)$$

Dabei ist c die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Eine kleinere Wellenlänge als diese **Grenzwellenlänge** λ_{Gr} kann im Spektrum also nicht auftreten. Unterhalb der entsprechenden **Grenzfrequenz** eU_B/h liegt dagegen erwartungsgemäß ein kontinuierliches Spektrum der Bremsstrahlung vor.

Außer der Grenzwellenlänge ändert sich mit der Beschleunigungsspannung U_B und zusätzlich dem Anodenstrom I_A auch die Intensität der **charakteristischen Linien** I_x im Spektrum nach

$$I_x \sim I_A (U_B - U_x)^{3/2}. \quad (28.2)$$

Dabei ist U_x das Ionisationspotential der betrachteten Schale x .

28.2.3 Charakteristische Strahlung

Das Abbremsen der Elektronen ist nicht der einzige Effekt, der zur Entstehung der Röntgenstrahlung führt. Genaugut ist es möglich, dass ein Elektron mit hinreichend hoher kinetischer Energie in eine Atomhülle eindringt und dort ein Elektron aus einer inneren Schale herausschlägt. Das hat zur Folge, dass ein Elektron aus einer höheren Schale die so entstandene Lücke schließt, da weiter innen liegende Schalen energetisch günstiger sind. Dabei wird die freigewordene Energie in Form eines Photons ausgesendet. In die jetzt in einer höheren Schale entstandene Lücke rückt ein weiteres Elektron unter Emission eines Photons nach und so weiter. Auf diese Weise werden alle möglichen Energiedifferenzen

zwischen den Schalen in Form von Photonen ausgesandt, wobei natürlich auch hier durch eU_B/h eine Obergrenze gegeben ist. Bei zu niedriger Energie ist das Elektron nicht in der Lage aus einer inneren Schale ein Teilchen herauszuschlagen.

Somit ist dem kontinuierlichen Spektrum der Bremsstrahlung ein diskretes Spektrum überlagert, welches für das verwendete Anodenmaterial charakteristisch ist, denn schließlich sind auch die Schalenenergien abhängig vom Material. Die Vorhersage dieser Energien ist näherungsweise mit einem erweiterten Bohrschen Atommodell möglich. Dieses diente ursprünglich zur Beschreibung von Atomen mit einem Elektron und konnte somit auch lediglich dessen Schalenenergie vorhersagen.

Sei Z die Ordnungszahl des Atoms und R_ν die Rydberg-Frequenz. Dann beträgt die potentielle Energie

$$E = - \frac{R_\nu \cdot Z^2}{n^2}$$

mit der Hauptquantenzahl [Schalennummer] n . Als Übergangsenergie zwischen den Schalen m und n ergibt sich

$$W_{nm} = R_\nu \cdot Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Um von diesem Ergebnis auf die allgemeine Lösung [welche mehr Hüllenelektronen als eines zulässt] zu schließen, hilft die Überlegung, dass die zusätzlichen Ladungen zu einer teilweisen Abschirmung des Kerns führen, so dass nicht die gesamte Kernladung Ze wirksam ist. Moseley entdeckte für die Übergangsenergie zwischen K und L -Schale, also zwischen $n = 1$ und $m = 2$, das **Gesetz von Moseley**:

$$W = \nu = \frac{3}{4} \cdot R_\nu \cdot (Z - 1)^2. \quad (28.3)$$

Dies lässt sich verallgemeinern zu

$$W_{nm} = R_\nu \cdot (Z - a)^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Hierbei stellt a die Korrektur aufgrund der Kernabschirmung dar, die von der Schale n abhängt. Für $n = 1$ gilt nach Moseley $a = 1$, für $n = 2$ erhält man einen Wert von ungefähr 7.4.

Aus historischen Gründen [zunächst war nichts von Schalen und den Übergängen zwischen ihnen bekannt] wird die Linie des Übergangs von der L - auf die K -Schale K_α -Linie genannt. Entsprechend die des Übergangs von der M - auf die K -Schale K_β -Linie sowie die des M - L -Übergangs L_α -Linie und so weiter.

Eine genauere Betrachtung zeigt, dass nicht alle Positionen einer Schale energetisch gleichwertig sind. Vielmehr tritt hier eine Aufspaltung auf. Das Atom wird nicht allein durch die Hauptquantenzahl, sondern auch durch Drehimpuls-, Magnetische- und Spinquantenzahl beschrieben. Dies wollen wir hier aber nicht weiter betrachten.

28.2.4 Röntgenabsorption

Elektromagnetische Wellen werden in Materialien nach dem Gesetz von Lambert Beer absorbiert: Bei anfänglicher Intensität I_0 und Eindringtiefe x sinkt die Intensität exponentiell nach der Gesetzmäßigkeit

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu x} \quad (28.4)$$

ab, wobei μ der von Material und Wellenlänge abhängige **Absorptionskoeffizient** ist. Für den Koeffizienten μ/ρ aus Absorptionskoeffizient μ und Dichte ρ des Materials gilt

$$\frac{\mu}{\rho} \sim \lambda^3,$$

dabei ist λ die verwendete Wellenlänge. Auch diese Gesetzmäßigkeit wollen wir im Versuch verifizieren.

Zur Absorption von Photonen, die auf Materie treffen, treten bei bestimmten Energien unterschiedliche Prozesse auf:

- (1) Der **Photoeffekt** tritt bei Energien zwischen 1 eV und 100 keV auf. Das Photon $h\nu$ wird vom Atom absorbiert und ionisiert das Atom durch Heraus schlagen eines Elektrons aus einer tieferen Schale.
- (2) Der **Compton Effekt** tritt bei Energien zwischen 100 keV und 1 MeV auf. Das Photon stößt mit einem fast freien Elektron in der äußeren Schale des Atoms zusammen und überträgt nur einen Teil der Energie auf das Elektron.
- (3) Die **Paarbildung** tritt bei Energien zwischen 1 MeV und 6 MeV auf. Bei hinreichend großen kann ein Photon in Materie ein Elektron-Positron-Paar erzeugen, wobei jedes der Teilchen mit gleicher Masse die gleiche kinetische Energie erhält.

Bei der Röntgenstrahlung trägt neben Streuung fast ausschließlich der Photoeffekt zur Absorption bei. Daher beobachtet man für μ ähnlich wie bei der charakteristischen Strahlung eine „gequantelte“ Abhängigkeit von λ bzw. von ν . Sobald die Energie eines Röntgenquants die Ionisationsenergie einer Schale erreicht hat, wird die Absorption sprunghaft ansteigen. Das heißt, dass jede Ionisationsenergie zu einer so genannten **Absorptionskante** in der Kurve führt. Hierbei spielen natürlich auch die schon erwähnten Einflüsse der übrigen Quantenzahlen eine bedeutende Rolle.

28.2.5 Das Röntgenspektrometer

Das Röntgenspektrometer besteht aus einer Röntgenröhre, einem Kristall und einem Geiger-Müller-Zählrohr.

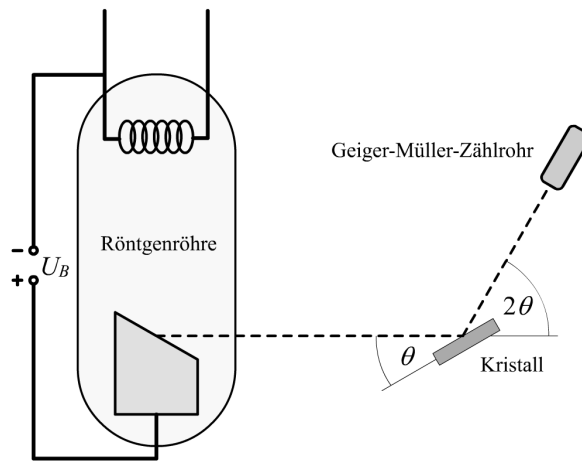


Abbildung 201: Aufbau eines Röntgenspektrometers.

Die aus der Röntgenröhre tretenden Röntgenstrahlen treffen im Winkel θ auf den Kristall und werden dort nach dem Brechungsgesetz von Bragg reflektiert, welches unten noch weiter beschrieben wird. Von den reflektierten Strahlen wird dann die Intensität mit dem Geiger-Müller-Zählrohr bestimmt. Dieses ist also immer im Winkel von 2θ zu dem ursprünglichen Strahl aufzustellen. Führt man nun ganze Winkelbereiche ab [Kristall und Zählrohr gemeinsam], so kann man das Spektrum der vorliegenden Röntgenstrahlung bestimmen.

Das Gesetz von Bragg

In einem Kristall werden Röntgenstrahlen an verschiedenen Ebenen, den so genannten **Netzebenen**, des Kristallgitters reflektiert. Interessant ist nun die Interferenz von zwei Strahlen, die an verschiedenen Netzebenen gebrochen werden. Geht man davon aus, dass die Strahlen von einem sehr weit entfernten Punkt kommen und die reflektierten Strahlen auch erst in einem weit entfernten Punkt beobachtet werden, so kann man Parallelität der Strahlen annehmen.

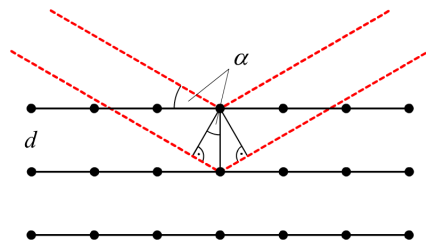


Abbildung 202: Das Gesetz von Bragg.

Bei einem Einfallswinkel α , wie er in Abbildung 202 definiert wird, erhält man durch einfache geometrische Überlegungen einen Gangunterschied von $2d \sin \alpha$, wenn zwei Strahlen an zwei benachbarten Netzebenen reflektiert werden. Diesen Gangunterschied muss man nun gleich einem ganzzahligen Vielfachen k der Wellenlänge λ setzen, um konstruktive Interferenz zu bekommen. Man erhält daraus die **Bragg-Bedingung**

$$2d \cdot \sin \alpha = k \cdot \lambda. \quad (28.5)$$

28.2.6 Das Geiger-Müller-Zählrohr

Röntgenstrahlung ist eine ionisierende Strahlung, die mit einem Geiger-Müller-Zählrohr gemessen werden kann. Bei einem Geiger-Müller-Zählrohr handelt es sich um einen zylindrischen Kondensator, welcher mit einem Edelgas gefüllt ist, wobei auch noch Halogenzusätze vorhanden sind. Im Zylinder herrscht ein elektrisches Feld, das an dem Draht, der die Zylinderachse darstellt und als Anode dient, besonders stark ist.

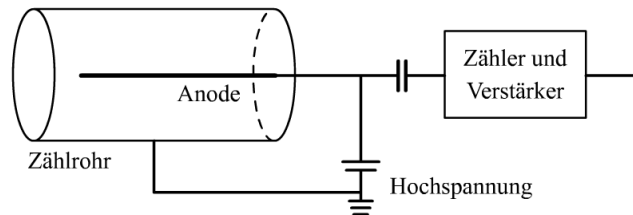


Abbildung 203: Aufbau eines Geiger-Müller-Zählrohres.

Durch die ionisierende Strahlung werden Elektronen aus den Edelgasmolekülen gerissen und in dem Feld in Richtung Anode stark beschleunigt. Dabei können die Elektronen weitere Ionisationen verursachen und der durch die ursprüngliche Ionisation entstandene Effekt wird verstärkt. Der dabei entstehende Stromimpuls kann durch eine geeignete Schaltung gezählt werden.

Zu beachten ist allerdings, dass das Zählrohr eine so genannte **Totzeit** τ besitzt. Ionisierende Strahlung, die in dieser Zeit auftritt kann, nicht gezählt werden, da noch die Auswirkungen der letzten Ionisation bestehen. Erst nach Entladung der entstandenen Ionen an der Kathode kann wieder Strahlung gemessen werden. Hat man es mit hohen Zählraten zu tun, lässt sich die korrigierte Zählrate bei Kenntnis der Totzeit aus der gemessenen Zählrate durch

$$N_{\text{kor}} = \frac{N}{1 - \tau \cdot N} \quad (28.6)$$

bestimmen. Diese Korrektur mit der Totzeit $\tau = 90 \mu\text{s}$ werden wir in unserer Auswertung stets vornehmen.

28.3 Versuchsdurchführung

Der Versuch läuft komplett computergesteuert. Per Computer lassen sich die Winkelbereiche, die Winkelschrittweite und die Beschleunigungsspannung des Röntgenspektrometers sowie die Messzeit pro Messpunkt einstellen.

Wir nehmen ein Spektrum der Röhre auf, vermessen die Grenzwellenlänge, vermessen die Bereiche um die charakteristischen Linien in Abhängigkeit von verschiedenen Beschleunigungsspannungen und vermessen die Absorptionskanten von verschiedenen Materialien.

Dabei werden uns je nach zu verwendender Anlage unterschiedliche Einstellung der Winkelbereiche und Winkelschrittweite vorgegeben.

28.4 Auswertung

Im Verlauf der Auswertung werden wir immer wieder auf Literaturangaben und auf Daten anderer Messinstrumente zurückgreifen. All diese Angaben stammen aus dem Praktikumsskript¹, daher verzichten wir teilweise auf die Angabe einer Quelle dieser Daten.

Im Versuch verwendeten wir die Anlage mit der Eisenanode. Bevor wir mit der Auswertung begonnen haben, wurden alle Messergebnisse nach Gleichung (28.6) bezüglich der Totzeit korrigiert.

28.4.1 Charakteristische Strahlung der Röntgenröhre

Zunächst haben wir wie in Abbildung 204 zu sehen das gemessene Spektrum der Röntgenröhre für $3^\circ \leq \theta \leq 80^\circ$ aufgetragen.

Bei den Peaks in unserer Auftragung handelt es sich um Übergangslinien. Nach dem Gesetz von Bragg (28.5) erhalten wir aus den jeweiligen Winkeln durch

$$\lambda = \frac{2d}{n} \sin \theta \quad \text{und} \quad E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

die Wellenlänge und die Energie der charakteristischen Strahlung. Dabei haben wir einen Nettabstand von LiF $d = 201 \text{ pm}$ verwendet, h ist die Planksche Konstante und c die Lichtgeschwindigkeit. Bei den ersten beiden Peaks haben wir $n = 1$, bei den zweiten beiden Peaks entsprechend $n = 2$. Die jeweiligen Werte können nun den entsprechenden Übergangslinien K_α und K_β zugeordnet werden. Diese Zuordnung sowie unsere Ergebnisse wurden in Tabelle 1 zusammengetragen. Dabei müssen die gemessenen Winkel natürlich ins Bogenmaß umgerechnet werden.

¹ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 204.

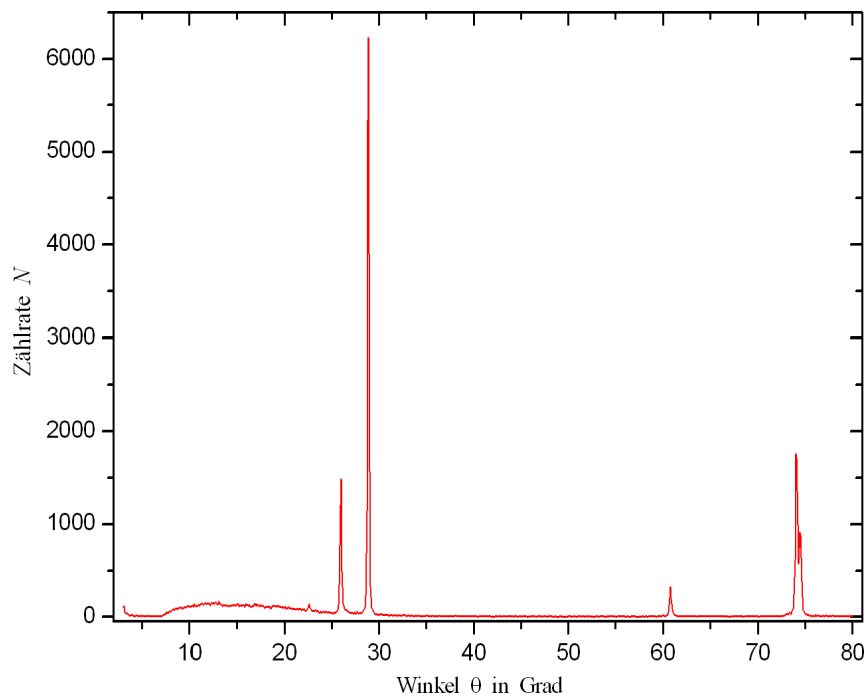


Abbildung 204: Spektrum der Röntgenröhre.

Peak	Winkel θ	Wellenlänge λ	Energie E	Übergangslinien
1	26.0°	176.2 pm	7035 eV	K_β erster Ordnung
2	28.9°	194.3 pm	6381 eV	K_α erster Ordnung
3	60.8°	175.5 pm	3533 eV	K_β zweiter Ordnung
4	74.0°	193.2 pm	3208 eV	K_α zweiter Ordnung

Tabelle 1: Ergebnisse der charakteristischen Strahlung.

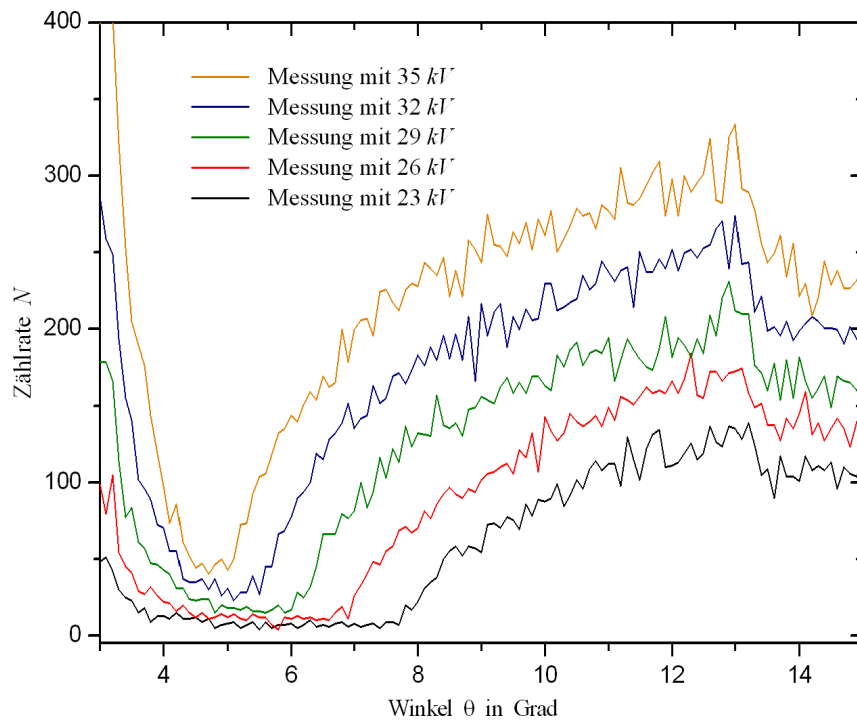
Bei der K_α Übergangslinien handelt es sich in der Realität um zwei Linien, der K_{α_1} und der K_{α_2} Linie. Diese liegen aber so dicht beieinander, dass wir sie hier nicht unterscheiden konnten. Unserer Ergebnisse der Energien für $n = 1$ stimmen auch sehr gut mit den Literaturwerten von

$$E_{K_\alpha} \approx 6397 \text{ eV} \quad \text{und} \quad E_{K_\beta} = 7058 \text{ eV}$$

überein.

28.4.2 Grenzwellenlänge und Planksche Konstante

Aus den Messungen zwischen 3° und 15° bei verschiedenen Spannungen lässt sich die Abhängigkeit der Grenzwellenlänge von der Spannung bestimmen.

Abbildung 205: Messung zwischen 3° und 15° mit verschiedenen Spannungen.

Gerade dort, wo die gemessene Kurve stark zu steigen anfängt, ermitteln wir den zur Grenzwellenlänge gehörigen Winkel θ . Die Grenzwellenlänge berechnet sich dann wieder aus

$$\lambda = \frac{2d}{n} \sin \theta$$

mit den gleichen Bezeichnungen wie zuvor. Der theoretisch erwartete Wert ergibt sich nach Gleichung (28.1) aus

$$\lambda_{\text{Gr}} = \frac{h \cdot c}{e \cdot U_b}.$$

Unsere Ergebnisse sind in Tabelle 2 zu finden. Alle berechneten Werte stimmen sehr gut mit der theoretischen Werten überein.

Anodenspannung U_b	Winkel θ	Grenzwellenlänge λ_{Gr}	theoretisch
23 kV	$(7.7 \pm 0.1)^\circ$	$(53.9 \pm 0.7) \text{ pm}$	53.9 pm
26 kV	$(6.9 \pm 0.1)^\circ$	$(48.3 \pm 0.7) \text{ pm}$	47.7 pm
29 kV	$(6.1 \pm 0.1)^\circ$	$(42.7 \pm 0.7) \text{ pm}$	42.8 pm
32 kV	$(5.5 \pm 0.1)^\circ$	$(38.5 \pm 0.7) \text{ pm}$	38.7 pm
35 kV	$(5.0 \pm 0.1)^\circ$	$(35.0 \pm 0.7) \text{ pm}$	35.4 pm

Tabelle 2: Ergebnisse der Grenzwellenlänge.

Bei bekannter Grenzwellenlänge kann nach Umformung von Gleichung (28.1) die Plancksche Konstante berechnet werden:

$$h = \frac{\lambda_{\text{Gr}} \cdot e \cdot U_b}{c}.$$

Der gewichtete Mittelwert unserer fünf Messungen ergibt

$$h = (6.62 \pm 0.2) \cdot 10^{-34} \text{ Js}.$$

Der Literaturwert² liegt bei

$$h = 6.62607 \cdot 10^{-34} \text{ Js}.$$

28.4.3 Intensität der charakteristischen Linien

Aus den Messungen zwischen 24° und 31° bei verschiedenen Spannungen wollen wir nun die Intensität der charakteristischen Linien untersuchen.

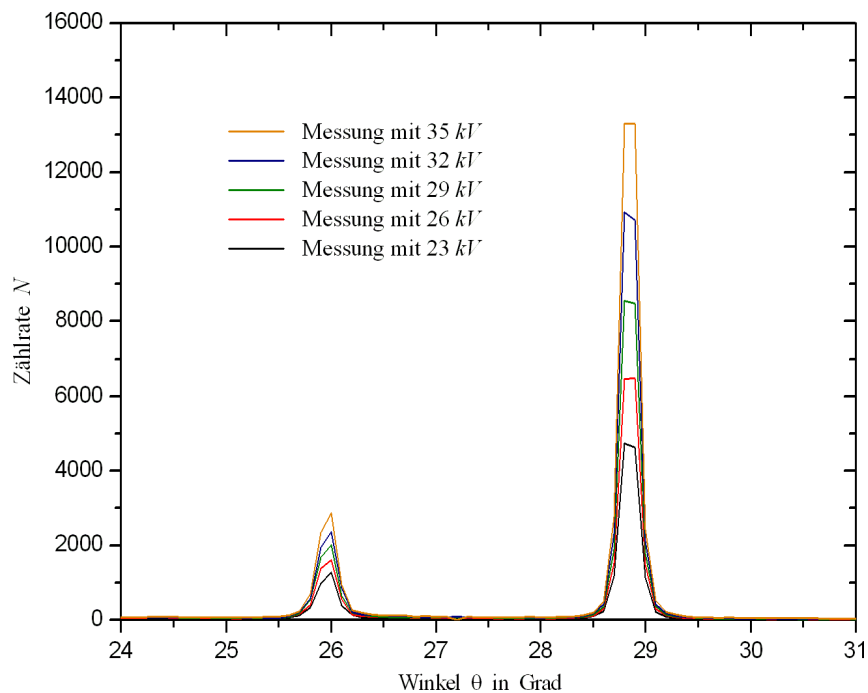


Abbildung 206: Messung zwischen 24° und 31° mit verschiedenen Spannungen.

Wir haben dazu die Zählrate bei den Peaks bei verschiedenen Anodenspannungen U_B bestimmt und diese Ergebnisse in Abbildung 207 dargestellt.

² Nach D. Meschede (2001): "Gerthsen Physik", 21. Auflage, Springer Verlag Berlin.

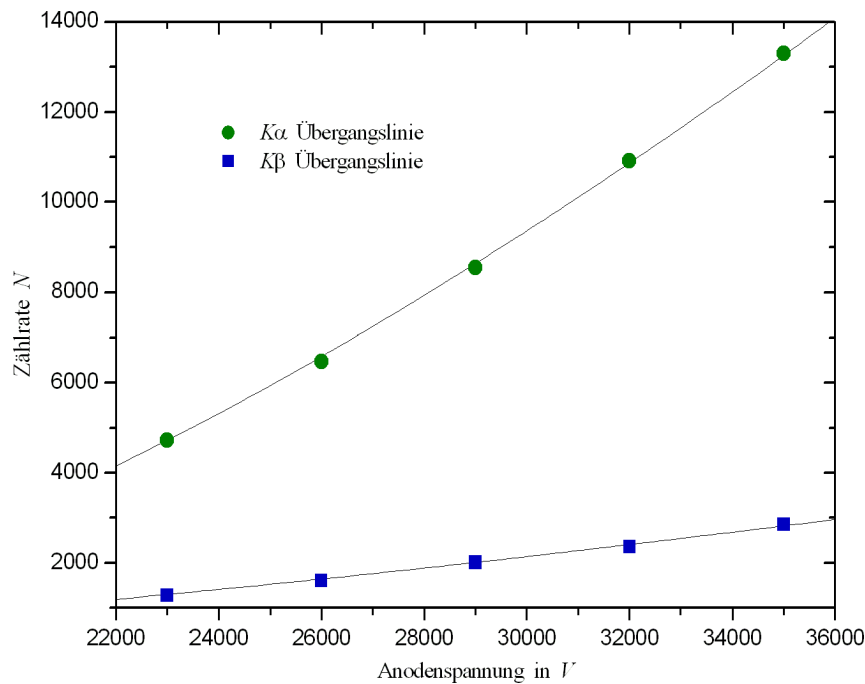


Abbildung 207: Intensität der charakteristischen Linien bei unterschiedlichen Spannungen.

Die Gesetzmäßigkeit aus Gleichung (28.2) konnte überprüft werden, indem wir unsere Werte durch eine entsprechende Regression approximiert haben. Wir berechneten die beiden Funktionen

$$f_{K_\alpha}(x) = 0.00354 \cdot (x - 10878)^{3/2} \quad \text{und} \\ f_{K_\beta}(x) = 0.00055 \cdot (x - 5238)^{3/2}.$$

28.4.4 Absorptionskanten und Rydberg-Frequenz

Zunächst haben wir analog zum Auswertungsteil 28.4.2 Lage und Energie der Absorptionskanten von Ni und Cu ermittelt.³

³ Nach dem Praktikumsskript sollen die Daten hier halblogarithmisch aufgetragen werden, aber wir haben auch so wieder hervorragende Ergebnisse erzielt.

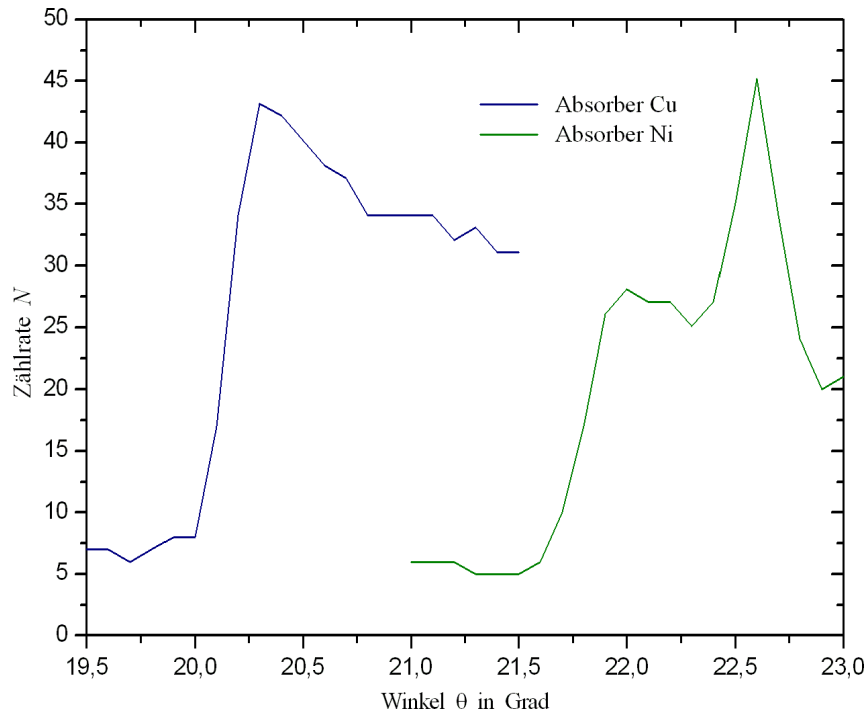


Abbildung 208: Spektrum zur Bestimmung der Absorptionskanten.

	Winkel θ	Absorptionskante λ_K	Literatur	Energie E
Cu	$(20.0 \pm 0.1)^\circ$	$(137.5 \pm 0.7) \text{ pm}$	138 pm	$(9017 \pm 132) \text{ eV}$
Ni	$(20.0 \pm 0.1)^\circ$	$(148.6 \pm 0.7) \text{ pm}$	149 pm	$(8341 \pm 109) \text{ eV}$

Tabelle 3: Ergebnisse der Absorptionskanten für Cu und Ni.

Aus diesen Absorptionskanten wollen wir nun nach dem Gesetz von Moseley die Rydberg-Frequenz R_ν bestimmen.

Die Absorptionskanten treten dann auf, wenn die Röntgenstrahlung Elektronen der K -Schale im Absorber aus ihren Bindungen schlägt. Somit können wir die Abschirmkonstante $a = 1$ annehmen und erhalten mit $\nu = c/\lambda$ nach Gleichung (28.3) gerade

$$R_\nu = \frac{4}{3} \cdot \frac{c}{\lambda_K(Z-1)^2},$$

dabei ist λ_K die Absorptionskante, c die Lichtgeschwindigkeit und Z die Ordnungszahl des Absorbers. Mit $Z_{\text{Cu}} = 29$ und $Z_{\text{Ni}} = 28$ erhalten wir

$$\begin{aligned} R_{\nu, \text{Cu}} &= (3.71 \pm 0.19) \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} & \text{und} \\ R_{\nu, \text{Ni}} &= (3.69 \pm 0.17) \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Hier stimmen unsere Ergebnisse nicht mit dem Literaturwert von

$$R_\nu = 3.29 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

überein. Dies kann daran liegen, dass wir die Abschirmkonstante $a = 1$ gewählt haben, was ja nur eine Näherung darstellt.

28.4.5 Absorptionskoeffizienten

Zunächst haben wir die Spektren für $8^\circ \leq \theta \leq 16^\circ$ ohne und mit unterschiedlichen Absorbern aufgenommen.

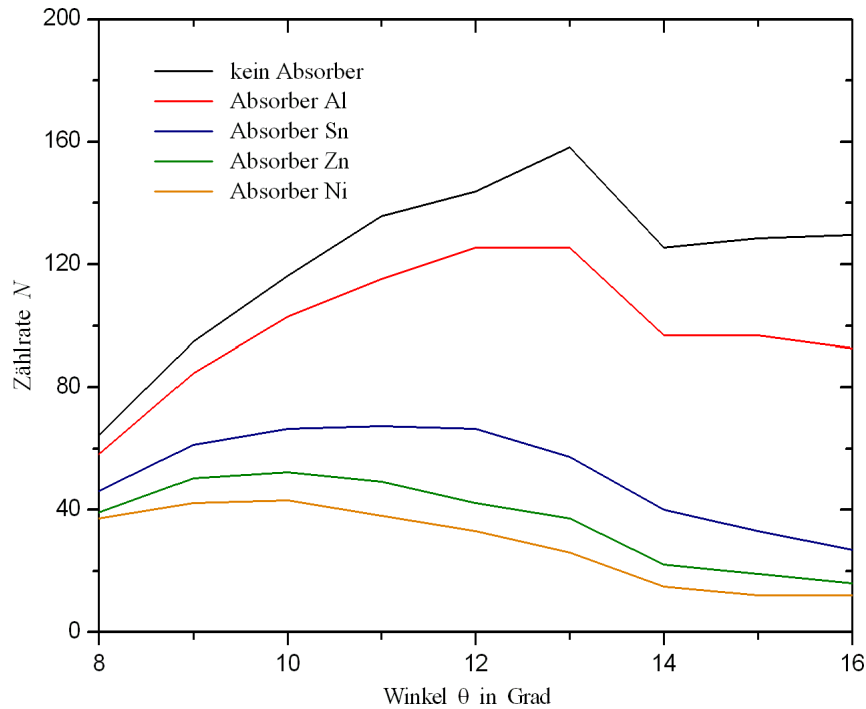


Abbildung 209: Spektrum ohne und mit Absorbern.

Nach (28.4) erhalten wir den Absorptionskoeffizienten aus der Gleichung

$$\mu = -\frac{1}{x} \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

dabei entspricht der Absorptionsstrecke x der Dicke der Filter⁴ und der Quotient I/I_0 ist das Verhältnis der gemessenen Intensität mit Filter zu der ohne Filter, da die Ausgangsintensität I_0 der Intensität ohne Filter entspricht.

Mit den jeweiligen Dichten ρ der Absorber konnten wir nun den Absorptionskoeffizienten μ/ρ in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ bestimmen, siehe dazu Abbildung 210.

⁴ Auch diese Angaben sind alle im Praktikumsskript zu finden.

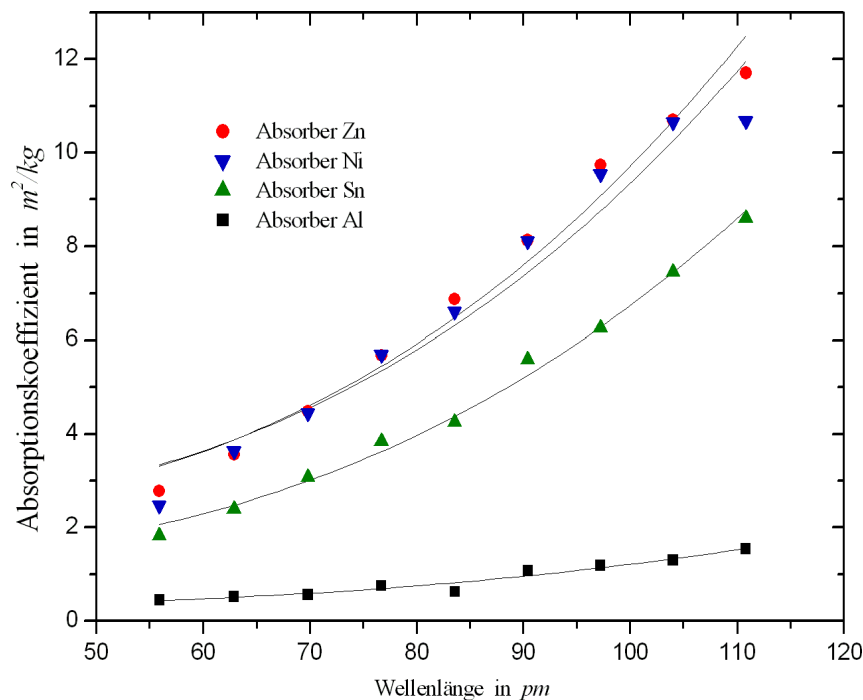


Abbildung 210: Absorptionskoeffizient in Abhängigkeit der Wellenlänge.

Die Proportionalität $\mu/\rho \sim \lambda^3$ konnten wir graphisch verifizieren, indem wir unsere Messdaten durch eine Regression der Form $y = cx^3$ approximiert haben. Das nicht besonders gute aber ausreichende Ergebnis ist Abbildung 210 zu entnehmen.

28.5 Diskussion

Zunächst einmal möchten wir festhalten, dass wir uns sehr über genaue und weitreichende Literaturangaben im Praktikumsskript gefreut haben. Anders als bei anderen Versuchen waren alle nötigen Daten angegeben und somit wurde die von uns eigentlich erwartete Hilfestellung zur Auswertung gegeben.

Über die Genauigkeit unserer Ergebnisse haben wir bereits in der Auswertung berichtet: Die computergesteuerte Anlage hat super Messwerte aufgenommen.

Eigene Kommentare

[Nicht besonders spannend der Versuch, aber so sieht wohl die Realität aus bei derartigen Versuchen. Ansonsten auch ein netter Einblick in die physikalische Nutzung der Röntgenstrahlung.]_{Daniel}

[Es war mal ganz interessant den weitgefächerten Einsatzbereich der Röntgenstrahlung zu behandeln. Da die Messungen komplett computergesteuert waren und relativ lange dauerten, waren wir jedoch froh, dass wir ein Kartenspiel dabei hatten. Somit wurde dieser Versuch auch ein gelungener Abschluss des dritten Blockes des Anfängerpraktikums.]_{Hauke}

29 Radioaktivität

Versuch durchgeführt am 6. Februar 2006, Protokoll erarbeitet von Hauke Rohmeyer.

29.1 Einleitung

Radioaktivität spielt in vielen Bereichen eine Rolle. Sie kann im medizinischen Bereich eingesetzt oder zur Energiegewinnung, doch leider auch zum Waffenbau genutzt werden. Auch die friedliche Nutzung radioaktiver Zerfälle birgt neben einem Entsorgungsproblem Risiken: Das Stichwort Tschernobyl sollte genügen.

29.2 Theorie

29.2.1 Kräfte im Atomkern

In einem Atomkern wirken verschiedene Kräfte:

Zwischen Protonen und Neutronen wirkt die **Gravitationskraft**, die allerdings aufgrund der extrem geringen Masse der Nukleonen zu vernachlässigen ist. Zwischen den Protonen wirkt eine **elektromagnetische Kraft**: Diese sind positiv geladen und stoßen sich gegenseitig ab. Dass es trotzdem stabile Kerne gibt, liegt an sehr kurzreichweitigen Kräften, den unter "Kernkraft" zusammengefassten Kräften **schwache** und **starke Wechselwirkung**. Die schwache Wechselwirkung vermittelt Umwandlungen und Austausch von Energie und Impuls zwischen Quarks und Leptonen. Sie ist zum Beispiel für den β -Zerfall verantwortlich. Die starke Wechselwirkung wirkt zwischen Quarks und aus Quarks aufgebauten Teilchen. Sie ist im Wesentlichen für den Zusammenhalt von Nukleonen verantwortlich.

29.2.2 Isotope

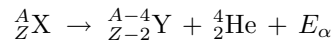
Chemische Elemente unterscheiden sich durch die Anzahl von Protonen im Atomkern. Die Anzahl an Neutronen kann jedoch variieren, ohne dass sich die chemischen Eigenschaften des Elements ändern. Diese unterschiedlichen Ausprägungen eines Elementes nennt man **Isotope**. Es gibt zum Beispiel die Wasserstoff-Isotope ${}^1_1\text{H}$, ${}^2_1\text{H}$ und ${}^3_1\text{H}$, die jeweils ein Proton und kein, ein oder zwei Neutronen im Kern besitzen. Statt des Begriffs des Isotops kann auch **Nuklid** verwendet werden, wenn nicht die Eigenschaften des chemischen Elements, sondern die des Atomkerns betrachtet werden. Die Anzahl der Protonen wird

mit der Kernladungszahl Z angegeben, die Massenzahl A ist die Summe aus der Anzahl von Protonen und Neutronen.

29.2.3 Radioaktive Zerfälle

Der α -Zerfall

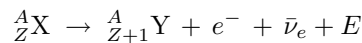
Ein α -Teilchen ist identisch mit einem ${}^4_2\text{He}$ -Nuklid. Beim α -Zerfall teilt sich ein Kern ${}^A_Z\text{X}$ in einen Tochterkern ${}^{A-4}_{Z-2}\text{Y}$ und ein α -Teilchen, welches die kinetische Energie E_α besitzt.



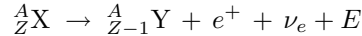
Der β -Zerfall

Verantwortlich für den β -Zerfall ist die schwache Wechselwirkung. Beim β -Zerfall verändern sich Nukleonen: Ein Proton wird zum Neutron oder umgekehrt. Man unterscheidet zwischen β^- - und β^+ -Zerfall.

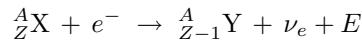
Beim β^- -Zerfall wird ein Neutron zum Proton; dabei werden ein Elektron e^- und ein Anti-Elektron-Neutrino $\bar{\nu}_e$ emittiert.



Der β^+ -Zerfall ist eine Paarerzeugung von einem Elektron e^- und einem Positron e^+ . Das Elektron wird mit einem Proton zum Neutron; es werden ein Positron e^+ und ein Elektron-Neutrino ν_e freigesetzt.



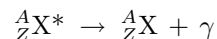
Beim β^+ -Zerfall reicht die Energie nicht zur Paarerzeugung. Also "holt" sich der Kern ein Elektron von außen. Daher wird dieser Prozess auch Elektroneneinfang genannt.



Der Elektroneneinfang wird auch als K-Einfang bezeichnet, da nur die Elektronen der K-Schale eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kern haben und somit eingefangen werden können. Nach einem Elektroneneinfang wird die entstandene "Lücke" in der K-Schale von einem der übrigen Elektronen gefüllt. Dabei wird die charakteristische Röntgenstrahlung des Elementes ${}^A_{Z-1}\text{Y}$ abgestrahlt.

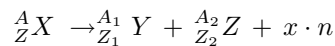
γ -Zerfall

Der γ -Zerfall ist kein Zerfall des Atomkerns. Er ist der Übergang von einem energetisch angeregtem Zustand des Kerns in einen energetisch niedrigeren Zustand. Bei diesem Übergang wird eine hochfrequente elektromagnetische Welle, die sogenannte γ -Strahlung abgestrahlt. Die Photonen der γ -Strahlung werden als Gammaquanten γ bezeichnet. Ein Nuklid ${}^A_Z\text{X}$ kann zum Beispiels als Zerfallsprodukt in einem energetisch höheren Zustand ${}^A_Z\text{X}^*$ vorliegen. Die Reaktionsgleichung lautet:



Kernspaltung

Relativ große Kerne (ca. ab $A = 100$) sind energetisch ungünstiger als kleinere Kerne, da die kleineren Kerne gemessen an den größeren eine höhere Bindungsenergie haben. Deshalb können große Kerne in Teilkkerne zerfallen. Bei diesem Zerfall werden meist auch Neutronen freigesetzt:



wobei $A = A_1 + A_2 + x$ und $Z = Z_1 + Z_2$ gelten. Allerdings sind solche spontanen Zerfälle sehr selten, da Aufgrund der Kernkraft eine hohe Energie nötig ist, um den Kern zu spalten. Deshalb werden Kerne oft durch Neutronenbeschuss angeregt. Die durch die Spaltung freigesetzten Neutronen können weitere Kerne anregen – eine Kettenreaktion wird in Gang gesetzt.

29.2.4 Zerfallsgesetz

Betrachtet man einen Atomkern eines radioaktiven Materials, so lässt sich nicht vorhersagen wann er zerfallen wird. Ein Kern der im nächsten Augenblick zerfällt ist nicht von einem Kern zu unterscheiden, der erst in x Jahren zerfällt. Man kann jedoch die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kern zerfällt sehr genau angeben. Diese Wahrscheinlichkeit wird auch Zerfallskonstante λ genannt. Im Mittel zerfallen dann von N Kernen $\lambda N dt$ Kerne im Zeitintervall dt .

$$dN = N(t + dt) - N(t) = N - \lambda N dt - N = -\lambda N dt$$

Integriert man diese Differentialgleichung durch Trennung der Variablen und setzt $N(0) = N_0$, so erhält man das Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Im Experiment wird allerdings nicht die Anzahl der vorhandenen Kerne bestimmt, sondern deren zeitliche Änderung: Die Zerfälle. Die Anzahl der Zerfälle wird mit Aktivität A bezeichnet. Da $A = \frac{dN}{dt} = \lambda N$ gilt, lässt sich das Zerfallsgesetz auf die Aktivität übertragen:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Als Halbwertszeit $T_{1/2}$ wird die Zeit angegeben, bei der die Hälfte der ursprünglichen Kerne zerfallen ist. Für sie gilt:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda T_{1/2}} \quad \Leftrightarrow \quad T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Nach der Aktivierungszeit τ gilt für die Anfangsaktivierung einer vorher nicht strahlenden Probe $N_0(\tau) = N_0^\infty \cdot (1 - e^{-\lambda \tau})$.

29.2.5 Geiger-Müller-Zählrohr

Das Geiger-Müller-Zählrohr ist ein Detektor für ionisierende Strahlung. Im Wesentlichen besteht es aus einem Metallzylinder und einem Draht in der Mitte des Zylinders. Auf der einen Seite ist der Zylinder mit einem Isolator verschlossen, auf der anderen mit einem strahlungsdurchlässigem Fenster (zum Beispiel

aus Glimmer). Zwischen Draht und Außenwand liegt eine Gleichspannung von mehreren hundert Volt an – der Draht ist Anode; die Außenwand Kathode. Das elektrische Feld ist durch diesen Aufbau im Zentrum besonders hoch. Im Inneren des Zylinders befindet sich ein Edelgas. Durch ionisierende Strahlung wird zunächst einem Edelgasatom ein Elektron entrissen. Dieses wird stark in Richtung Anode beschleunigt und kann weitere Atome ionisieren. Durch die jetzt vermehrt freigesetzten Elektronen ist ein Stromfluss zwischen Anode und Kathode möglich. Dieser kann elektrisch verstärkt und registriert werden.

Trifft ionisierende Strahlung zu einem Zeitpunkt auf, bei dem noch der Ionisierungsvorgang eines früheren Treffers aktiv ist, kann diese nicht registriert werden. Die Dauer eines Ionisierungsvorgangs nennt man **Totzeit** τ des Zählrohrs. Erst nachdem alle Ionen entladen sind, kann wieder ein neuer Treffer registriert werden. Insbesondere bei hohen Zählraten führt die Totzeit zu einem großen Fehler. Da der Radioaktive Zerfall der Poisson-Statistik gehorcht, kann der Fehler der Zählrate N mit \sqrt{N} angegeben werden. Weil auch in der Umwelt radioaktive Materialien vorhanden sind, registriert das Geiger-Müller-Zählrohr auch dann Aktivität, wenn keine Probe in der Nähe des Zählrohres ist: dieser Effekt wird **Nulleffekt** genannt.

29.2.6 Abschirmung radioaktiver Strahlung

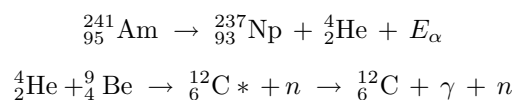
Um α -Strahlung abzuschirmen genügt schon ein einfaches Blatt Papier. Für β -Strahlung reicht Glas oder Plexiglas – wobei hier bei der Absorption der β -Strahlung Bremsstrahlung entsteht, die nicht unbedingt gesundheitsfördernd ist. Die hochfrequente γ -Strahlung ist schwerer abzuschirmen: Meist werden Bleiplatten verwendet.

29.3 Versuchsdurchführung

Im Versuch wird die Aktivität einer radioaktiven Probe mit einem Geiger-Müller-Zählrohr, welches an einen Computer angeschlossen ist, gemessen. Zur Berechnung der Aktivität der Probe muss auch die Nullrate bestimmt werden. Als Probe wird ein Silberplättchen verwendet, welches zuvor durch eine Am-Be-Quelle aktiviert wurde. Die Aktivierungszeiten betragen: 1 min , 2 min , 4 min , 8 min . Der Timer des Geiger-Müller-Zählers muss auf „Aus“ stehen. Vor der Messung muss der Timer mit „Start“ aktiviert werden und kann für den Rest des Versuches ignoriert werden.

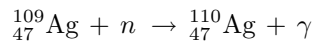
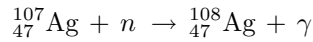
Mit einer Stoppuhr wird die Aktivierungszeit gemessen. Nach der Aktivierungszeit wird die Zeit am Computer gestartet. Ist das Silberplättchen in den Geiger-Müller-Zähler eingeschoben worden, so kann auch die Messung am Computer gestartet werden.

Innerhalb der Quelle verlaufen folgende Reaktionen:



Die energiereichen Neutronen werden durch eine Paraffinschicht abgebremst und können sich dann an den beiden in der Natur gleichzeitig auftretenden stabilen

Silberisotopen anlagern.



${}_{47}^{108}\text{Ag}$ und ${}_{47}^{110}\text{Ag}$ sind β^- -Strahler.

29.4 Auswertung

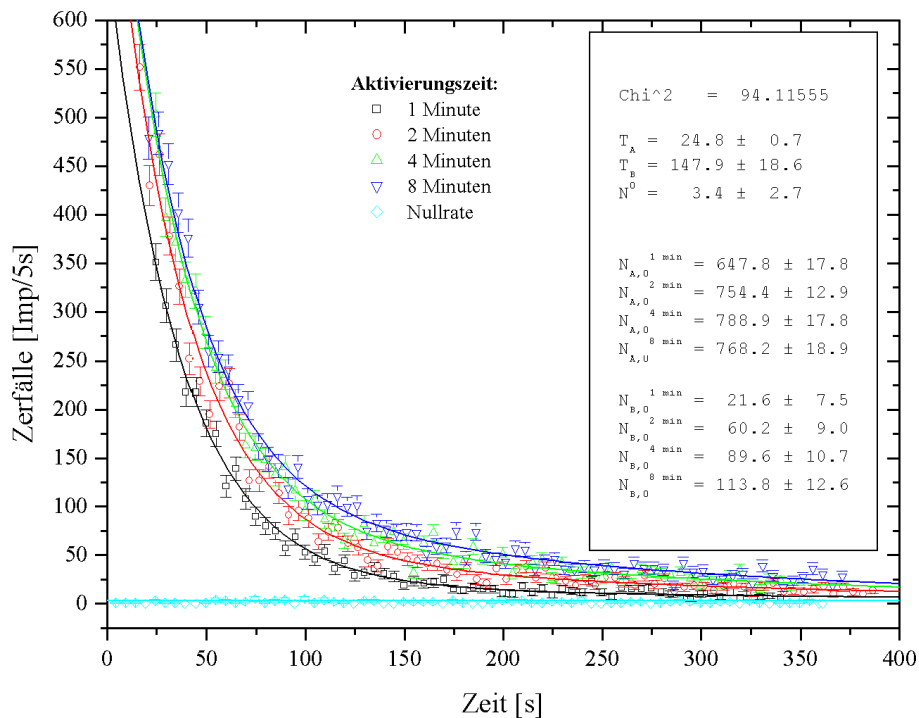
29.4.1 Halbwertszeiten

Die Radioaktive Strahlung rührt von zwei verschiedenen Isotopen her. Das Geiger-Müller Zählrohr kann jedoch die beiden Strahlungen nicht unterscheiden und misst somit lediglich die Gesamtanzahl der Zerfälle. Da das Zerfallsgesetz der Isotopen bekannt ist, kann man die gemessene Strahlung als Überlagerung von zwei Exponentialfunktionen darstellen:

$$N(t) = N_{A,0} e^{-\frac{\ln 2}{T_A} t} + N_{B,0} e^{-\frac{\ln 2}{T_B} t} + N^0. \quad (29.1)$$

Dabei ist $N_{A,0}$ die Anfangsaktivität des einen Isotopes mit der Halbwertszeit T_A , N_B die Anfangsaktivität des zweiten Isotopes mit der Halbwertszeit T_B und N^0 die Nullrate. Die Anfangsaktivitäten variieren bei den verschiedenen Messungen, die Halbwertszeiten und die Nullrate sind jedoch bei jeder Messung gleich. Wir bekommen also 11 Parameter, die wir mit dem χ^2 Verfahren bestimmen wollen.

Dazu müssen wir die Daten aus dem Programm **kAktivität** aufbereiten. Von der jeweiligen Zeitmessung werden 2,5 sec abgezogen, um einen Mittelwert der Aktivität im jeweiligen Zeitintervall von 5 sec zu bekommen. Der letzte Messwert wurde jeweils entfernt, weil das Zeitintervall kleiner als 5 sec war. Da der Zerfallsprozeß der Poisson-Statistik gehorcht, ergibt sich der Fehler der Aktivität durch $\sigma_N = \sqrt{N}$. Nun müssen alle Messwerte an ein Computerprogramm übergeben werden, welches uns zu der Formel (29.1) die passenden Parameter der Isotope sucht. Die gefundenen Parameter können der Abbildung 211 entnommen werden.

Abbildung 211: Bestimmung der Parameter mittels der χ^2 Methode.

Wir erhalten also für das erste Isotop eine Halbwertszeit von

$$T_A = 24,8 \pm 0,7 \text{ s}.$$

Es handelt sich also um $^{110}_{47}\text{Ag}$, dessen Halbwertszeit nach dem Praktikumsskript 24,6 s beträgt. Für das zweite Isotop erhalten wir eine Halbwertszeit von

$$T_B = 147,9 \pm 18,6 \text{ s}.$$

Es handelt sich also um $^{108}_{47}\text{Ag}$, dessen Halbwertszeit nach dem Praktikumsskript 157 s beträgt. Somit liegen die Literaturwerte der Halbwertszeiten beide im Fehlerbalken unserer Messungen.

Um die Zuverlässigkeit der χ^2 Anpassung zu ermitteln, berechnen wir das **reduzierte** χ^2 . Dies ist definiert durch

$$\chi_{\text{red.}}^2 = \frac{\chi^2}{f}.$$

Dabei ist f die Anzahl der Freiheitsgrade, die gegeben ist durch die Anzahl der Datenpunkte minus die Anzahl der Parameter. Für unsere Messung erhalten wir bei einem Mittelwert von 69,8 Datenpunkten

$$\chi_{\text{red.}}^2 = \frac{94,11555}{69,8 - 11} \approx 1,6.$$

Bei einem direkten funktionalen Zusammenhang von unseren Messungen und Gleichung (29.1) sollte sich $\chi_{\text{red.}}^2 = 1,0$ ergeben. Unser Ergebnis weicht stark von

1 ab, was wohl damit zusammenhängt, dass wir die Zerfallskurven nicht lange genug aufgenommen haben, und schließlich auch damit, dass das Zerfallsgesetz ein stochastisches Gesetz ist. Somit wahr ein direkter funktionaler Zusammenhang kaum zu erwarten.

Nach der Bestimmung der einzelnen Parameter können wir die Zerfallskurven der beiden Isotope getrennt darstellen. Wir erkennen, dass das kurzlebige Isotop $^{110}_{47}\text{Ag}$ anfangs sehr stark strahlt, jedoch nach ungefähr 250 s nach der Aktivierung schon vollständig zerfallen ist. Nach diesen 250 s geht die gesamte Strahlung also vom $^{108}_{47}\text{Ag}$ aus, welches jedoch lange nicht so stark strahlt wie das $^{110}_{47}\text{Ag}$. Mit längerer Aktivierungszeit strahlen die Proben natürlich stärker und länger. Die folgenden Grafiken zeigen jeweils die Messwerte des Geiger-Müller-Zählers, die Nullrate, die Zerfallskurven der beiden Isotope und deren Summe. Durch die Parameterbestimmung weisen diese Kurven die Nullrate nicht mehr auf.

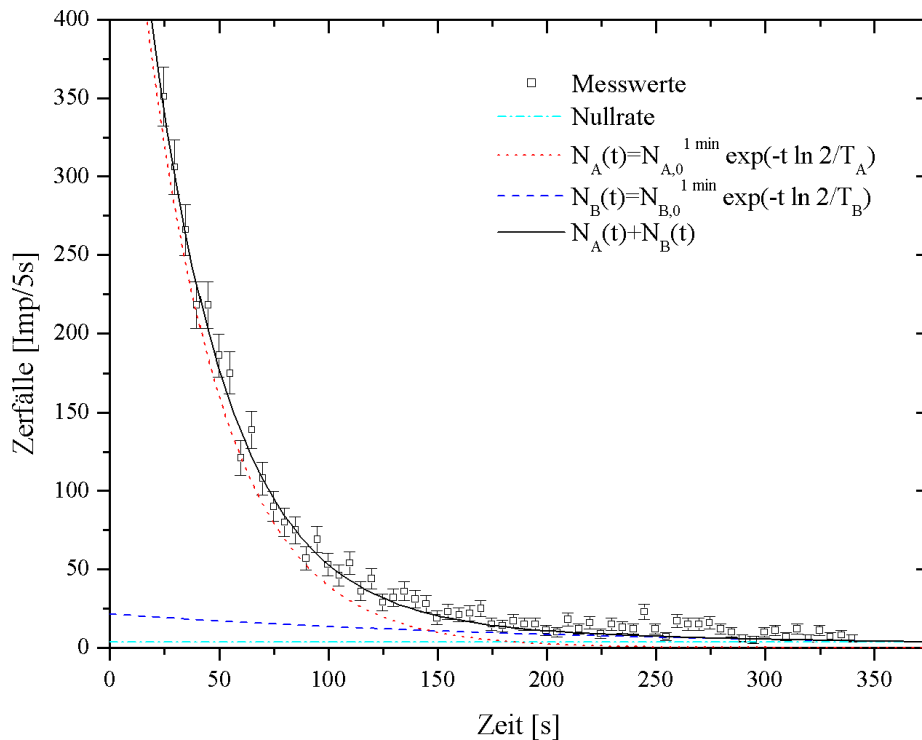


Abbildung 212: Zerfallskurve nach einer Aktivierungszeit von 1 Minute.

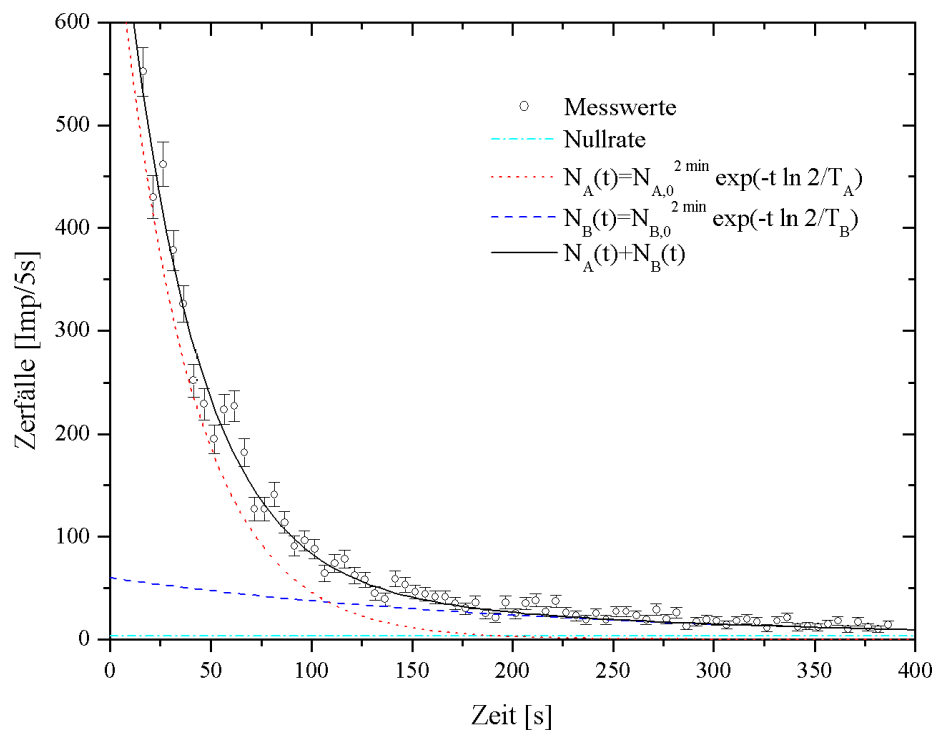


Abbildung 213: Zerfallskurve nach einer Aktivierungszeit von 2 Minuten.

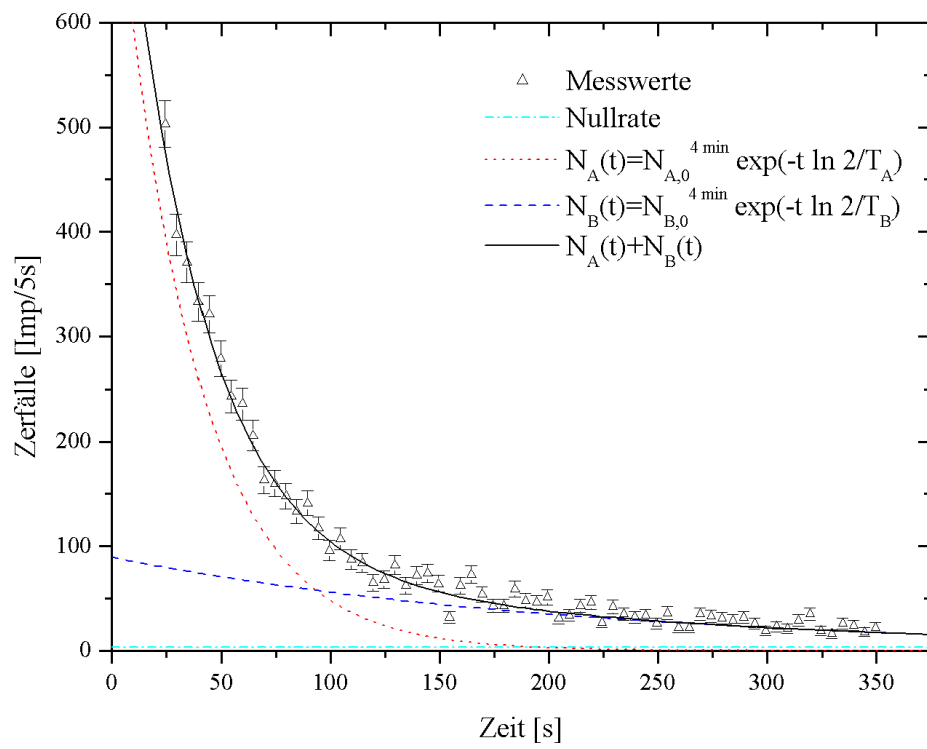


Abbildung 214: Zerfallskurve nach einer Aktivierungszeit von 4 Minuten.

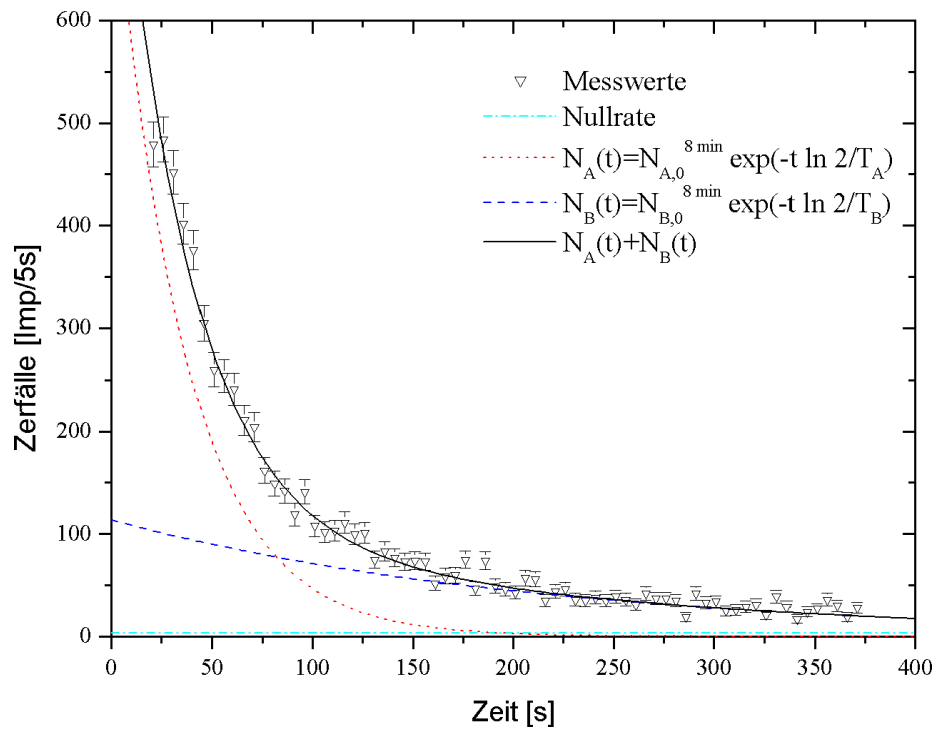


Abbildung 215: Zerfallskurve nach einer Aktivierungszeit von 8 Minuten.

Trägt man dieselben Daten halblogarisch auf, so sind die Zerfallskurven der beiden Isotope Geraden, da es sich um einen exponentiellen Zerfall handelt. Man kann wieder erkennen, dass die Anfangsstrahlung fast vollkommen auf das ${}_{47}^{110}\text{Ag}$ zurückzuführen ist: Die Gerade schmiegt sich für kurze Zeiten nach der Aktivierung an die vom Geiger-Müller-Zähler gemessenen Werte an. Zu späteren Zeiten ist der Zerfall jedoch wieder vollkommen auf das ${}_{47}^{108}\text{Ag}$ zurückzuführen.

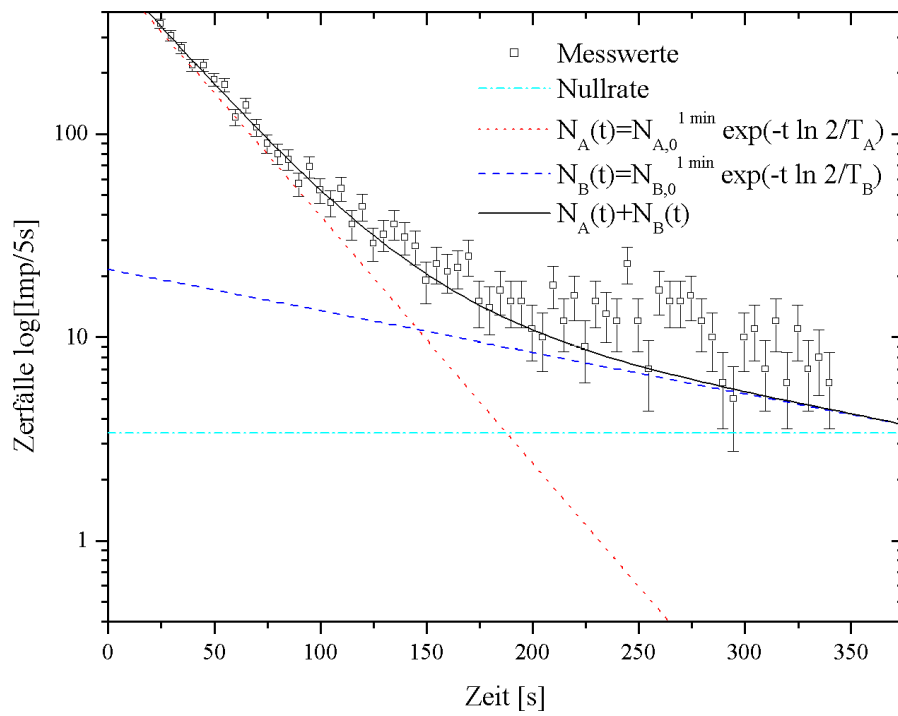


Abbildung 216: Logarithmische Auftragung der Zerfallskurve nach einer Aktivierungszeit von 1 Minute.

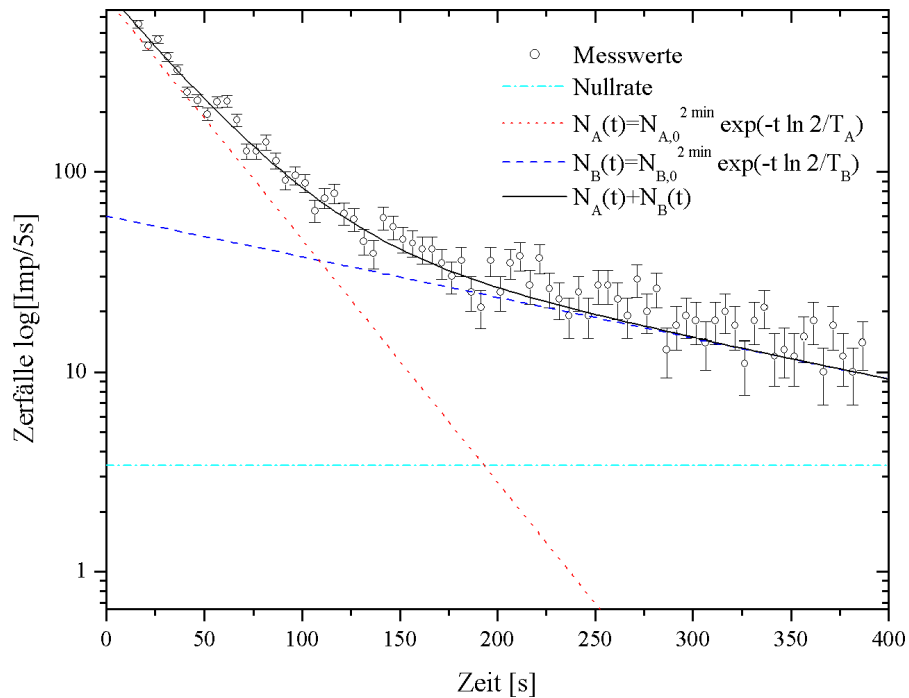


Abbildung 217: Logarithmische Auftragung der Zerfallskurve nach einer Aktivierungszeit von 2 Minuten.

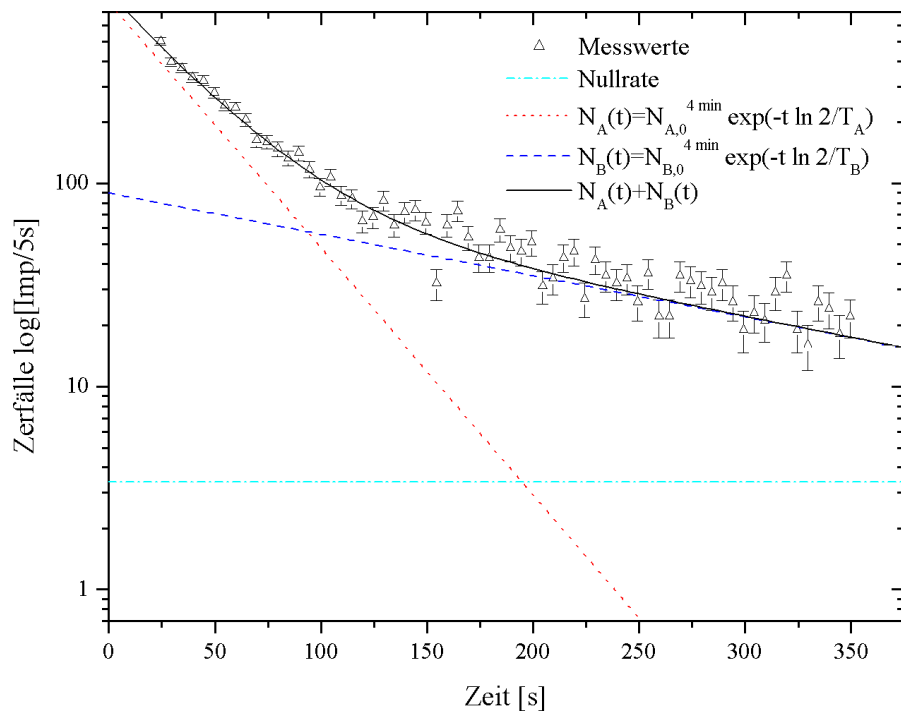


Abbildung 218: Logarithmische Auftragung der Zerfallskurve nach einer Aktivierungszeit von 4 Minuten.

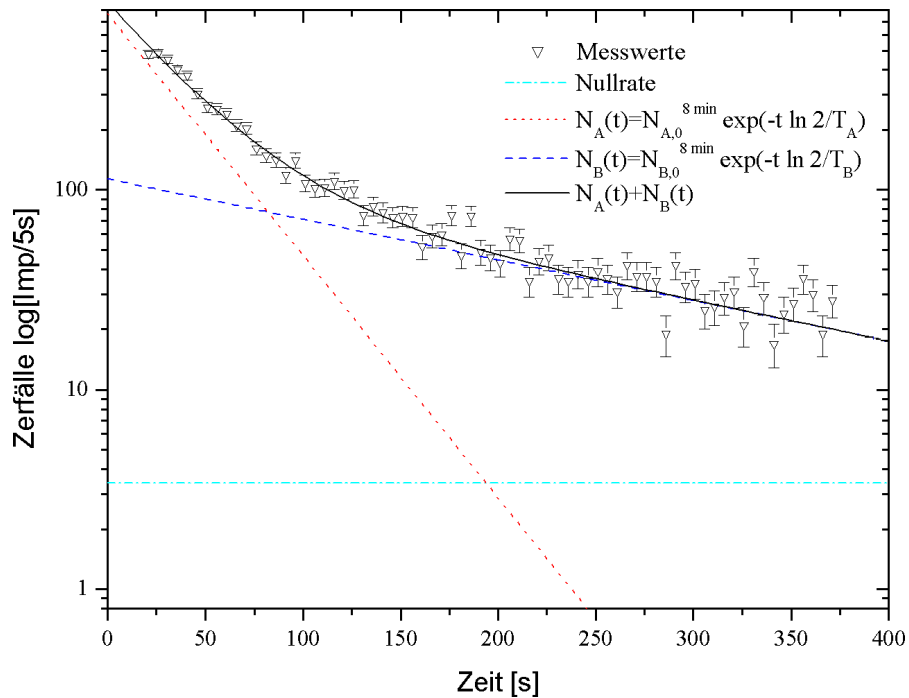


Abbildung 219: Logarithmische Auftragung der Zerfallskurve nach einer Aktivierungszeit von 8 Minuten.

29.4.2 Anfangsaktivitäten

Wie schon beobachtet sind die Anfangsaktivitäten von der Aktivierungszeit abhängig. Die Messwerte lassen ein Sättigungsverhalten vermuten: Die Differenzen zwischen den Anfangsaktivitäten werden für längere Aktivierungszeiten kleiner. Wieder benutzen wir die χ^2 Anpassung, um die Parameter des Grenzwertes der Anfangsaktivität für die beiden Isotope zu berechnen. Dazu tragen wir die Anfangsaktivitäten in Abhängigkeit der Aktivierungszeit τ auf und machen eine χ^2 Anpassung zu den Funktionen

$$f(\tau) = N_{A,0}^{\infty} \left(1 - \exp \left(-\frac{\ln 2}{T_A} \tau \right) \right)$$

und

$$f(\tau) = N_{B,0}^{\infty} \left(1 - \exp \left(-\frac{\ln 2}{T_B} \tau \right) \right) .$$

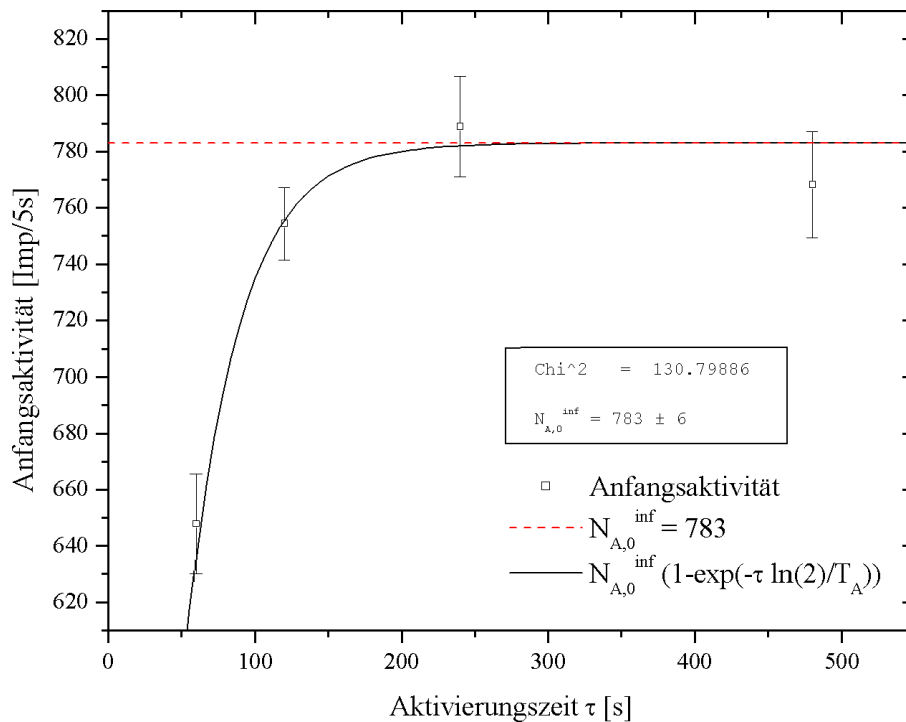


Abbildung 220: Anfangsaktivität des $^{110}_{47}\text{Ag}$ in Abhängigkeit von der Aktivierungszeit.

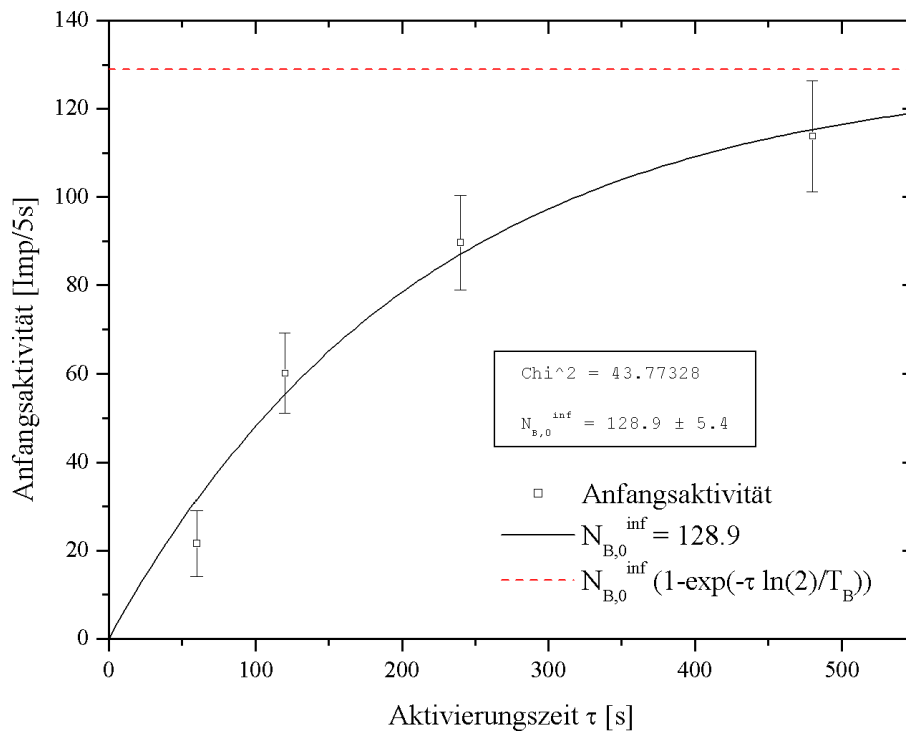


Abbildung 221: Anfangsaktivität des $^{108}_{47}\text{Ag}$ in Abhängigkeit von der Aktivierungszeit.

Wir erkennen, dass die Anfangsaktivität des $^{110}_{47}\text{Ag}$ mit längere Aktivierungszeit nicht mehr größer wird. Den Grenzwert haben wir mit

$$N_{A,0}^{\infty} = 783 \pm 6 \text{ Imp/5s}$$

berechnet. Wir sind also schon in den Bereich des Grenzwertes gelangt. Die Anfangsaktivität des $^{108}_{47}\text{Ag}$ würde jedoch mit längeren Aktivierungszeiten noch stärker werden. Dessen Grenzwert liegt bei

$$N_{B,0}^{\infty} = 128,9 \pm 5,4 \text{ Imp/5s}$$

Da wir 4 Messpunkte und nur einen Parameter haben erhalten wir 3 Freiheitsgrade und somit

$$\chi_{A,\text{red.}}^2 = \frac{43,77328}{3} \approx 21,8$$

und

$$\chi_{B,\text{red.}}^2 = \frac{130,79886}{3} \approx 63,4.$$

Diese Werte weichen beträchlich von 1 ab, was wir uns dadurch erklären können, dass wir lediglich 3 Messpunkte zur Verfügung hatten und die Anfangsaktivitäten ebenfalls schon stark fehlerbehaftet waren. Aus den Graphen ist jedoch zu erkennen, dass die berechnen Grenzwerte durchaus realistisch sind.

29.5 Diskussion

Wie schon in Kapitel 29.4.1 beschrieben, liegen die Literaturwerte der Halbwertszeiten im Fehlerbalken unserer Messungen. Mit dem $\chi^2_{\text{red.}} \approx 1,6$ können wir aufgrund der relativ kleinen Zahl der Messpunkte und der stochastischen Natur des Zerfallsgesetzes zufrieden sein.

Die Grenzwerte der Anfangaktivitäten wurden in Kapitel 29.4.2 nur unzufriedenstellend berechnet, hier liegen die reduzierten χ^2 Berechnungen weit über 1. Dies liegt jedoch an der extrem kleinen Zahl von nur drei Messpunkten und der Weiterverarbeitung von stark fehlerbehafteten Größen.

Eigene Kommentare

[Es war nett, mal wieder in netter Runde beisammen zu sein. Der Versuch, der hat dabei nicht gestört.]_{Daniel}

[Der Versuch war super. Wir konnten, zum Ärgernis unserer Kommilitonen, welche versuchten den Franck-Hertz-Versuch durchzuführen, durch die weitgehende Automatisierung des Versuches, ein bisschen schnacken. Die Freude am Versuch wurde durch die schwierige Auswertung wieder wettgemacht. Stundenlanges hantieren mit Computerprogrammen tut irgendwann in den Augen weh. Wenn das Programm dann die mühsam innerhalb von vier Stunden erstellten Graphen einfach nicht mehr hergeben will, so kann man sich vor Freude kaum mehr halten.]_{Hauke}

30 Die spezifische Wärme

Versuch durchgeführt am 7. Februar 2006, Protokoll erarbeitet von Daniel Scholz.

30.1 Einleitung

Dieser Versuch ist ein Analogon zu Versuch 6: Spezifische Wärme der Luft und Gasthermometer. Daher werden einige Begriffe auch nur sehr flüchtig wiederholt.

Wir wollen nun die spezifische Wärme von Festkörpern bestimmen.

30.2 Theorie

30.2.1 Spezifische Wärmekapazität

Die Definition der *spezifischen Wärmekapazität* ist

$$c := \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}, \quad (30.1)$$

dabei ist m die Masse, dQ die Wärmemenge und dT die Temperaturveränderung. Entsprechend gilt für die molare Wärmekapazität

$$c_{mol} = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT},$$

wobei ν die Molzahl beschreibt. Die zu leistende Volumenarbeit bei der Erwärmung von Festkörpern ist sehr gering und kann vernachlässigt werden, weshalb die spezifischen Wärmekapazitäten bei festem Volumen c_V und festem Druck c_P fast identisch sind:

$$c_V \approx c_P.$$

30.2.2 Die Regel von Dulong-Petit

Die Regel von Dulong-Petit besagt, dass ein Festkörper aus Molekülen besteht, die in einem Kristallgitter angeordnet sind. Jedes dieser Moleküle besitzt eine spezifische Anzahl von Freiheitsgraden f , welche Translation, Rotation und Schwingung beschreiben. Jeder Freiheitsgrad trägt die Energie

$$W = k_B \frac{T}{2}$$

zur Gesamtenergie bei, dabei ist k_B die Boltzmannkonstante und T wie üblich die Temperatur. Für die Energie eines Stoffes mit N Molekülen gilt folglich

$$W = \frac{f}{2} N k_B T = \frac{f}{2} \nu N_A k_B T = \frac{f}{2} \nu R T,$$

wobei N_A die Avogadrozahl und $R = N_A \cdot k_B = 8,31 \text{ J/K mol}$ die Gaskonstante beschreibt. Für die molare Wärmekapazität gilt

$$c_{mol} = \frac{1}{\nu} \frac{dW}{dT} = \frac{f}{2} R.$$

Die Moleküle eines Feststoffes besitzen bei hohen Temperaturen drei Freiheitsgrade der Rotation und drei Schwingungsfreiheitsgrade, mit obiger Formel gilt also

$$c_{mol} = \frac{2 \cdot 3}{2} R = 3R.$$

Bei niedrigeren Temperaturen besitzt die Regel von Dulong-Petit keine Gültigkeit mehr, da hier die Freiheitsgrade „einfrieren“ [quantisierte Energie]. Die Wärmekapazität kann dann nach Einstein berechnet werden.

30.2.3 Wärmekapazität nach Einstein

Diese Theorie geht davon aus, dass die Moleküle in der Gitterstruktur eines Festkörpers quantisierte Energien besitzen. Die Energie ε_j eines Gitterelements im Zustand j beträgt

$$\varepsilon_j = j \hbar \omega,$$

wobei \hbar das Plancksche Wirkungsquantum, ω die Kreisfrequenz und j eine ganzzahlige Zahl ist. Nach der Boltzmannverteilung befinden sich N_j Teilchen in diesem Zustand, es gilt

$$N_j = N_0 \exp\left(-j \hbar \omega \frac{1}{k_B T}\right)$$

mit der Grundzahl N_0 für $\varepsilon_j = 0$. Für die Gesamtenergie gilt nun

$$E = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j N_j = N \cdot \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1}.$$

Für eine Schwingung mit 3 Freiheitsgraden gilt dementsprechend

$$\begin{aligned} E &= 3N \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1} \\ &= 3N_A \nu \frac{k_B \Theta_E}{\exp(\Theta_E / T) - 1} = 3R \nu \frac{\Theta_E}{\exp(\Theta_E / T) - 1}, \end{aligned} \quad (30.2)$$

hierbei ist $\Theta_E = \hbar \omega / k_B$ die sogenannte **Einstein-temperatur**. Für die molare Wärme gilt

$$c_{mol} = \frac{1}{\nu} \frac{dE}{dT} = 3R \frac{\Theta_E^2}{T^2} \frac{\exp(\Theta_E / T)}{\exp(\Theta_E / T) - 1}.$$

Entwickelt man nun Gleichung (30.2) für $T \gg \Theta_E$, so erhält man

$$E \approx 3R \nu T \quad \text{und damit} \quad c_{mol} = 3R.$$

Betrachtet man umgekehrt $T \ll \Theta_E$, so hat man

$$\exp(\Theta_E/T) - 1 \approx \exp(\Theta_E/T)$$

und damit

$$E \approx 3R\nu \exp(-\Theta_E/T) \quad \text{sowie} \quad c_{mol} = 3R \exp(-\Theta_E/T) \cdot \left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2.$$

Die Einsteintemperatur ist der Übergang von dem durch die Regel von Dulong-Petit beschriebenen Verhalten zum abweichenden Verhalten bei tiefen Temperaturen.

30.2.4 Die Debyesche Theorie

Die Theorie Einsteins, dass die Gitterelemente schwingen, wurde von Debye erweitert, der davon ausging, dass auch das ganze Gitter schwingt und diese Schwingungen als Schall zu betrachten sind. Auch diese Schwingungen sind quantisiert, denn es treten nur Wellenlängen auf, die ganzzahlige Vielfache der Gitterkonstanten sind. Der Großteil der gespeicherten Energie steckt in diesen Schwingungen [stehende Wellen].

Nimmt man an, dass ein eindimensionales Gitter aus N äquidistanten Atomen besteht und die Gitterkonstante k besitzt, dann muss eine ganzzahlige Anzahl von n Halbwellen in das Gitter der Länge $L = N\lambda$ passen, um eine stehende Welle zu bilden. Es folgt

$$L = Nd = \frac{1}{2}n\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2\frac{dn}{N}.$$

Die Wellenlänge muss mindestens das doppelte der Länge annehmen. Das bedeutet, dass N verschiedene Normalschwingungen auftreten können. Logischerweise besitzt ein dreidimensionales Gitter dann $3N$ Normalschwingungen. Jede dieser Wellenformen entspricht einem quantisierten Energiezustand und trägt zur Gesamtenergie

$$dW = \frac{h\omega}{\exp(h\omega/Tk_B)}$$

bei. Betrachtet man ein kleines Kreisfrequenzintervall von ω bis $\omega + d\omega$, so treten in diesem

$$\frac{2L^3\omega^2}{2\pi^2c_S^2}$$

Normalschwingungen auf, dabei ist c_S die Schallgeschwindigkeit. Hieraus kann die Energie berechnet werden:

$$E = 9Nk_B \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx.$$

Dabei wurde die **Debyetemperatur**

$$\Theta_D = \frac{h\omega_{max}}{k_B} \approx \frac{h\pi c_S}{k_B}$$

und der Teilchenzahl $N = (L/d)^3$ verwendet. Betrachtet man die Grenzfälle der Temperatur, so erhält man für $T \gg \Theta_D$ wie bei Dulong-Petit

$$c_{mol} = 3R.$$

Für $T \ll \Theta_D$ hingegen folgt

$$E = \frac{2\pi^4 N k_B T^3}{5\Theta_D^3} \quad \text{also} \quad c_{mol} = 12 \frac{\pi^4 k_B}{5m} \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3.$$

30.2.5 Das Thermoelement

Berühren sich zwei unterschiedliche Metalle, so tauschen diese Elektronen aus. Das Metall mit der niedrigeren Austrittsarbeit, also dem niedrigeren Fermi-niveau, der Besetzungswahrscheinlichkeit eines Energieniveaus durch ein Elektron, gibt Elektronen an das andere ab. Es entsteht eine Potentialdifferenz. Dies passiert so lange, bis sich eine solche Kontaktspannung bildet, dass die Differenz der Fermi-niveaus ausgeglichen ist. Die Kontaktspannung hängt von der Temperatur ab, da bei höheren Temperaturen mehr Elektronen die Austrittsarbeit leisten können. Durch Zusammenlöten der Enden ist es möglich einen Temperaturmessgerät zu bauen: Während man das eine Ende bei konstanter Temperatur hält, misst man die Spannungsdifferenz und erhält daraus die Temperaturdifferenz zum anderen Ende. Dies nennt man auch die **Thermospannung**. Aus ihr kann also zu gegebenen Angaben die Temperatur berechnet werden.

30.3 Versuchsdurchführung

Es werden zwei Probekörper [Aluminium und V2A] in einem Kalorimeter [Dewargefäß mit isolierendem Stahlzylinder] mit einer Heizwendel erhitzt und dann wieder abgekühlt. Dies geschieht zunächst in Luft [zu Beginn bei Zimmertemperatur] und danach in einer Umgebung aus flüssigem Stickstoff [77 K]. Die Temperatur wird über ein Thermoelement bestimmt, dessen eine Seite in Eiswasser steckt [Referenztemperatur 273 K].

Mit zwei Körpern, die sich jeweils in Luft und in Stickstoff befinden, führen wir also insgesamt 4 Messungen durch. Dabei wird jeweils in festen Zeitintervallen von 30 s die Spannung des Thermoelementes notiert und beim Erhitzen zusätzlich die Spannung der Heizwendel. Der Strom sollte hierbei auf 0.5 A konstant gehalten werden, dazu muss nachgeregelt werden.

30.4 Auswertung

Zunächst einmal möchten wir festhalten, dass wir die Auswertung nun zum zweiten Mal durchführen. In unserer vorherigen Auswertung haben wir die fatale Annahme gemacht, dass keine Energie abgestrahlt wird, das ist hier aber natürlich nicht der Fall.

Danke an unseren Assistenten André, der uns bei der neuen Auswertung sehr unterstützte.

30.4.1 Temperaturverläufe

Die Thermospannung des Thermoelementes wurde in mV gemessen und kann durch

$$T(U) = 273.369 + 20.456 U - 0.302 U^2 + 0.009 U^3$$

in Kelvin umgerechnet werden¹.

Damit wurde in Abbildung 222 der Temperaturverlauf in Luft und in Abbildung 223 der Temperaturverlauf in der Stickstoffumgebung für die beiden Körper berechnet.

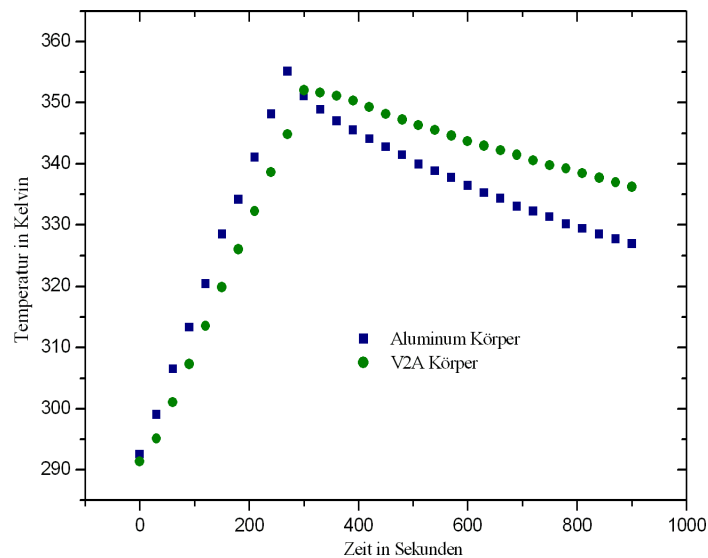


Abbildung 222: Temperaturverlauf in der Luftumgebung.

¹ Diese Gleichung stammt aus dem Praktikumsript: Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 227.

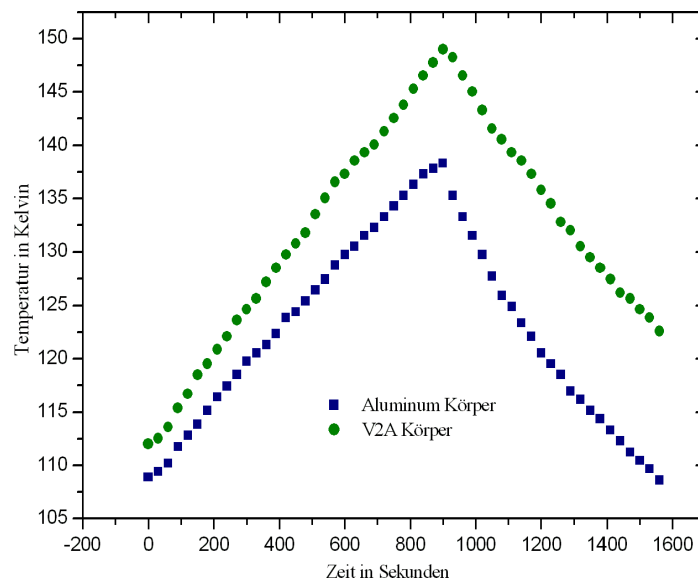


Abbildung 223: Temperaturverlauf in der Stickstoffumgebung.

Es ist zu erkennen, dass wir bei der Erwärmung einen linearen Anstieg der Temperatur annehmen können. Der theoretisch erwartete exponentielle Abfall bei der Abkühlung ist jedoch nur bei Aluminium zu erkennen.

30.4.2 Widerstand der Heizdrähte

Da der Heizstrom konstant $I = 0.5 \text{ A}$ betrug, kann man den ohmschen Widerstand $R(T)$ der beiden Heizdrähte für die verschiedenen Versuchstemperaturen T durch

$$R(T) = \frac{U(T)}{I} = 2 \cdot U(T) \text{ A}^{-1}$$

berechnen, dabei ist $U(T)$ die Heizspannung zum Zeitpunkt T . Die Ergebnisse unserer Messungen wurden in Abbildung 224 und 225 verdeutlicht.

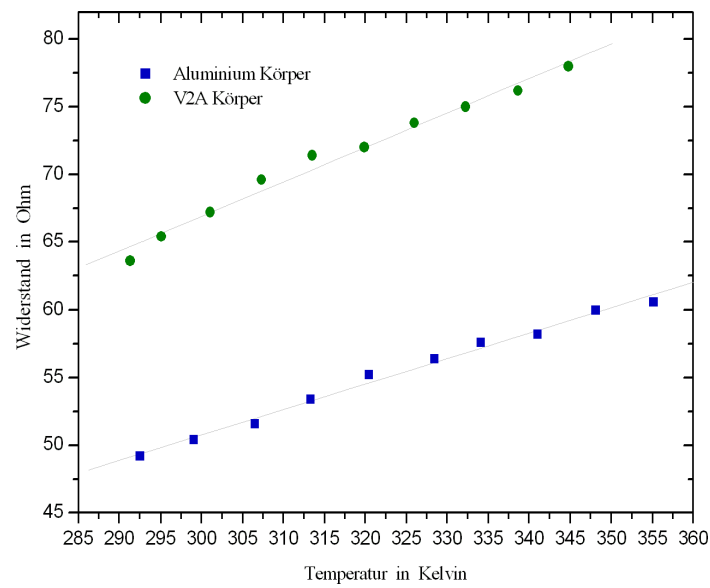


Abbildung 224: Widerstand der Heizdrähte in der Luftumgebung.

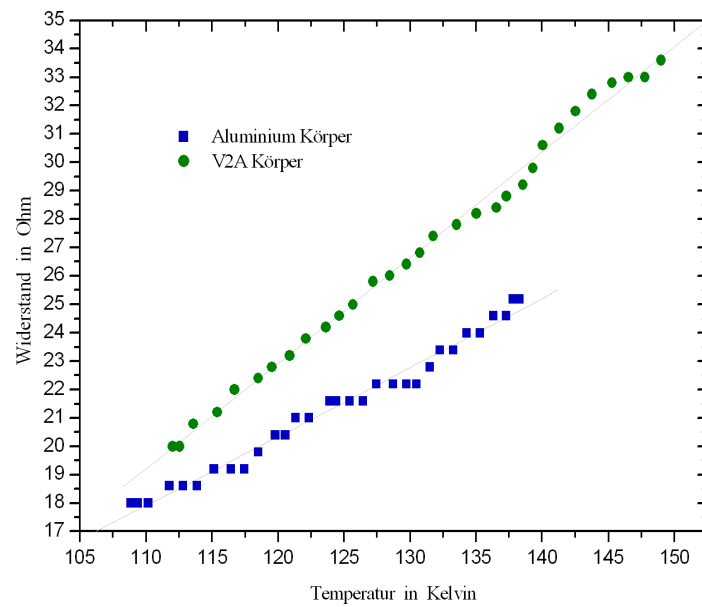


Abbildung 225: Widerstand der Heizdrähte in der Stickstoffumgebung.

30.4.3 Spezifische Wärmekapazität

Da wir bei der Erwärmung einen linearen Temperaturverlauf und bei der Abkühlung einen exponentiellen Abfall der Temperatur erwarten, haben wir zunächst die Steigungen der linearen Regressionen der Erwärmung und die Steigungen der linearen Regressionen vom Logarithmus der Abkühlung ermittelt:

			Steigung
Aluminium	Erwärmung	Luft	0.232 ± 0.002
Aluminium	Abkühlung	Luft	$(-1.158 \pm 0.028)10^{-4}$
Aluminium	Erwärmung	Stickstoff	0.034 ± 0.0005
Aluminium	Abkühlung	Stickstoff	$(-3.33 \pm 0.074)10^{-4}$
V2A	Erwärmung	Luft	0.203 ± 0.003
V2A	Abkühlung	Luft	$(-0.796 \pm 0.009)10^{-4}$
V2A	Erwärmung	Stickstoff	0.041 ± 0.0005
V2A	Abkühlung	Stickstoff	$(-2.951 \pm 0.038)10^{-4}$

Die Steigungen haben dabei die Einheit K/s bzw. $1/s$.

Um damit die spezifische Wärme von Aluminium und von V2A zu bestimmen, betrachten wir zunächst die elektrische Leistung.

$$P_{elk} = P_{erw} + P_{abs} = \left(\frac{dQ}{dt} \right)_{erw} + P_{abs},$$

dabei steht P_{elk} für die elektrische Leistung und P_{erw} bzw. P_{abs} für die Erwärmung bzw. die Abstrahlung. Die spezifischen Wärmekapazität wird nach Gleichung (30.1) für einen Körper der Masse 1 kg durch

$$c = \frac{dQ}{dT}$$

definiert. Damit folgt

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} = c \cdot \frac{dT}{dt}$$

und für die Abkühlung erhalten wir

$$0 = \frac{dQ}{dt} + P_{abk} \quad \Leftrightarrow \quad P_{abk} = - \left(\frac{dQ}{dt} \right)_{abk},$$

da hier ja gerade $P_{el} = 0$ gilt. Alle vorherigen Gleichungen kombiniert ergeben

$$P_{el} = c \cdot \left(\left(\frac{dT}{dt} \right)_{erw} - \left(\frac{dT}{dt} \right)_{abk} \right)$$

und umgeformt erhalten wir

$$c(T) = \frac{P_{el}(T)}{\left(\frac{dT}{dt} \right)_{erw} - \left(\frac{dT}{dt} \right)_{abk}}. \quad (30.3)$$

Die elektrische Leistung $P_{el}(T)$ zum Zeitpunkt T kann durch

$$P_{el}(T) = U(T) \cdot I = U(T) \cdot 0.5\text{ A}$$

berechnet werden, dabei ist $U(T)$ die verwendete Heizspannung und der Heizstrom I betrug konstant $I = 0.5\text{ A}$.

Nun nutzen wir auch die zuvor angegebenen Regressionsgeraden. Bei der Erwärmung haben wir den folgendne linearen Zusammenhang:

$$T(t) = m_{erw}t + b,$$

also erhalten wir direkt

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{erw} = m_{erw},$$

dabei ist m_{erw} die Steigung aus der Tabelle zuvor.

Bei der Abkühlung ist die Situation etwas komplizierter: Wir haben

$$\log(T(t)) = m_{abk}t + b$$

und erhalten damit

$$t = \frac{\log(T(t)) - b}{m_{abk}} \quad \text{und} \quad T(t) = \exp(m_{abk}t + b).$$

Diese beiden Gleichungen liefern nun

$$\begin{aligned} T'(t) &= \left(\frac{dT}{dt}\right)_{abk} = m_{abk} \cdot \exp(m_{abk}t + b) \\ &= m_{abk} \cdot \exp(\log(T(t)) - b + b) = m_{abk} \cdot T. \end{aligned}$$

Nun können wir Gleichung (30.3) auch schreiben als

$$c(T) = \frac{U(T) \cdot 0.5 A}{m_{erw} - m_{abk}T}.$$

Um damit die spezifische Wärmekapazität der beiden Probekörper zu berechnen, müssen wir noch durch die Masse M der Körper teilen und erhalten damit die zu verwendende Gleichung

$$c(T) = \frac{U(T) \cdot 0.5 A}{M \cdot (m_{erw} - m_{abk}T)}. \quad (30.4)$$

Mit den Annahmen, dass die Stromstärke und die Massen der Körper exakt sind, und mit der Schätzung von $\sigma_{U(t)} = 1$ erwarten wir den folgenden Fehler:

$$\sigma_{c(T)} = \sqrt{\left(\frac{\partial c(T)}{\partial U(T)} \sigma_{U(T)}\right)^2 + \left(\frac{\partial c(T)}{\partial m_{erw}} \sigma_{m_{erw}}\right)^2 + \left(\frac{\partial c(T)}{\partial m_{abk}} \sigma_{m_{abk}}\right)^2}.$$

Mit den verwendeten Massen $M_{Al} = 0.0526 \text{ kg}$ und $M_{V2A} = 0.1487 \text{ kg}$ sind wir nun in der Lage die spezifische Wärmekapazität in Abhängigkeit der Temperatur zu berechnen. Siehe dazu Abbildung 226 und Abbildung 227.

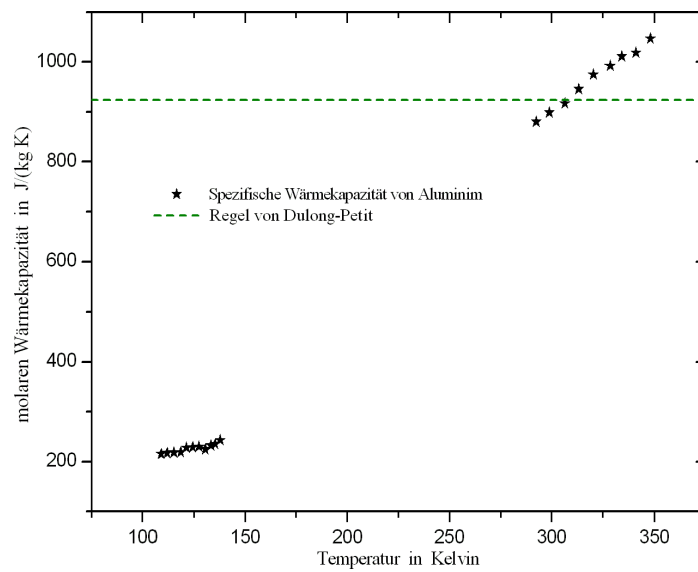


Abbildung 226: Spezifische Wärmekapazität von Aluminium.

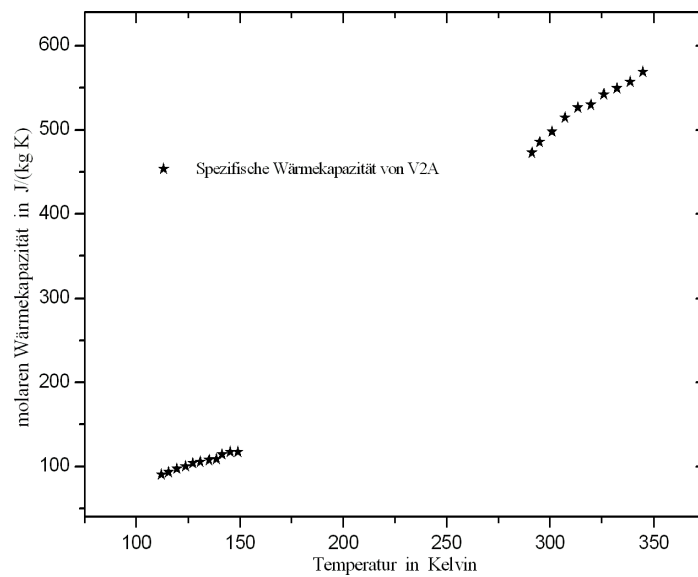


Abbildung 227: Spezifische Wärmekapazität von V2A.

Bei der Messreihe zum Aluminium haben wir zu unseren Ergebnissen auch noch die Regel von Dulong-Petit eingezeichnet: Nach Dulong-Petit gilt

$$c(T) = c = \frac{3R}{m_{mol}},$$

dabei ist $R = 8.3145 \text{ J/kgK}$ die Gaskonstante und $m_{mol} = 0.027 \text{ kg}$ die molare Masse von Aluminium.

Für V2A ist uns keine molare Masse bekannt, daher konnten wir die Regel von Dulong-Petit leider nicht einzeichnen.

30.5 Diskussion

Zunächst lässt sich sagen, dass uns nur eine sehr kleine Skala am Netzgerät zum Messen der Spannung zur Verfügung stand. Während des Versuches war uns noch nicht klar, dass diese Spannung ein wesentlicher Bestandteil in der Auswertung des Versuches darstellt, sonst hätten wir mit Sicherheit ein Multimeter zur besseren Bestimmung der Werte verwendet. Es wäre wünschenswert, wenn dieser Punkt für unsere Nachfolger im Praktikumsskript genauer beschrieben werden könnte.

Unsere Messergebnisse der spezifischen Wärmekapazität des Aluminiums in der Luftumgebung stimmen mit etwas Abweichung mit der Regel von Dulong-Petit überein. Für die Stickstoffumgebung haben wir Ergebnisse erwartet, die in etwa der Regel von Debye entsprechen. Dies ist bei uns nicht der Fall.

Für V2A stehen uns wie bereits angesprochen keine Vergleichsdaten zur Verfügung.

Durch mehr Messwerte beim Abkühlen der Körper hätten wir eventuell bessere Ergebnisse erzielen können, jedoch war der Versuch einfach zu langweilig.

Eigene Kommentare

[Was ist überhaupt V2A. Ein Edelstahl, na toll. Ein total stumpfer Versuch, total langweilig. Auswertung: fürn Arsch. Reine Zeitverschwendung, Auswertung gleich zweimal gemacht, trotzdem total beschissene Ergebnisse.]^{Daniel}

[Manchmal wundert man sich, wie einige Vorgängerprotokolle testiert wurden. Zumindest einen Tipp zur korrekten Berechnung der spezifischen Wärmekapazität hätte es im Skript geben können.]^{Hauke}

Literaturverzeichnis

- [1] DEMTRÖDER, W.: *Experimentalphysik 2 Elektrizität und Optik*. 3. Auflage. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 2004
- [2] DEMTRÖDER, W.: *Experimentalphysik 1 Mechanik und Wärme*. 4. Auflage. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 2005
- [3] DEMTRÖDER, W.: *Experimentalphysik 3 Atome, Moleküle und Festkörper*. 3. Auflage. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 2005
- [4] MESCHEDE, D.: *Gerthsen Physik*. 21. Auflage. Springer Verlag Berlin, 2001
- [5] SCHAAF, P.: *Das Physikalische Praktikum*. 1. Auflage. 2005. – Skript zum Praktikum.
- [6] TIPLER, P.A.: *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. 2. Auflage. Spektrum Akademischer Verlag München, 2004

Stichwortverzeichnis

Symbole und Sonderzeichen

α -Zerfall, 346
 β -Zerfall, 346
 γ -Zerfall, 346
Übergangszone, 250

A

absoluten Nullpunkt, 74
Absorption, 302
Absorptionskante, 334
Absorptionskoeffizient, 334
Adiabatenexponent, 85
adiabatische Zustandsänderung, 85
aktive Bereich, 252
Akzeptor-Niveau, 250
Ampèresche Gesetz, 197
anisotrop, 296
Anlaufstrom, 240
Anodenspannung, 239
aperiodischer Grenzfall, 11
Apertur
 numerische, 263
außerordentlicher Strahl, 296
Auffängerstrom, 324
Auflösungsvermögen, 263
Ausgangskennlinie, 252

B

Band, 249
Bandpass, 187
Basis, 251
Beschleunigungsspannung, 239, 324
Bezugssehweite, 261
Bezugsweite, 262
Biot-Savartsche Gesetz, 170
Bitter-Methode, 209
Blindwiderstand, 185
Bloch-Wände, 209

Bohrsches Atommodell, 322
Bohrsches Magneton, 207
Bragg-Bedingung, 335
Brakhauseneffekt, 209
Breckkraft, 260
Brechungsgesetz
 Snelliussches, 272, 293
Brechungsindex, 259, 286, 293
Brechzahl, 293
Brennpunkt, 260
Brennweite, 260
Brewsterwinkel, 295

C

charakteristischen Linien, 332
Clement-Desormes, 85
Compton Effekt, 334
Coulombsches Gesetz, 120
Curiesches Gesetz, 229

D

Debyetemperatur, 362
Deklination, 201
destruktive Interferenz, 287
Dipolachse, 196
Dispersion, 274
Donator-Niveau, 250
Doppelbrechung, 296
dotierter Halbleiter, 249
Drehimpuls, 48
Drehmoment, 48
Durchlässigkeit, 294
Durchlassrichtung, 251

E

Effektivwert, 182
Eigenhalbleiter, 249
Einschwingzeit, 13

Einsteintemperatur, 361
elektromagnetische Kraft, 345
Emission, 323
Emitter, 251

F

Ferromagnetismus, 207
Figurenachse, 50
Franck-Hertz-Versuch, 322
Fresnelschen Formeln, 292

G

Galvanometer, 127
Gasthermometer, 73
Gaußsche Hauptlagen, 198
Gegenstandsweite, 262
gequantelt, 322
Gesetz von
 Duane und Hunt, 332
 Moseley, 333
Gitterfunktion, 311
Gleichrichterschaltung, 122
Graetz Schaltung, 122
Gravitationsgesetz, 23
Gravitationskonstante, 23
Gravitationskraft, 345
Gravitationswaage, 23
Grenzfall
 aperiodischer, 11
Grenzfrequenz, 332
Grenzwellenlänge, 332

H

Haftspannung, 62
Hallsonde, 172
Hallspannung, 173
Hauptmaxima, 275
Hauptminima, 275
Hauptträgheitsachsen, 35
Hochpass, 186
Huygensches Prinzip, 270

I

Immersionsflüssigkeit, 263
Impedanz, 184
Induktionsgesetz, 170
induktiven Widerstand, 183

induzierte Emission, 302
Influenzkonstante, 169
Inklination, 201
Ionisierungsgrenze, 248
isobare Zustandsänderung, 85
isochore Zustandsänderung, 85
Isodynamen, 201
Isogonen, 201
Isoklinen, 201
isotherme Zustandsänderung, 85
Isotope, 345
isotrop, 296

K

kAktivität, 349
kapazitiver Widerstand, 184
Kelvin Temperatur, 74
Kennlinie, 239
Keplerschen Gesetze, 23
kinetische Energie, 33
Koerzitivfeldstärke, 209
kohärentem Licht, 270
Kohäsionskräfte, 59
Kollektor, 251
konkav Linse, 260
konstruktive Interferenz, 287
konvex Linse, 260
Kraftflussdichte, 169

L

Leitungsband, 249
Lichtquanten, 322
Linsen, 260
Literaturverzeichnis, 371
Lupe, 261

M

Magnete, 196
magnetisch
 hart, 209
 weich, 209
magnetische Erregung, 169
magnetische Suszeptibilität, 228
magnetischer Fluss, 197
magnetisches Dipolmoment, 196
magnetisches Feld, 197
Meniskus, 62
mittlere freie Weglänge, 324

molare Wärmekapazität, 76

N

Netzebenen, 335

Nicolsches Prisma, 296

Nuklid, 345

Nulleffekt, 348

numerische Apertur, 263

Nutation, 50

O

Oberflächenenergie, 60

Oberflächenspannung, 60

Objektiv, 262

Okular, 262

optisch dünner, 293

optisch dichter, 259, 293

optische Achse, 296

optische Tubuslänge, 262

ordentlicher Strahl, 296

P

Paarbildung, 334

Photoeffekt, 334

Polstärke, 196

Präzession, 48

Präzessionsgeschwindigkeit, 49

Q

Quanten, 322

R

Rüchardt, 85

Rayleighsche Grenzlage, 263

Reflexionsverhältnis, 294

remanente Magnetisierung, 209

Remanenz, 209

Resonanz, 13

Resonanzkatastrophe, 13

Reynoldszahl, 65

Richardson-Gleichung, 240

Rotationsbewegung, 33

Rotationsenergie, 33

S

Sättigungsbereich, 240, 252

Sättigungsdampfdruck, 323

Sammellinsen, 260

Satz von Steiner, 35

Scheinwiderstand, 184

Schottky-Langmuir

Raumladungsgesetz, 240

schwache Wechselwirkung, 345

Snelliussches Brechungsgesetz, 272, 293

Sperrrichtung, 251

spezifische Elektronenladung, 160

spezifische Wärmekapazität, 360

spezifischen Wärme, 73

spontaner Emission, 302

starke Wechselwirkung, 345

Strahlungsdichteformel

Plancksche, 303

Streulinsen, 260

Stromverstärkungskennlinie, 252

Suszeptibilität, 228

T

Tesla, 197

Thermospannung, 363

Tiefpass, 187

Totzeit, 336, 348

Trägheitsellipsoid, 36

Trägheitsmoment, 34

Translationsbewegung, 33

Transversalwellen, 292

Tubus, 262

U

unipolarer Transistor, 252

V

Valenzband, 249

van der Waals Wechselwirkung, 60

verstärkende Interferenz, 287

Viskosität, 64

Vorwort, 7

W

Wärmekapazität, 76

Wechselwirkung

van der Waals, 60

Wehneltzylinder, 161

Weiss-Bezirke, 208

Weiss-Gesetz, 208
Wheatstone-Brücke, 110, 144
Winkelgeschwindigkeit, 47
Winkelrichtgröße, 37
Wirbelstrombremse, 15
Wirkwiderstand, 185

Z

Zustandsänderung
 adiabatische, 85
 isobare, 85
 isochore, 85
 isotherme, 85