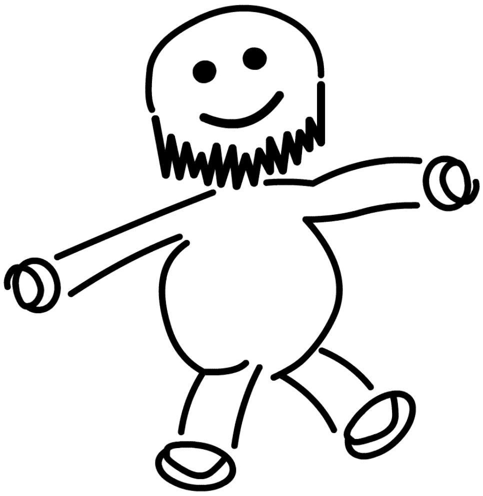
Analytische Geometrie und lineare Algebra I und II



Daniel Scholz im Sommer und Winter 2004

Inhaltsverzeichnis

Übersicht der algebraischen Strukturen

1 Algebraische Strukturen

1.1 Mengen

Eine ***Menge*** M ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen.

1.2 Gruppen

Eine ***Gruppe*** $(G, \circ)$ ist eine Menge G mit einer Abbildung $\circ : G \times G \to G$, für die gilt:

(GRP1) Assozialtivgesetz: $(g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k) \quad$ für alle $g, h, k \in G$

(GRP2) Linkseins: Es gibt $e \in G$ mit $e \circ g = g \quad$ für alle $g \in G$

(GRP3) Linksinverses: Es gibt $g' \in G$ mit $g' \circ g = e \quad$ für alle $g \in G$

1.3 Ringe

Ein ***Ring*** $(R, +, \cdot)$ ist eine Menge R mit zwei Abbildungen "+" (Addition) und "·" (Multiplikation), für die gilt:

(RNG1) $(R, +)$ ist eine kommutative Gruppe

(RNG2) AG: $(rs)t = r(st) \quad$ für alle $r, s, t \in R$

(RNG3) DG: $r(s + t) = rs + rt$ und $(r + s)t = rt + st \quad$ für alle $r, s, t \in R$

1.4 Körper

Ein ***Körper*** $K = (K, +, \cdot)$ ist eine Menge K mit zwei Verknüpfungen "+" (Addition) und "·" (Multiplikation), für die gilt:

(KRP1) $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit Einselement 0

(KRP2) $(K, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit Einselement 1

(KRP3) Es gilt: $1 \neq 0$

(KRP4) Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad$ für alle $a, b, c \in K$

1.4.1 Ring und Körper

Ein Ring ist also ein "bisschen weniger" als ein Körper.

Jedes Element aus ein Körper hat ein inverses Element der Addition und der Multiplikation. Bei einem Ring wird zu jedem Element nur ein inverses Element der Addition gefordert.

1.5 Vektorräume

Ein ***Vektorraum*** ist eine Menge V mit einer ***Vektoraddition***

$$\text{"} + \text{"} : V \times V \to V$$

und einer ***skalaren Multiplikation***

$$\text{"} \cdot \text{"} : K \times V \to V,$$

für die gilt:

(VTR1) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe

(VTR2) Assoziativgesetz: $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) \quad$ für alle $a, b \in K,\ x \in V$

(VTR3) Für das Einselement $1 \in K$ gilt: $1 \cdot x = x \quad$ für alle $x \in V$

(VTR4) Distributivgesetze: für alle $a, b \in K,\ x, y \in V$ gilt

$$(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x \quad \text{und} \quad a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$$

Dabei sind alle Elemente aus dem Vektorraum V Vektoren mit Einträgen aus einem Körper K.

1.5.1 Körper und Vektorräume

Jeder Körper ist also auch ein eindimensionaler Vektorraum über sich selber.

2 Abbildungen zwischen Strukturen

2.1 Homomorphismus

2.1.1 Vektorräume

Seien X, Y zwei Vektorräume und sei $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung.

φ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn φ linear ist.

2.1.2 Gruppen

Seien X, Y zwei Gruppen und sei $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung.

φ ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn für alle $a, b \in X$ gilt:

$$\varphi(a \circ b) \;=\; \varphi(a) \circ \varphi(b)$$

2.1.3 Ringe

Seien X, Y zwei Ringe und sei $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung.

φ ist genau dann ein Ringhomomorphismus, wenn für alle $a, b \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(a + b) &= \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(a \cdot b) &= \varphi(a) \cdot \varphi(b) \end{aligned}$$

2.1.4 Teilweise geordnete Mengen

Seien X, Y zwei teilweise geordnete Mengen und sei $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung.

φ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn für alle $a, b \in X$ gilt:

$$\varphi(a) \leq \varphi(b) \quad \text{falls} \quad a \leq b$$

2.1.5 Topologische Räume

Seien X, Y zwei topologische Räume und sei $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung.

φ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn φ stetig ist und wenn für alle offenen $A \in X$ auch $\varphi(A)$ offen in Y ist.

2.2 Endomorphismus

$\varphi : X \to Y$ ist ein Endomorphismus, wenn φ ein Homomorphismus ist und $X = Y$ gilt.

2.3 Isomorphismus

$\varphi : X \to Y$ ist ein Isomorphismus, wenn φ ein bijektiver Homomorphismus ist.

2.4 Automorphismus

$\varphi : X \to Y$ ist ein Automorphismus, wenn φ ein bijektiver Homomorphismus ist und $X = Y$ gilt.

Analytische Geometrie und lineare Algebra

3 Körper

3.1 Definition

Ein Körper $K = (K, +, \cdot)$ ist eine Menge K, auf der zwei Verknüpfungen ("$+$" Addition und "$\cdot$" Multiplikation) so definiert sind, dass für alle $a, b \in K$ auch

$$a + b \quad \text{und} \quad a \cdot b$$

Element von K sind und zusätzlich für alle $a, b, c \in K$ folgende Rechenregeln gelten:

(KRP1) Assozialtivgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)$

(KRP2) Kommutativgesetz: $a + b = b + a$

(KRP3) neutrales Element: $\exists\, 0 \in K : \; a + 0 = 0 + a = a$

(KRP4) Inverses: für alle $a \in K$ gibt es ein $b \in K$ mit $a + b = b + a = 0$

(KRP5) Assozialtivgesetz: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(KRP6) Kommutativgesetz: $a \cdot b = b \cdot a$

(KRP7) Einselement: es gibt $1 \in K$ mit $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

(KRP8) Inverses: für alle $a \in K$ gibt es ein $b \in K$ mit $a \cdot b = b \cdot a = 1$

(KRP9) Es gilt: $1 \neq 0$

(KRP10) Distributivgesetze: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

3.1.1 Beispiele

Die Mengen $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ bilden mit üblicher Addition und Multiplikation als Verknüpfungen einen Körper.

3.2 Folgerungen

3.2.1 Folgerung 1

Sei K ein Körper.

Dann hat K genau ein neutrales Element der Addition (***Nullelement***) und genau ein neutrales Element der Multiplikation (***Einselement***).

3.2.2 Folgerung 2

Sei K ein Körper.

(1) Für alle $a \in K$ gibt es genau ein $b \in K$, so dass $a + b = 0$ gilt.

(2) Für alle $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es genau ein $c \in K$, so dass $a \cdot c = 1$ gilt.

Schreibweise: $b = -a$ und $c = a^{-1}$.

3.2.3 Folgerung 3

Sei K ein Körper.

(1) Für alle $a, b \in K$ gibt es genau ein $x \in K$, so dass $a + x = b$ gilt.

(2) Für alle $a \in K$ mit $a \neq 0$, gibt es genau ein $y \in K$, so dass $a \cdot y = b$ gilt.

3.2.4 Folgerung 4

Sei K ein Körper und sei $a \in K$ beliebig. Dann gilt $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

3.2.5 Folgerung 5

Sei K ein Körper und seien $a, b \in K$ beliebig. Dann gilt:

(1) $-(-a) = a$

(2) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

(3) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

3.2.6 Folgerung 6

Sei K ein Körper und seien $a, b, c, d \in K$ mit $b, d \neq 0$. Dann gilt:

(1) $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$

(2) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a \cdot d) + (b \cdot c)}{b \cdot d}$

(3) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

4 Vektorräume

4.1 Punkte und Vektoren

4.1.1 Definition

Ein ***Punkt*** P ist ein Koordinaten n-Tupel von Elementen aus einem Körper K:

$$P \;=\; (p_1, \ldots, p_n)$$

Die Menge aller Punkte P bildet den n dimensionalen Raum K^n.

4.1.2 Definition

Ein ***Vektor*** x ist eine gerichtete Strecke zwischen zwei Punkten P und Q im Raum:

$$x \;=\; \vec{PQ} \;=\; (q_1 - p_1, \ldots, q_n - p_n)$$

Zwei Punkte im Raum K^n legen also eindeutig einen Vektor fest.

4.1.3 Definition

Zwei Vektoren $x = \vec{PQ}$ und $y = \vec{RS}$ sind genau dann gleich, wenn für alle $i = 1, .., n$ gilt:

$$(q_i - p_i) \;=\; (s_i - r_i)$$

4.2 Vektorräume

4.2.1 Definition

Ein Vektorraum über einem Körper K ist eine Menge V, deren Elemente Vektoren mit Einträgen aus dem Körper K sind, zusammen mit einer ***Vektoraddition***

$$" + " : V \times V \to V$$

und einer ***skalaren Multiplikation***

$$" \cdot " : K \times V \to V$$

für die gilt:

(VTR1) Kommutativgesetz: $x + y = y + x$ für alle $x, y \in V$

(VTR2) Assoziativgesetz: $(x + y) + z = x + (y + z)$ für alle $x, y, z \in V$

(VTR3) neutrales Element: es gibt $0 \in V$ mit $x+0 = 0+x = x$ für alle $x \in V$

(VTR4) Inverses: für alle $x \in V$ gibt es ein $y \in V$ mit $x + y = y + x = 0$

(VTR5) Assoziativgesetz: $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ für alle $a, b \in K,\ x \in V$

(VTR6) Für das Einselement $1 \in K$ gilt: $1 \cdot x = x$ für alle $x \in V$

(VTR7) Distributivgesetze: $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ und
$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ für alle $a, b \in K,\ x, y \in V$

Man schreibt dann:

V ist ein Vektorraum über dem Körper K oder kurz V ist ein K-Vektorraum.

4.2.2 Beispiel 1

Sei $V = K^n$ und seien $x = (x_1, .., x_n)$ und $y = (y_1, .., y_n)$ zwei Vektoren.

Mit der üblichen Vektoraddition

$$x + y \;=\; (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda \cdot x \;=\; (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \qquad \text{dabei } \lambda \in K$$

bildet V den Standardvektorraum.

4.2.3 Beispiel 2

Sei M eine beliebige Menge, sei K ein Körper und sei

$$V \;:=\; \{f : M \to K\} \;=\; \mathrm{Abb}(M, K)$$

die Menge aller Abbildungen von M nach K.

Seien $f, g \in V$ und sei $\lambda \in K$. Durch die Addition

$$(f + g)(x) \;=\; f(x) + g(x)$$

und die skalare Multiplikation

$$(\lambda \cdot f)(x) \;=\; \lambda \cdot f(x)$$

wird V zu einem Vektorraum.

4.2.4 Folgerung

Sei V ein Vektorraum.

Dann hat V ganau ein neutrales Element 0 der Addition.

4.2.5 Folgerung

Sei V ein Vektorraum.

Zu jedem $x \in V$ gibt es genau ein $y \in V$, so dass $x + y = 0$ gilt.

4.2.6 Folgerung

Sei V ein Vektorraum.

Zu allen $x, y \in V$ gibt es genau ein $t \in V$, so dass $x + t = y$ gilt.

4.2.7 Folgerung

Sei V ein Vektorraum und sei 0 das neutrale Element der Addition.

Dann gilt für alle $x \in V$

$$0 \cdot x \;=\; x \cdot 0 \;=\; 0.$$

4.2.8 Folgerung

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, sei $x \in V$ und $\lambda \in K$.

Dann gilt

$$(-\lambda) \cdot x \;=\; -(\lambda \cdot x).$$

4.3 Untervektorräume

4.3.1 Definition

Sei V ein beliebiger Vektorraum über einem Körper K.

Eine Teilmenge W von V heißt ***Unterverktorraum*** von V, wenn gilt:

(UVR1) $0 \in W$

(UVR2) für alle $x, y \in W$ gilt $x + y \in W$

(UVR3) für alle $x \in W$ und $\lambda \in K$ gilt $\lambda \cdot x \in W$

4.3.2 Beispiel 1

Sei V ein beliebiger Vektorrraum. Dann sind $\{0\}$ und V selber zwei Untervektorräume von V.

4.3.3 Beispiel 2

Sei $V = \mathbb{R}^3$. Dann sind alle Geraden und Ebenen durch den Nullpunkt Untervektorräume von V.

4.3.4 Beispiel 3

Sei V ein beliebiger Vektorraum und seien $x_1, .., x_r$ Vektoren aus V. Die Menge

$$W := \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_1, .., \lambda_r \in K \right\}$$

ist ein Untervektorraum von V.

W ist der von den Vektoren $x_1, .., x_r$ ***aufgespannte*** Untervektorraum.

4.3.5 Satz 1

Sei V ein Vektorraum und sei W ein Untervektorraum von V.

Dann ist W mit den Verknüpfungen aus V selber ein Vektorraum.

4.3.6 Satz 2

Seien W_1 und W_2 zwei Untervektorräume von V.

Dann ist auch $W_1 \cap W_2$ ein Untervektorraum von V.

4.3.7 Satz 3

Seien W_1 und W_2 zwei Untervektorräume von V.

Dann gibt es einen kleinsten Untervektorraum

$$W := (W_1 + W_2)$$

von V, der W_1 und W_2 enthält.

Beweis

Siehe 23.1.1 auf Seite 206.

4.3.8 Definition

Sei V ein Vektorraum und seien W_1 und W_2 zwei Untervektorräume von V. Gilt

(1) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ und

(2) $W_1 + W_2 = V$,

dann ist V die ***direkte Summe*** von W_1 und W_2.

Schreibweise: $V = W_1 \oplus W_2$.

4.3.9 Satz 4

Ein Vektorraum V ist genau dann die direkte Summe von zwei Untervektorräumen W_1 und W_2, wenn jedes $v \in V$ eindeutig geschrieben werden kann als

$$v \ = \ w_1 + w_2$$

mit $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$.

4.4 Affine Teilräume

4.4.1 Definition

Sei V ein beliebiger Vektorraum über einem Körper K, sei $a \in V$ und sei W ein Untervektorraum von V.

Eine Teilmenge A von V heißt ***affiner Teilraum***, wenn gilt:

$$A \ = \ a + W \ := \ \{a + w \mid w \in W\}$$

Ein affiner Teilraum ist also ein um einen Vektor a verschobener Untervektorraum.

4.4.2 Satz 1

Sei V ein beliebiger Vektorraum.

A ist genau dann ein affiner Teilraum von V, wenn zu je zwei Punkten a und b aus A auch die Gerade durch a und b in A enthalten ist.

4.4.3 Beispiel

Sei V ein beliebiger Vektorraum über einem Körper K und seien $a, b \in V$.

$$A \ := \ a + K(b - a) \ = \ \{a + \lambda(b - a) \mid \lambda \in K\}$$

ist ein affiner Teilraum von V, der die Punkte a und b enthält. A ist genau eine Gerade.

4.5 Aufgaben

4.5.1 Aufgabe 1

Prüfe, welche der folgenden Teilmengen Untervektorräume sind.

(1) $W_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\} \subset \mathbb{R}^2$

(2) $W_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

(3) $W_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y = z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

Lösung Teil 1

Es gilt $(0,0) \neq W_1$. Somit kann W_1 kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ sein.

Lösung Teil 2

Es gilt:

(1) $(0,0) \in W_2$, da $0 + 0 = 0$

(2) Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W_2$. Dann gilt

$$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) \;=\; (x_1, 2y_1) + (x_2, 2y_2) \;=\; 0 + 0 \;=\; 0,$$

somit ist auch $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in W_2$.

(3) Sei $(x,y) \in W_2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lambda x + 2\lambda y \;=\; \lambda(x + 2y) \;=\; \lambda \cdot 0 \;=\; 0,$$

somit ist auch $\lambda(x,y) \in W_2$.

Demnach ist W_2 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

Lösung Teil 3

Es gilt $W_3 = \{(0,0,0)\}$.

Somit ist W_3 der kleinst mögliche Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

4.5.2 Aufgabe 2

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Zeige, dass der Punkt $p = \frac{1}{3}(x + y + z) \in \mathbb{R}^n$ auf der Geraden G durch x und $\frac{1}{2}(y + z)$ liegt.

Lösung

Die Gerade g wird gegeben durch

$$G \;=\; \left\{ \lambda x + (1 - \lambda) \cdot \left(\frac{1}{2}(y + z) \right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es ist nun zu zeigen, dass $p \in G$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}(x+y+z) &= \lambda x + (1-\lambda)\cdot\left(\frac{1}{2}(y+z)\right) \\
\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z &= \lambda x + \frac{1-\lambda}{2}y + \frac{1-\lambda}{2}z
\end{aligned}$$

Durch Komponentenvergleich folgt:

$$\lambda = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \frac{1}{3} = \frac{1-\lambda}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{3} = \frac{1-\lambda}{2}$$

Da $\lambda = \frac{1}{3}$ für alle drei Gleichungen eine wahre Aussage ergibt, liegt der Punkt p auf der Geraden G.

4.5.3 Aufgabe 3

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und sei

$$A \;:=\; \{ax+by+cz \mid a,b,c \in \mathbb{R} \text{ mit } a+b+c=1\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Zeige, das für alle $p, p' \in A$ gilt:

$$\{\lambda p + (1-\lambda)p' \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \;\subset\; A$$

Lösung

Da $p, p' \in A$, gibt es $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$p = ax+by+cz \qquad \text{und} \qquad p' = a'x+b'y+c'z.$$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Addiert man das λ-fache der ersten zu dem $(1-\lambda)$-fachen der zweiten Gleichung, so erhält man:

$$\begin{aligned}
& \lambda p + (1-\lambda)p' \\
=\;& \lambda(ax+by+cz) + (1-\lambda)(a'x+b'y+c'z) \\
=\;& \big(\lambda a + (1-\lambda)a'\big)\,x + \big(\lambda b + (1-\lambda)b'\big)\,y + \big(\lambda c + (1-\lambda)c'\big)\,z \\
=\;& a''x + b''y + c''z
\end{aligned}$$

Damit $\lambda p + (1-\lambda)p' \in A$ gilt, ist nun noch zu zeigen, dass $a''+b''+c''=1$ gilt:

$$\begin{aligned}
a''+b''+c'' &= \big(\lambda a + (1-\lambda)a'\big) + \big(\lambda b + (1-\lambda)b'\big) + \big(\lambda c + (1-\lambda)c'\big) \\
&= \lambda(a+b+c) + (1-\lambda)(a'+b'+c') \\
&= \lambda\cdot 1 + (1-\lambda)\cdot 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

4.5.4 Aufgabe 4

Sei V ein Vektorraum über den reellen Zahlen, seien $x, y \in V$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

Zeige, dass dann gilt:

(1) $(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by$

(2) $(a - b)x = ax - by$

Lösung Teil 1

Es gilt $a(x + y) = ax + ay$ sowie $b(x + y) = bx + by$. Dann gilt auch

$$(a + b)(x + y) \;=\; a(x + y) + b(x + y) \;=\; ax + ay + bx + by.$$

Lösung Teil 2

Es gilt

$$0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-b + b)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-b)x + bx = 0.$$

Demnach gilt auch:

$$(a - b)x \;=\; (a + (-b))x \;=\; ax + (-b)x \;=\; ax - bx$$

4.5.5 Aufgabe 5

Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Prüfe, welche der Teilmengen Untervektorräume von V sind.

(1) $W_1 = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$

(2) $W_2 = \{f \in V \mid f(1) = 0\}$

(3) $W_3 = \{f \in V \mid f(0) = 1\}$

Lösung Teil 1

Sei $f = 0$. Dann gilt $f \in V$ und somit ist W_1 nicht leer.

Seien $f, g \in W_1$ beliebig und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$, also ist auch $(f + g) \in W_1$.

(2) $(\lambda f)(0) = \lambda 0 = 0$, also ist auch $(\lambda f) \in W_1$.

W_1 erfüllt alle nötigen Axiome und ist somit ein Untervektorraum von V.

Lösung Teil 2

Sei $f = 0$. Dann gilt $f \in V$ und somit ist W_2 nicht leer.

Seien $f, g \in W_2$ beliebig und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$, also ist auch $(f+g) \in W_2$.

(2) $(\lambda f)(1) = \lambda 0 = 0$, also ist auch $(\lambda f) \in W_2$.

Auch W_2 ist ein Untervektorraum von V.

Lösung Teil 3

Sei $f = 1$. Dann gilt $f \in V$ und somit ist W_3 nicht leer.

Seien $f, g \in W_3$. Dann gilt:

(1) $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 1 + 1 = 2$, demnach gilt $(f+g) \notin W_3$.

W_3 kann also kein Untervektorraum von V sein.

4.5.6 Aufgabe 6

Seien $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$ zwei Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} W_1 &= \{\mathbb{R}\cdot(1,2,3) + \mathbb{R}\cdot(4,5,6)\} \quad \text{und} \\ W_2 &= \{\mathbb{R}\cdot(4,5,6) + \mathbb{R}\cdot(7,8,9)\}. \end{aligned}$$

Bestimme $W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2$.

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} (4,5,6) &= 0\cdot(1,2,3) + 1\cdot(4,5,6) \quad \text{und} \\ (7,8,9) &= -1\cdot(1,2,3) + 2\cdot(4,5,6). \end{aligned}$$

Demnach gilt $W_1 = W_2$ und es folgt

$$W_1 + W_2 = W_1 \cap W_2 = W_1 = W_2.$$

4.5.7 Aufgabe 7

Sei $V = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Zeige, dass

$$W = \{f \in V \mid f(x) = 2 - f(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\} \subset V$$

ein affiner Teilraum von V ist.

Lösung

Sei $W' = \{f \in V \mid f(x) = -f(-x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}\} \subset V$.

Dann ist $f = 0$ ein Element von W und somit ist $W \neq \emptyset$.

(1) Seien $f, g \in W$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(x) & = & f(x) + g(x) \\ & = & -f(-x) - g(-x) \\ & = & -(f(-x) + g(-x)) \\ & = & -(f+g)(-x) \\ & \Rightarrow & (f+g) \in W \end{array}$$

(2) Sei $f \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} (\lambda f)(x) & = & f(\lambda x) \\ & = & -f(-\lambda x) \\ & = & -\lambda f(-x) \\ & = & -(\lambda f)(x) \\ & \Rightarrow & (\lambda f) \in W \end{array}$$

W' ist somit ein Untervektorraum von V. Sei $a \in V$ mit $a(x) = 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$W \ = \ \{f \in V \mid f(x) = a(x) - f(-x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}\} \ = \ a + W'$$

und somit ist W ein affiner Teilraum von V.

4.5.8 Aufgabe 8

Sei V ein Vektorraum und seien $W, W_1, W_2 \subset V$ Untervektorräume von V.

Zeige, dass

$$(W \cap W_1) + (W \cap W_2) \ \subset \ W \cap (W_1 + W_2)$$

gilt.

Lösung

Seien $w_1 \in (W \cap W_1)$ und $w_2 \in (W \cap W_2)$ beliebig. Dann gilt

$$z \ = \ w_1 + w_2 \ \in \ (W \cap W_1) + (W \cap W_2).$$

Demnach gilt auch

(1) $w_1, w_2 \in W$ und somit $z = w_1 + w_2 \in W$,

(2) $w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2$ und somit $z = w_1 + w_2 \in (W_1 + W_2)$.

Es folgt gerade $z \in W \cap (W_1 + W_2)$.

4.5.9 Aufgabe 9

Sei V der Vektorraum aller reellen Folgen, also

$$V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\ \forall\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Zeige, dass

$$W = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent}\}$$

ein Untervektorraum von V ist.

Lösung

Es müssen die üblichen Axiome geprüft werden:

(1) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1$ eine konvergent Folge. Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W$ und W ist nicht leer.

(2) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Dann ist nach den Rechenregeln für konvergente Folgen auch die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b.$$

Also ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W$.

(3) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und sie $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann ist auch die Folge $(\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a.$$

Also ist $(\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W$.

5 Der Dimensionsbegriff

5.1 Lineare Unabhängigkeit

5.1.1 Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

Ein System von r Vektoren $\{x_1, .., x_r\}$ heißt ***linear unabhängig***, wenn die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \;=\; 0 \qquad \text{mit} \;\; \lambda_i \in K$$

nur für $\lambda_1 = .. = \lambda_r = 0$ erfüllt wird.

Andernfalls ist das System $\{x_1, .., x_r\}$ ***linear abhängig***.

5.1.2 Satz 1

Sei $\{x_1, .., x_r\}$ ein System von linear abhängigen Vektoren.

Dann kann mindestens ein Vektor $x_k \in \{x_1, .., x_r\}$ durch ein Vielfaches der anderen dargestellt werden, das heißt es gilt dann

$$x_k \;=\; \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r} \lambda_i x_i \qquad \text{mit} \;\; \lambda_i \in K.$$

5.1.3 Beispiele

(1) Sei K^n ein Vektorraum. Dann ist das System der ***Standardvektoren***

$$\{e_1 = (1, 0, .., 0),\, e_2 = (0, 1, .., 0),\, \ldots\,,\, e_n = (0, 0, .., 1)\}$$

immer linear unabhängig.

(2) Zwei Vektoren im K^2, die nicht beide auf einer Geraden durch den Nullpunkt liegen, sind linear unabhängig.

(3) Sei K^n ein Vektorraum. Dann ist ein System aus m Vektoren mit $m > n$ stets linear abhängig.

5.1.4 Satz 2

Sei V ein Vektorraum und sei $\{x_1, .., x_r\}$ ein System von linear unabhängigen Vektoren aus V.

Dann ist die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$$

eines Vektors $x \in V$ eindeutig bestimmt.

In dieser Darstellung wird x als so genannte ***Linearkombination*** von $x_1, .., x_r$ dargestellt.

Beweis

Siehe 23.1.2 auf Seite 207.

5.2 Erzeugendensystem

5.2.1 Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

Ein System von r Vektoren $\{x_1, .., x_r\}$ heißt ***Erzeugendensystem*** von V, wenn jeder Vektor $x \in V$ als Linearkombination

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$$

dargestellt werden kann.

5.3 Basis eines Vektorraums

5.3.1 Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

Ein System $\{x_1, .., x_n\}$ mit Vektoren aus V ist eine ***Basis*** von V, wenn gilt:

(1) $\{x_1, .., x_n\}$ ist linear unabhängig

(2) $\{x_1, .., x_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von V

5.3.2 Beispiele

(1) Sei K^n ein Vektorraum. Dann ist das System

$$\{e_1 = (1, 0, .., 0),\ e_2 = (0, 1, .., 0),\ \dots,\ e_n = (0, 0, .., 1)\}$$

die ***Standardbasis*** von K^n.

(2) Sei Π_n der Vektorraum aller Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$. Dann ist das System

$$\{x^n,\, x^{n-1},\, \dots\,,\, x,\, 1\}$$

die ***Standardbasis*** von Π_n.

(3) Sei K^n ein Vektorraum. Dann ist jedes System aus n linear unabhängigen Vektoren stets eine Basis von K^n.

5.4 Steinitzscher Austauschsatz

5.4.1 Steinitzscher Austauschsatz

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

$\{x_1, \dots, x_r\}$ sei ein System linear unabhängiger Vektoren aus V,
$\{y_1, \dots, y_s\}$ sei ein Erzeugendensystem von V.

Dann gibt es stets $\{i_1, .., i_r\} \subset \{1, .., s\}$, so dass das System von Vektoren

$$\{z_1, \dots, z_s\} \;\text{ mit }\; \begin{cases} z_{i_j} := x_j & \text{falls} \quad j \in \{1, .., r\} \\ z_j := y_j & \text{sonst} \end{cases}$$

weiterhin ein Erzeugendensystem von V ist.

Im Erzeugendensystem $\{y_1, \dots, y_s\}$ werden also r Vektoren durch die Vektoren $\{x_1, \dots, x_r\}$ aus dem linear unabhängigen System ausgetauscht.

Beweisidee

Dieser Beweis lässt sich mittels vollständiger Induktion über r führen. Es muss dann jeweis gezeigt werden, dass das neue System $\{z_1, .., z_s\}$ weiterhin ein Erzeugendensystem ist. Die größte Schwierigkeit dabei ist, keine Indize zu verwechseln.

5.4.2 Folgerung

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

Sei $\{x_1, .., x_r\}$ ein System von linear unabhängigen Vektoren aus V und sei $\{y_1, .., y_s\}$ ein Erzeugendensystem von V.

Dann gilt stets $r \;\leq\; s$.

5.4.3 Satz 1

Sei $\{x_1, .., x_n\}$ eine Basis des Vektorraumes V.

Dann hat jede weitere Basis von V ebenfalls n Elemente.

Beweis

Sei $\{x_1, .., x_n\}$ eine gegebene Basis und sei $\{y_1, .., y_m\}$ eine beliebige weitere Basis von V.

Dann ist $\{x_1, .., x_n\}$ auf jeden Fall ein System linear unabhängiger Vektoren und $\{y_1, .., y_m\}$ ein Erzeugendensystem von V. Daher folgt nach dem Steinitzschen Austauschsatz $n \leq m$.

Andersherum gilt natürlich auch $m \leq n$ und es folgt $n = m$. □

5.5 Dimension eines Vektorraums

5.5.1 Definition

Sei V ein beliebiger Vektorraum über einem Körper K.

Existiert eine Basis $\{x_1, .., x_n\}$ von V aus n Vektoren, so heißt V ein n ***dimensionaler*** Vektorraum.

Schreibweise: $\dim(V) = n$.

Existiert keine Basis von V aus endlich vielen Vektoren, so heißt V ***unendlich dimensional***.

Bemerkung

Alle Beweise der folgenden Sätze sind auf den Steinitzschen Austauschsatz zurückzuführen.

5.5.2 Satz 1

Sei V ein n dimensionaler Vektorraum.

Dann ist jedes linear unabhängige System aus n Vektoren auch ein Erzeugendensystem, also eine Basis.

5.5.3 Satz 2

Sei V ein n dimensionaler Vektorraum.

Dann ist jedes Erzeugendensystem von V aus n Vektoren auch linear unabhängig, also eine Basis.

5.5.4 Satz 3

Sei V ein n dimensionaler Vektorraum.

Dann kann jedes linear unabhängige System zu einer Basis ergänzt werden.

5.5.5 Satz 4

Sei V ein n dimensionaler Vektorraum.

Dann ist jedes System mit mehr als n Vektoren stets linear abhängig.

5.5.6 Satz 5

Sei V ein n dimensionaler Vektorraum und sei $W \subset V$ ein m dimensionaler Teilraum von V.

Dann gilt stets
$$\dim(W) \;\le\; \dim(V).$$

5.6 Die Dimensionsformel

5.6.1 Dimensionsformel für Vektorräume

Sei V ein Vektorraum und seien $W_1, W_2 \subset V$ Untervektorräume von V.

Dann gilt die ***Dimensionsformel***

$$\boxed{\dim(W_1) + \dim(W_2) \;=\; \dim(W_1 \cap W_2) \;+\; \dim(W_1 + W_2)} \quad .$$

Bemerkung

Ist W_1 oder W_2 unendlich dimensional, so ist auch auf jeden Fall $W_1 + W_2$ unendlich dimensional.

Beweis

Siehe 23.1.3 auf Seite 207.

5.6.2 Satz 1

Sei V ein Vektorraum und seien $W_1, W_2 \subset V$ Untervektorräume von V.

Gilt
$$\dim(W_1) \;+\; \dim(W_2) \;>\; \dim(V),$$
so ist $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

5.6.3 Definition

Sei V ein Vektorraum und sei $A = a + W$ ein affiner Teilraum von V, das heißt es gilt $a \in V$ und $W \subset V$ ist ein Untervektorraum von V.

Dann gilt
$$\dim(A) \;:=\; \dim(W).$$

5.7 Lösen einer Grundaufgabe

5.7.1 Aufgabe

Gegeben sei der Standardvektorraum $V = K^n$ sowie m Vektoren aus V:

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

mit $a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, .., \alpha_{in})$ für $i = 1, .., m$.

Es soll nun geklärt werden, wie die Dimension, des von S erzeugten Untervektorraumes W ist, also

$$\dim(W) \qquad \text{mit} \qquad W = K \cdot a_1 + \ldots K \cdot a_m.$$

Lösung

Schreibt man die Vektoren $a_1, .., a_n$ zunächst ausführlich untereinander

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n},$$

so erhält man eine so genannte $m \times n$ Matrix (siehe Seite 46). Dabei ist nun die i-te Zeile genau a_i.

Auf diese Matrix können nun folgende Operationen ausgeführt werden, ohne dass sich der Untervektorraum, der durch die Vektoren aus den Zeilen der Matrix aufgespannt wird, verändert:

(1) Vertauschen von Zeilen der Matrix.

(2) Multiplikation einer Zeile mit einem Vielfachen $\lambda \in K$ mit $\lambda \neq 0$.

(3) Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer Anderen.

Durch diese Operationen, kann die Matrix in folgende Form gebracht werden (vergleiche Gaußsches Eliminierungsverfahren):

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc|cc} 0 & \ldots & 0 & \tilde{\alpha}_{11} & \tilde{\alpha}_{12} & \ldots & \tilde{\alpha}_{1s} & \ldots & \tilde{\alpha}_{1t} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \tilde{\alpha}_{22} & \ldots & \tilde{\alpha}_{2s} & \ldots & \tilde{\alpha}_{2t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \tilde{\alpha}_{rr} & \ldots & \tilde{\alpha}_{rt} \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right)_{m \times n}$$

Gilt in dieser Matrix $\alpha_{ii} \neq 0$ für $i = 1, .., r$, so folgt

$$\dim(W) = r.$$

5.8 Aufgaben

5.8.1 Aufgabe 1

Sei $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist ein Polynom}\}$ der Vektorraum aller Polynomfunktionen.

Zeige, dass die Funktionen

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_1(x) &= x \\ f_2(x) &= x^2 \\ &\vdots \\ f_n(x) &= x^n \\ f_{n+1}(x) &= (1-x)^n \end{aligned}$$

linear abhänig in V sind.

Lösung

Die Funktionen $f_0, .., f_n$ sind sicher linear unabhängig. Durch

$$f_{n+1}(x) = (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f_k(x)$$

erkennt man, dass $f_{n+1}(x)$ ein Polynom vom Grad n ist. Somit lässt sich f_{n+1} durch eine Linearkombination von $f_1, .., f_n$ ausdrücken.

$\{f_0, .., f_n, f_{n+1}\}$ sind also linear abhängig.

5.8.2 Aufgabe 2

Berechne die Dimension des Untervektorraums

$$W = \mathbb{R} \cdot (1,2,-1,1) + \mathbb{R} \cdot (2,4,-1,5) + \mathbb{R} \cdot (1,2,1,5) + \mathbb{R} \cdot (2,4,-2,3)$$

von $\mathbb{R}^4$.

Lösung

Es ist also die maximale Anzahl von linear unabhängigen Vektoren aus W gesucht. Unter Anwendung des Gaußschen Eliminierungsverfahrens folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\cdot 2) \\ \\ (\cdot 2) \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-) \\ (-) \\ (-) \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (-) \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (\cdot 4)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (-) \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demnach gilt $\dim(W) = 3$.

5.8.3 Aufgabe 3

Bestimme eine Basis von

$$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + 2d = 0\}.$$

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned} W &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + 2d = 0\} \\ &= \{(-2d, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b, c, d \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Wie man leicht sieht, gilt $\dim(W) = 3$, da $b, c, d \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden können, um ein Vektor aus W zu erhalten.

Es werden also drei linear unabhängige Vektoren aus W gesucht, also ist zum Beispiel

$$\{(0, 1, 0, 0),\ (0, 0, 1, 0),\ (-2, 0, 0, 1)\}$$

eine Basis von W.

5.8.4 Aufgabe 4

Sei $K = \{0, 1\}$ der Körper aus zwei Elementen.

Berechne die Dimension des Untervektorraums

$$\begin{aligned} W &= K \cdot (1, 0, 1, 1, 1) + K \cdot (0, 0, 1, 0, 1) + K \cdot (0, 0, 0, 1, 0) \\ &\quad + K \cdot (1, 0, 1, 1, 1) + K \cdot (1, 0, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

von K^5.

Lösung

Es ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Vektoren aus W gesucht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (-) \\ (-) \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ (-) \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die drei Vektoren $(1,0,1,1,1), (0,0,1,0,1)$ und $(0,0,0,1,0)$ sind also linear unabhängig und erzeugen W.

Es folgt $\dim(W) = 3$.

5.8.5 Aufgabe 5

Sei $V = \mathbb{C}^2$ der zweidimensionale Standardvektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen, es gilt also $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 2$.

Fasse V als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen auf und bestimme die Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(V)$.

Lösung

Sei $\{e_1, .., e_4\}$ gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}.$$

Dann ist $\{e_1, .., e_4\}$ linear unabhängig:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt nur für $\lambda_1 = \ldots = \lambda_4 = 0$.

$\{e_1, .., e_4\}$ ist aber auch ein Erzeugendensystem von V, denn es gilt

$$\left\{ ae_1 + be_2 + a'e_3 + b'e_4 = \begin{pmatrix} a + bi \\ a' + b'i \end{pmatrix} \;\middle|\; a, a', b, b' \in \mathbb{R} \right\} \;=\; V.$$

Somit ist $\{e_1, .., e_4\}$ eine Basis von V und es gilt $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 4$.

6 Lineare Abbildungen

6.1 Definition und Sätze

6.1.1 Definition

Seien V, W zwei Vektorräume über einem Körper K.

Die Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt ***lineare Abbildung***, wenn gilt:

(1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ für alle $a, b \in V$

(2) $\varphi(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot \varphi(a)$ für alle $\lambda \in K$ und $a \in V$

Folgerung

Es folgt sofort $\varphi(0) = 0$.

6.1.2 Satz 1

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum von V.

Dann ist die Bildmenge

$$\varphi(U) \subset W$$

ein Untervektorraum von W.

Beweis

Es sind wieder die drei Axiome eines Untervektorraums zu prüfen, aber diese folgend sofort aus der Definition einer linearen Abbildung:

Seien $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi(U)$ und sei $\lambda \in K$. Dann ist auch

$$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a+b) \in \varphi(U)$$

und analog

$$\lambda\varphi(a) = \varphi(\lambda a) \in \varphi(U).$$

Weiter ist natürlich $0 \in \varphi(U)$. $\square$

6.1.3 Satz 2

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $U \subset W$ ein Untervektorraum von W.

Dann ist die Urbildmenge
$$\varphi^{-1}(U) \ \subset \ V$$
ein Untervektorraum von V.

6.2 Bild und Kern linearer Abbildungen

6.2.1 Definition und Satz

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Dann heißt die Bildmenge
$$\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) \ := \ \varphi(V)}$$
das ***Bild*** von φ und ist ein Untervektorraum von W.

6.2.2 Definition und Satz

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Dann heißt die Menge
$$\boxed{\ker(\varphi) \ := \ \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}}$$
der ***Kern*** von φ und ist ein Untervektorraum von V.

Es gilt also
$$\ker(\varphi) \ = \ \varphi^{-1}(\{0\}).$$

6.2.3 Satz 1

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $\{x_1, .., x_r\}$ ein Erzeugendensystem von V.

Dann ist $\{\varphi(x_1), .., \varphi(x_r)\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Im}(\varphi) \subset W$.

6.2.4 Satz 2

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $\{x_1, .., x_n\}$ eine Basis von V.

Dann wird durch $\{\varphi(x_1), .., \varphi(x_r)\}$ die Abbildung φ eindeutig festgelegt.

6.2.5 Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Dann gilt die ***Dimensionsformel***

$$\boxed{\dim(V) \;=\; \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi))} \quad .$$

Bemerkung

Ist V unendlich dimensional, so ist $\ker(\varphi)$ oder $\mathrm{Im}(\varphi)$ auch unendlich dimensional.

Beweis

Siehe 23.2.1 auf Seite 208.

6.2.6 Beispiel

Sei φ eine lineare Abbildung mit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x,0), \end{aligned}$$

und sei $\{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ (φ ist eine so genannte ***Projektion*** auf $\mathbb{R}$).

Es gilt nun

$$\mathrm{Im}(\varphi) \;=\; K \cdot e_1 \qquad \text{und} \qquad \ker(\varphi) \;=\; K \cdot e_2$$

und auch die Dimensionsformel zeigt

$$\dim(\mathbb{R}^2) \;=\; \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \;=\; 1 + 1 \;=\; 2.$$

6.3 Verknüpfung linearer Abbildungen

6.3.1 Definition und Satz

Seine U, V, W Vektorräume über einem Körper K und seien $\varphi : V \to W$ und $\psi : U \to V$ zwei lineare Abbildungen.

(1) Dann ist die ***Komposition*** (zusammengesetzte Abbildung)

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi : U &\to W \\ x &\mapsto \varphi(\psi(x)) \end{aligned}$$

wieder eine lineare Abbildung.

(2) Dann ist die Addition der Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} \varphi+\psi : U & \to & W \\ x & \mapsto & \varphi(x)+\psi(x) \end{array}$$

wieder eine lineare Abbildung.

(3) Dann ist die skalare Multiplikation einer Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \lambda\varphi : V & \to & W \qquad \text{mit} \quad \lambda \in K \\ x & \mapsto & \lambda\varphi(x) \end{array}$$

wieder eine lineare Abbildung.

Beweis Teil 1

Seien $a, b \in U$ und $\lambda, \mu \in K$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \circ \psi)(\lambda a + \mu b) & = & \varphi(\psi(\lambda a + \mu b)) \\ & = & \varphi(\lambda\psi(a) + \mu\psi(b)) \\ & = & \lambda\varphi(\psi(a)) + \mu\varphi(\psi(b)) \\ & = & \lambda(\varphi \circ \psi)(a) + \mu(\varphi \circ \psi)(b) \end{array}$$

□

6.3.2 Definition

Seien V, W zwei Vektorräume über einem Körper K.

Die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W wird mit

$$\mathrm{Hom}(V, W)$$

bezeichnet.

Eine lineare Abbildung aus $\mathrm{Hom}(V, W)$ heißt ein ***Homomorphismus***.

6.3.3 Satz 1

$\mathrm{Hom}(V, W)$ bildet mit der oben definierten Addition und skalaren Multiplikation einen Vektorraum über K.

6.3.4 Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

Die Menge aller linearen Abbildungen von V nach V wird mit

$$\mathrm{End}(V) \ := \ \mathrm{Hom}(V, V)$$

bezeichnet.

Eine lineare Abbildung aus $\mathrm{End}(V)$ heißt ein ***Endomorphismus***.

6.3.5 Satz 2

End(V) bildet mit der oben definierten Addition sowie der Komposition von Abbildungen einen nicht kommutativen Ring (siehe Seite 139).

Bemerkung

Für $\varphi, \psi, \chi \in \text{End}(V)$ gilt also:

(1) $(\varphi \circ \psi) \circ \chi = \varphi \circ (\psi \circ \chi)$

(2) $\varphi \circ (\psi + \chi) = \varphi \circ \psi + \varphi \circ \chi$

(3) $(\varphi + \psi) \circ \chi = \varphi \circ \chi + \psi \circ \chi$

Weiter gilt für die identische Abbildung

$$\begin{aligned} id : V &\rightarrow V \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

$$\varphi \circ id \;=\; id \circ \varphi \;=\; \varphi,$$

somit gibt es ein neutrales Element für die Komposition von Abbildungen und End(V) bildet mit der Addition und Komposition als Verknüpfungen einen Ring.

Da aber nicht immer $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ gilt, bildet End(V) einen nicht kommutativen Ring.

6.3.6 Definition

Seien V, W zwei Vektorräume über einem Körper K und sei $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$.

Ist φ zusätzlich auch noch bijektiv, so heißt φ ein ***Isomorphismus***.

Man spricht dann auch davon, dass V isomorph ist zu W und schreibt dafür $V \cong W$ oder $V \xrightarrow{\sim} W$.

6.3.7 Satz 3

Sei $\varphi : V \rightarrow W$ ein Isomorphismus.

Dann gibt es eine Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : W \rightarrow V,$$

die ebenfalls linear ist und für die gilt:

(1) $\varphi \circ \varphi^{-1} \;=\; id : W \rightarrow W$

(2) $\varphi^{-1} \circ \varphi \;=\; id : V \rightarrow V$

6.3.8 Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$.

Ist φ zusätzlich auch noch bijektiv, so heißt φ ein ***Automorphismus***.

6.3.9 Definition und Satz

Sei V ein n dimensionaler Vektorraum über einem Körper K.

Die Menge aller Automorphismen von V

$$GL(V) \;=\; GL(n,K) \;=\; \{\varphi : V \to V \mid \varphi \text{ ist ein Automorphismus}\}$$

heißt die ***allgemeine lineare Gruppe*** und ist abgeschlossen gegenüber Produkten und Inversen.

6.3.10 Satz 4

$GL(V)$ bildet mit der oben definierten Komposition von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe (siehe Seite 122).

6.4 Abbildung der Basisvektoren

Der folgende Satz ist eine einfache Folgerung aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen.

6.4.1 Satz 1

Seien V, W zwei endlich dimensionale Vektorräume und sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Dann gilt:

(1) φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker(\varphi) = \{0\}$ gilt.

(2) φ ist genau dann injektiv, wenn jede Basis von V auf ein linear unabhängiges System von W abbildet.

(3) φ ist genau dann surjektiv, wenn jede Basis von V auf ein Erzeugendensystem von W abbildet.

(4) φ ist genau dann bijektiv, wenn jede Basis von V auf eine Basis von W abbildet.

6.4.2 Beispiel 1

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $\dim(V) = \dim(W)$.

Soll gezeigt werden, dass φ ein Isomorphismus ist (also dass φ bijektiv ist), so recht es die Injektivität oder die Surjektivität nachzuweisen.

6.4.3 Beispiel 2

Seien V, W zwei Vektorräume über einem Körper K, sei $\dim(V) = n$ und sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine Basis von V.

Weiter sei $\varphi : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Dann gilt

$$W = \left\{ x \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(e_i) \quad \alpha_i \in K \right\}.$$

6.5 Aufgaben

6.5.1 Aufgabe 1

Prüfe, welche der folgenden Abbildungen linear sind.

(1) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y - 1, y)$

(2) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (y, x, x + y)$

Lösung Teil 1

Es gilt:

(1) Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2 - 1, y_1 + y_2) \\
&= (x_1 + y_1 - 1, y_1) + (x_2 + y_2, y_2) \\
&\neq \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2)
\end{aligned}$$

Demnach ist φ nicht linear.

Lösung Teil 2

Es gilt:

(1) Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (y_1 + y_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \\
&= (y_1, x_1, x_1 + y_1) + (y_2, x_2, x_2 + y_2) \\
&= \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2)
\end{aligned}$$

(2) Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda(x,y)) &= \varphi(\lambda x, \lambda y)\\ &= (\lambda y, \lambda x, \lambda x + \lambda y)\\ &= \lambda(y, x, x+y)\\ &= \lambda\varphi(x,y)\end{aligned}$$

Demnach ist φ linear.

7 Linearformen

7.1 Definitionen und Sätze

7.1.1 Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

Eine Abbildung f von V nach K

$$f : V \to K$$

ist eine ***Linearform*** von V.

Der Vektorraum $\mathrm{Hom}(V, K)$ aller Linearformen von V nach K heißt der ***Dualraum*** von V.

Schreibweise:

$$V^* \ := \ \mathrm{Hom}(V, K)$$

7.1.2 Beispiel

Sei $V = K^n$ und seien $a_1, .., a_n \in K$ beliebig.

Dann wird eine Linearform durch

$$f(x_1, .., x_n) \ = \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

gegeben.

7.1.3 Satz 1

Sei V ein n dimensionaler Vektorraum und sei $f : V \to K$ eine beliebige Linearform mit $f \neq 0$.

Dann gilt

$$\dim(\ker(f)) \ = \ n - 1.$$

7.1.4 Definition

Sei $f : V \to K$ eine Linearform, also $f \in V^*$, und sei $v \in V$.

Für $f(v)$ schreibt man dann auch

$$\langle v, f \rangle \;:=\; f(v).$$

7.1.5 Definition und Satz

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine Basis von V.

Seien $f_1, .., f_n \in V^*$ mit

$$f_i(e_j) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

oder anders geschrieben (siehe 8.3.3 auf Seite 51)

$$f_i(e_j) \;=\; \delta_{ij} \qquad \text{für} \quad i, j = 1, .., n.$$

Dann ist $\{f_1, .., f_n\}$ die zu $\{e_1, .., e_n\}$ gehörige Basis, die so genannte ***duale Basis***, von V^*.

7.1.6 Satz 2

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum.

Dann gilt aufgrund der dualen Basis gerade

$$\dim(V) \;=\; \dim(V^*).$$

7.1.7 Definition

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum, sei $W \subset V$ ein Untervektorraum von V und sei $U \subset V^*$ ein Untervektorraum von V^*.

Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} W^\perp & := & \{f \in V^* \mid f(w) = 0 \text{ für alle } w \in W\} \;\subset\; V^* \\ U^\perp & := & \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ für alle } f \in U\} \;\subset\; V \end{array}$$

7.1.8 Satz 3

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum, sei $W \subset V$ ein Untervektorraum von V und sei $U \subset V^*$ ein Untervektorraum von V^*.

Dann gilt:

(1) $W^\perp$ ist ein Untervektorraum von V^*

(2) $U^\perp$ ist ein Untervektorraum von V

(3) $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$

(4) $\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U)$

(5) $(W^\perp)^\perp = W$

(6) $(U^\perp)^\perp = U$

Beweisskizze

Dass $W^\perp$ und $U^\perp$ wieder Untervektorräume sind, zeigt man leicht durch das Prüfen der drei Axiome.

Sei nun $\{e_1, .., e_r\}$ eine Basis von W, die zu einer Basis $\{e_1, .., e_r, .., e_n\}$ von V ergänzt wird. Sei weiter $\{f_1, .., f_n\}$ die dazugehörige duale Basis von V^*. Dann lässt sich zeigen, dass $\{f_{r+1}, .., f_n\}$ eine Basis von $W^\perp$ ist. Somit folgen nun leicht die Punkte **(1)** bis **(4)**.

7.1.9 Satz 4

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $(V^*)^*$ der so genannte ***Bidualraum***.

Dann gitb es eine bijektive lineare Abbildung ψ mit

$$\begin{array}{rclrcl} \psi : V & \to & (V^*)^* & & & \\ v & \mapsto & \varphi : V^* & \to & K & \\ & & f & \mapsto & f(v). & \end{array}$$

Bemerkung

V ist also isomorph zu $(V^*)^*$, aber demnach auch zu V^*, denn es gilt $\dim(V) = \dim(V^*)$.

Anders als ein Isomorphismus von V nach V^* wird ein Isomorphismus von V nach $(V^*)^*$ ohne Festlegung einer Basis gegeben.

7.2 Aufgaben

7.2.1 Aufgabe 1

Seien V, W endlich dimensionale Vektorräume über einem Körper K und sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Sei weiter

$$\begin{array}{rcl} \varphi^* : W^* & \to & V^* \\ f & \mapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

die von φ induzierte lineare Abbildung.

(1) Sei φ surjektiv. Zeige, dass dann φ^* injektiv ist.

(2) Sei φ injektiv. Zeige, dass dann φ^* surjektiv ist.

Lösung Teil 1

Sei $f \in \ker(\varphi^*)$. Dann ist $\varphi^*(f) = f \circ \varphi : V \to K$ die Nullabbildung, d.h. es gilt für alle $v \in V$

$$f(\varphi(v)) \ = \ 0.$$

Sei $w \in W$ beliebig. Da φ surjektiv ist, gibt es dann ein $v \in V$ mit $\varphi(v) = w$ und es gilt für dieses v

$$f(w) \ = \ f(\varphi(v)) \ = \ 0.$$

Dies gilt aber für alle $w \in W$, daher besteht der Kern von φ^* nur aus dem Nullvektor, also ist φ^* injektiv.

Lösung Teil 2

Sei $g \in V^*$ beliebig, sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine Basis von V und sei $f_j = \varphi(e_j)$ für $j = 1, .., n$.

Da φ^* injektiv ist, sind $f_1, .., f_n \in W$ linear unabhängig, also können diese Vektoren zu einer Basis

$$\{f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_m\}$$

von W ergänzt werden.

Sei $f : W \to K$ die lineare Abbildung, die gegeben wird durch

$$f(f_j) \ = \ \begin{cases} g(e_j) & \text{für} \quad j = 1, .., n \\ 0 & \text{für} \quad j > n. \end{cases}$$

Dann gilt

$$f(\varphi(e_j)) \ = \ f(f_j) \ = \ g(e_j) \qquad \text{für alle } \ 1 \le j \le m$$

und somit auch $f \circ \varphi = g$.

Demnach ist f ein Element von W^* mit $\varphi^*(f) = g$, also ist φ^* surjektiv.

8 Matrizen

8.1 Lineare Abbildungen und Matrizen

8.1.1 Rechnerische Beschreibung von linearen Abbildungen

Will man eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \to W$$

zwischen den Vektorräumen V und W über einem Körper K rechnerisch konkret beschreiben, geht man dabei folgendermaßen vor:

(1) Fixieren einer Basis $\{e_1, .., e_n\}$ von V.

(2) Fixieren einer Basis $\{f_1, .., f_m\}$ von W.

(3) Betrachten von $\varphi(e_j) \in W$ für $j = 1, .., n$.

(4) Beschreibung von $\varphi(e_j)$ durch die Basis von W:

$$\varphi(e_j) \;=\; \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \quad \text{für} \;\; j = 1, .., n$$

Dabei sind alle Koeffizienten a_{ij} Elemente von K – sie lassen sich nun in folgendem rechteckigen Schema darstellen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad = \quad (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

Ein solches Schema heißt eine ***Matrix*** $\mathbb{M}$ mit Einträgen aus dem Körper K.

Da bei der Darstellung einer linearen Abbildung als Matrix die zuvor fixierten Basen über die Einträge der Matrix entscheiden, schreibt man auch:

$$\mathbb{M}(\varphi, \{e_1, .., e_n\}, \{f_1, .., f_m\}) \;=\; (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \;=\; A$$

A ist also die Matrix der linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ bezüglich der Basen $\{e_1, .., e_n\}$ und $\{f_1, .., f_m\}$.

Merkregel

Die Komponenten des Bildes $\varphi(e_j)$ des j ten Basisvektors e_j findet man in der j ten Spalte der zugehörigen Matrix.

8.1.2 Von der Matrix zur linearen Abbildungen

Sei nun andersherum eine Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ sowie die Basen $\{e_1, .., e_n\}$ von V und $\{f_1, .., f_m\}$ von W gegeben. Es soll nun die lineare Abbildung

$$\varphi : V \to W$$

rekonstruiert werden.

Sei also $x = (x_1, .., x_n) \in V$ beliebig mit

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j.$$

Dann gilt nach Definition:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) f_i = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i
\end{aligned}$$

mit $c_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ für $i = 1, .., m$.

Man erkennt also nochmal: die lineare Abbildung φ wird durch die Darstellung der Bildvektoren $\varphi(e_1), .., \varphi(e_n)$ bezüglich der Basen $\{e_1, .., e_n\}$ und $\{f_1, .., f_m\}$ eindeutig festgelegt.

8.1.3 Definition und Satz

Die Menge der $m \times n$ Matrizen mit Einträgen aus einem Körper K wird mit

$$\mathbb{M}(m \times n,\, K)$$

bezeichnet.

$\mathbb{M}(m \times n,\, K)$ bildet einen K-Vektorraum und hat die Dimension $m \cdot n$.

8.1.4 Satz 1

Seien V, W zwei Vektorräume über einem Körper K, sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine Basis von V und sei $\{f_1, .., f_m\}$ eine Basis von W.

Dann definiert die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Hom}_K(V, W) &\rightarrow \mathbb{M}(m \times n,\, K) \\ \varphi &\mapsto \mathbb{M}(\varphi,\, \{e_1, .., e_n\},\, \{f_1, .., f_m\}) \end{aligned}$$

einen Isomorphismus von K-Vektorräumen.

8.2 Rechnen mit Matrizen

8.2.1 Addition

Seien $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathbb{M}(m \times n,\, K)$.

Dann gilt

$$A + B \;:=\; (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \qquad \text{mit} \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

8.2.2 Skalare Multiplikation

Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathbb{M}(m \times n,\, K)$ und sei $\lambda \in K$.

Dann gilt

$$\lambda \cdot A \;:=\; (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}.$$

8.2.3 Multiplikation

Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathbb{M}(m \times n,\, K)$, $B = (b_{jk})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le r}} \in \mathbb{M}(n \times r,\, K)$.

Dann gilt

$$A \cdot B \;:=\; C \;=\; (c_{ik})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le k \le r}} \in \mathbb{M}(m \times r,\, K) \qquad \text{mit} \qquad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Um den ik ten Eintrag des Produkts von A und B zu erhalten, multiplizert man also komponentenweise die i-te Zeile von A mit der k-ten Spalte von B.

Herleitung

Seien V, W, U Vektorräume über einem Körper K, sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine Basis von V, sei $\{f_1, .., f_m\}$ eine Basis von W und sei $\{g_1, .., g_r\}$ eine Basis von U.

Seien $\varphi : V \to W$ und $\psi : U \to V$ zwei lineare Abbildungen mit den zugehörigen Matrizen

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} = \mathbb{M}(\varphi, \{e_1,..,e_n\}, \{f_1,..,f_m\}) \qquad \text{und} \\ B &= (b_{jk})_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq k\leq r}} = \mathbb{M}(\psi, \{g_1,..,g_r\}, \{e_1,..,e_n\}). \end{aligned}$$

Da sich diese beiden Abbildungen nun zu $\varphi\circ\psi$ verknüpfen lassen, stellt sich die Fragen, ob man auch die zugehörigen Matrizen verknüpfen, in diesem Fall also multiplizieren, kann.

Es gilt

$$\psi(g_k) = \sum_{j=1}^{k} b_{jk} e_j \qquad \text{für} \quad k = 1,..,r$$

und es folgt

$$\begin{aligned} (\varphi\circ\psi)(g_k) &= \varphi(\psi(g_k)) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{k} b_{jk} e_j\right) = \sum_{j=1}^{k} b_{jk}\varphi(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} b_{jk}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) f_i = \sum_{i=1}^{m} c_{ik} f_i \end{aligned}$$

mit $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \in K$.

8.2.4 Beispiel

Seien A und B zwei 2×2 Matrizen mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 3 & 1\cdot 1+2\cdot 0 \\ 3\cdot 2+1\cdot 3 & 3\cdot 1+1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 3 & 2\cdot 2+1\cdot 1 \\ 3\cdot 1+0\cdot 3 & 3\cdot 2+0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Das Beispiel zeigt, dass die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist.

8.2.5 Rechenregeln

Haben die Matrzien A, B, C die richtigen Formate, dann gelten folgende Rechenregeln:

(1) $A + B = B + A$

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3) $A(B + C) = AB + AC$

(4) $(A + B)C = AC + BC$

(5) $(AB)C = A(BC)$

8.3 Weitere Definitionen und Sätze

8.3.1 Definition

Für den Vektorraum $\mathbb{M}(n \times n,\, K)$ aller $n \times n$ Matrizen schreibt man auch kurz

$$\mathbb{M}(n,\, K) \;:=\; \mathbb{M}(n \times n,\, K).$$

8.3.2 Satz 1

Sei V ein beliebiger Vektorraum über einem Körper K und sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine Basis von V.

Dann definiert die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathrm{End}_K(V) & \to & \mathbb{M}(n,\, K) \\ \varphi & \mapsto & \mathbb{M}(\varphi,\, \{e_1, .., e_n\},\, \{e_1, .., e_n\}) \end{array}$$

einen Isomorphismus von K-Vektorräumen mit Ringstruktur, d.h. einen Isomorphismus, der Addition und Multiplikation respektiert (siehe Kapitel 18 ab Seite 139).

Die Matrix

$$E_n \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist dabei das neutrale Element der Multiplikation von $\mathbb{M}(n,\, K)$ und heißt die $n \times n$ ***Einheitsmatrix***.

8.3.3 Definition

Das ***Kroneckersymbol*** δ_{ij} ist ein Symbol mit zwei Indizes, für das gilt:

$$\delta_{ij} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i=j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

Es gilt also zum Beispiel

$$E_n \;=\; (\delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}.$$

8.3.4 Normalformenproblem

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = r$.

Dann gilt bei einer geeigneten Wahl der Basis $\{e_1,..,e_n\}$ von V und der Basis $\{f_1,..,f_m\}$ von W

$$\mathbb{M}(\varphi,\, \{e_1,..,e_n\},\, \{f_1,..,f_m\}) \;=\; \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind 0 Blockmatrizen und E_r ist die $r \times r$ Einheitsmatrix.

Herleitung

Sei $\varphi : V \to W$ eine beliebige lineare Abbildung.

Sei $\{e_1,..,e_n\}$ eine Basis von V, dabei $\{e_{r+1},..,e_n\}$ eine Basis von $\ker(\varphi)$.

Demnach ist $\{\varphi(e_1),..,\varphi(e_r)\}$ eine Basis von $\mathrm{Im}(\varphi) \subset W$, die beliebig zu einer Basis $\{f_1,..,f_m\}$ von W ergänzt werden kann.

Es gilt also $f_1 = \varphi(e_1),..,f_r = \varphi(e_r)$.

Daraus ergibt sich sofort

$$\mathbb{M}(\varphi,\, \{e_1,..,e_n\},\, \{f_1,..,f_m\}) \;=\; \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dabei sind wieder 0 Blockmatrizen und E_r ist die $r \times r$ Einheitsmatrix.

Ist speziell $\varphi : V \to W$ ein Isomorphismus und gilt für die Basis $\{f_1,..,f_n\}$ von W gerade $f_i = \varphi(e_i)$ für $i = 1,..,n$, so folgt sofort

$$\mathbb{M}(\varphi,\, \{e_1,..,e_n\},\, \{f_1,..,f_n\}) \;=\; E_n.$$

8.4 Transformationsformel

8.4.1 Satz (Transformationsformel)

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung, seien $\{e_1,..,e_n\}$ und $\{e'_1,..,e'_n\}$ Basen von V und seien $\{f_1,..,f_m\}$ und $\{f'_1,..,f'_m\}$ Basen von W.

Sei

$$\begin{aligned} A &:= \mathbb{M}(\varphi, \{e_1,..,e_n\}, \{f_1,..,f_m\}) \qquad \text{und} \\ A' &:= \mathbb{M}(\varphi, \{e'_1,..,e'_n\}, \{f'_1,..,f'_m\}) \end{aligned}$$

sowie für die identischen Abbildungen id_W und id_V

$$\begin{aligned} C &:= \mathbb{M}(id_V, \{e_1,..,e_n\}, \{e'_1,..,e'_n\}) \qquad \text{und} \\ B &:= \mathbb{M}(id_W, \{f_1,..,f_m\}, \{f'_1,..,f'_m\}). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$A' = B \cdot A \cdot C^{-1}.$$

Ist speziell $\varphi : V \to V$, so gilt

$$A' = C \cdot A \cdot C^{-1}.$$

Diagramm

Folgendes Diagramm soll die Basistransformation verdeutlichen:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\text{A}} & W & & \text{alte Basis} \\ \text{C}\downarrow & & \downarrow\text{B} & & \\ V & \xrightarrow{\text{A'}} & W & & \text{neue Basis} \end{array}$$

Herleitung

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung, seien $\{e_1,..,e_n\}$ und $\{e'_1,..,e'_n\}$ Basen von V und seien $\{f_1,..,f_m\}$ und $\{f'_1,..,f'_m\}$ Basen von W, genau wie im Satz oben.

Betrachtet man die identisch Abbildung

$$\begin{aligned} id_V : V &\to V \\ x &\mapsto x, \end{aligned}$$

so lassen sich zwei (in der Regel) unterschiedlich Matrizen

$$\begin{aligned} C &:= \mathbb{M}(id_V, \{e_1,..,e_n\}, \{e'_1,..,e'_n\}) \qquad \text{und} \\ D &:= \mathbb{M}(id_V, \{e'_1,..,e'_n\}, \{e_1,..,e_n\}) \end{aligned}$$

bilden.

Es gilt nun

$$\begin{aligned} C \cdot D &= \mathbb{M}(id_V, \{e'_1,..,e'_n\}, \{e'_1,..,e'_n\}) = E_n \qquad \text{sowie} \\ D \cdot C &= \mathbb{M}(id_V, \{e_1,..,e_n\}, \{e_1,..,e_n\}) = E_n \end{aligned}$$

und demnach folgt

$$D \; = \; C^{-1}.$$

Betrachtet man nun die Matrix zu

$$\{e'_1, .., e'_n\} \quad \xrightarrow{\varphi} \quad \{f'_1, .., f'_m\},$$

so erhält man

$$A' \; = \; \mathbb{M}(\varphi, \, \{e'_1, .., e'_n\}, \, \{f'_1, .., f'_m\}).$$

Betrachtet man nun die Matrizen zu

$$\{e'_1, .., e'_n\} \quad \xrightarrow{id_V} \quad \{e_1, .., e_n\} \quad \xrightarrow{\varphi} \quad \{f_1, .., f_m\} \quad \xrightarrow{id_W} \quad \{f'_1, .., f'_m\},$$

so erhält man

$$\begin{aligned} C^{-1} \; &= \; \mathbb{M}(id_V, \, \{e'_1, .., e'_n\}, \, \{e_1, .., e_m\}), \\ A \; &= \; \mathbb{M}(\varphi, \, \{e_1, .., e_n\}, \, \{f_1, .., f_m\}), \\ B \; &= \; \mathbb{M}(id_W, \, \{f_1, .., f_m\}, \, \{f'_1, .., f'_m\}). \end{aligned}$$

Man erhält nun

$$A' \; = \; B \cdot A \cdot C^{-1}.$$

8.4.2 Beispiel 1

Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(x, y, z) = (x + y, y + z)$.

Bestimme die Matrix A von φ bezüglich der Standardbasen $\{e_1, .., e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\{f_1, f_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ und führe eine Basistransformation zu den neuen Basen

$$\{e'_1 = (1, 1, 1), e'_2 = (0, 1, 1), e'_3 = (0, 0, 1)\} \quad \text{bzw.} \quad \{f'_1 = (1, 1), f'_2 = (0, 1)\}$$

des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ durch.

Lösung

Zunächst einmal gilt wie üblich

$$A \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} C \; &= \; \mathbb{M}(id_{\mathbb{R}^3}, \, \{e_1, .., e_3\}, \, \{e'_1, .., e'_3\}) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ B \; &= \; \mathbb{M}(id_{\mathbb{R}^2}, \, \{f_1, f_2\}, \, \{f'_1, f'_2\}) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Durch das Invertieren der Matrix C (siehe dazu 8.6 ab Seite 57) folgt

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch die Transformationsformel ergibt sich nun gerade die Matrix A' von φ bezüglich der neuen Basen:

$$\begin{aligned} A' = B \cdot A \cdot C^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Berechnet man nun als Probe die Matrix A' direkt über die neuen Basen, so erhält man dasselbe Ergebnis.

8.4.3 Beispiel 2

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(x, y) = (x, x + y)$.

Bestimme die Matrix A von φ bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ und führe eine Basistransformation zu der neuen Basis

$$\{e'_1 = (1, 2),\ e'_2 = (3, 4)\}$$

des $\mathbb{R}^2$ durch.

Lösung

Zunächst einmal gilt für die Matrix A gerade

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter erhält man

$$C = \mathbb{M}(id_{\mathbb{R}^2},\ \{e_1, e_2\},\ \{e'_1, e'_2\}) = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Durch das Invertieren der Matrix C (siehe dazu 8.6 ab Seite 57) folgt

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsformel ergibt nun gerade die geforderte Matrix A' von φ bezüglich der neuen Basis:

$$\begin{aligned} A' = C \cdot A \cdot C^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8.5 Rang einer Matrix

8.5.1 Definition

Der ***Zeilenrang*** einer Matrix $M \in \mathbb{M}(m \times n, K)$ ist die Dimension des von den Zeilen

$$\{(a_{11}, .., a_{1n}), (a_{21}, .., a_{2n}), \dots, (a_{m1}, .., a_{mn})\}$$

aufgespannten Untervektorraums oder anders die maximale Anzahl eines linear unabhängigen Teilsystems.

Schreibweise: Zeilenrang(M).

Der ***Spaltenrang*** einer Matrix $M \in \mathbb{M}(m \times n, K)$ ist die Dimension des von den Spalten

$$\{(a_{11}, .., a_{m1}), (a_{12}, .., a_{m2}), \dots, (a_{1n}, .., a_{mn})\}$$

aufgespannten Untervektorraums oder anders die maximale Anzahl eines linear unabhängigen Teilsystems.

Schreibweise: Spaltenrang(M).

8.5.2 Satz 1

Sei M eine beliebige $m \times n$ Matrix.

Dann gilt stets

$$\text{Zeilenrang}(M) = \text{Spaltenrang}(M).$$

Beweisskizze

Es ist offenbar Zeilenrang$(M) =$ Spaltenrang(M^t), dabei ist M^t die transponierte Matrix von M.

Durch Basisänderung der Matrix M erhält man eine Matrix M'. Es gilt dann Zeilenrang$(M) =$ Zeilenrang(M').

Durch geschickte Wahl der Basen erhält man nun M' in Normalenform und die Behauptung ist dann sofort aus der Matrix M' zu erkennen.

8.5.3 Definition

Es gilt für den ***Rang*** eine beliebige $m \times n$ Matrix M

$$\operatorname{rang}(M) \;:=\; \text{Zeilenrang}(M) \;=\; \text{Spaltenrang}(M).$$

8.5.4 Satz 2

Sei $M = \mathbb{M}(\varphi, \{e_1, .., e_n\}, \{f_1, .., f_m\})$ eine beliebige $m \times n$ Matrix.

Dann ist der Rang der Matrix M unabhängig von der Wahl der Basen $\{e_1, .., e_n\}$ und $\{f_1, .., f_m\}$.

8.5.5 Satz 3

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Dann ist die Dimension des Bildes $\varphi(V) \subset W$ gerade der Rang der zu φ gehörigen Matrix.

8.5.6 Satz 4

Sei $M \in \mathbb{M}(m \times n, K)$ eine beliebige Matrix.

Dann ändern folgende elementare Zeilen- bzw. Spaltenumformungen den Rang der Matrix M nicht:

(1) Vertauschen von Zeilen bzw. Spalten.

(2) Multiplikation einer Zeile bzw. Spalte mit einem Vielfachen $0 \neq \lambda \in K$.

(3) Addieren eines Vielfachen einer Zeile bzw. Spalte zu einer Anderen.

8.5.7 Beispiel 1

Sei

$$M \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\cdot 2) \\ \\ \\ \end{matrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (+) \\ \\ \end{matrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 4 & 9 & 7 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-) \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 4 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\cdot 2) \\ \\ \\ \end{matrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 4 & 16 & 8 \\ 4 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-) \\ \\ \end{matrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 4 & 16 & 8 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man erhält also ein System von 2 linear unabhängingen Zeilenvektoren, daher gilt

$$\operatorname{rang}(M) \;=\; 2.$$

8.5.8 Beispiel 2

Eine $m \times n$ Matrix M der Form

$$M \;=\; \left(\begin{array}{ccc|cccc|cc}
0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1t} \\
0 & \dots & 0 & 0 & a_{22} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2t} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rt} \\
\hline
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0
\end{array}\right)$$

mit $r \leq t$ und $a_{ii} \neq 0$ für $i = 1, .., r$ besteht aus r linear unabhängingen Zeilenvektoren, daher gilt

$$\operatorname{rang}(M) \;=\; r.$$

8.6 Invertierbare Matrizen

8.6.1 Definition

Eine $n \times n$ Matrix M heißt genau dann ***invertierbar***, wenn es eine $n \times n$ Matrix M^{-1} gibt, so dass

$$M \cdot M^{-1} \;=\; E_n$$

gilt. M^{-1} ist dann das Inverse zu M.

8.6.2 Satz 1

Ist die Matrix M invertierbar, so ist die zu M inverse Matrix M^{-1} eindeutig bestimmt.

8.6.3 Satz 2

Sei M eine $n \times n$ Matrix.

Gilt $\operatorname{rang}(M) < n$, so kann M nicht invertierbar sein.

8.6.4 Methode zum invertieren einer Matrix

Sei A eine $n \times n$ Matrix mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Um das Inverse von A zu berechnen, schreibt man zunächst A und die $n \times n$ Einheitsmatrix in einer Matriz nebeneinander:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Nun versucht man mit Hilfe der elementaren Zeilenumformungen

(1) Vertauschen von Zeilen,

(2) Multiplikation einer Zeile mit einem Vielfachen,

(3) Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer Anderen

den linken Teil der Matrix in die $n \times n$ Einheitsmatrix E_n umzuformen.

Da jeder Schritt auf der gesamten Matrix durchgefürt wird, steht am Ende in dem rechten Teil der Matrix gerade die gesuchte Matrix A^{-1}.

8.6.5 Beispiel

Berechne das Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 1 & -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Das Inverse zu A ist also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Probe

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

8.7 Aufgaben

8.7.1 Aufgabe 1

Sei die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^3 \\ (a,b,c,d) &\mapsto (a+b, b+c, c+d) \end{aligned}$$

gegeben. Bestimme die Matrix M von φ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^3$.

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(1,0,0,0) &= (1,0,0) \\ \varphi(0,1,0,0) &= (1,1,0) \\ \varphi(0,0,1,0) &= (0,1,1) \\ \varphi(0,0,0,1) &= (0,0,1) \end{aligned}$$

Es ergibt sich also die gesuchte Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.7.2 Aufgabe 2

Sei V ein n dimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit der Basis $\{e_1, .., e_n\}$ und sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, die durch

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} e_{i-1} & \text{für} \quad i = 2, .., n \\ \overline{0} & \text{für} \quad i = 1 \end{cases}$$

gegeben wird.

Berechne die Matrix $A = \mathbb{M}(\varphi, \{e_1, .., e_n\}, \{e_1, .., e_n\})$ und berechne A^k.

Lösung

Wir erhalten als Bilder der Einheisvektoren

$$\begin{aligned} \varphi(e_0) &= (0, 0, \ldots, 0, 0), \\ \varphi(e_1) &= (1, 0, \ldots, 0, 0), \\ &\vdots \\ \varphi(e_n) &= (0, 0, \ldots, 1, 0). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich also folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Matrix A^k gilt

$$A^k = \mathbb{M}(\varphi^k, \{e_1, .., e_n\}, \{e_1, .., e_n\}).$$

Nach der Definition von φ gilt:

$$\varphi^k(e_i) = \begin{cases} e_{i-k} & \text{für} \quad k + 1 \leq i \leq n \\ \overline{0} & \text{für} \quad i \leq k \end{cases}$$

Analog zu dem ersten Aufgabenteil erhalten wir die Blockmatrix

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dabei ist E_{n-k} die $(n - k) \times (n - k)$ Einheitsmatrix und 0 entsprechende Nullmatrizen.

Für $k \geq n$ ist A^k also die Nullmatrix.

8.7.3 Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei

$$V \;=\; \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ mit } a_0, .., a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

der reelle Vektorraum aller Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$ und sei

$$\left\{ e_0 = 1,\, e_1 = x,\, e_2 = x^2,\, \ldots,\, e_n = x^n \right\}$$

die Standardbasis von V.

Sei $\varphi : V \to V$ diejenige Abbildung, die jedem Polynom auf seine Ableitung abbildet, also

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V & \to & V \\ f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} = f'(x) \end{array}$$

(1) Zeige, dass φ eine lineare Abbildung ist.

(2) Bestimme den Kern von φ.

(3) Berechne die Matrix $A = \mathbb{M}(\varphi,\, \{e_1, .., e_n\},\, \{e_1, .., e_n\})$.

Lösung Teil 1

(1) Seien $a(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, $b(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i \in V$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(a(x) + b(x)) \;&=\; \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right) \\ &=\; \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i \right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} i(a_i + b_i) x^{i-1} \\ &=\; \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} i b_i x^{i-1} \;=\; \varphi(a(x)) + \varphi(b(x)) \end{aligned}$$

(2) Sei $a(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \cdot a(x)) \;&=\; \varphi\left(\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right) \;=\; \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) x^i \right) \\ &=\; \sum_{i=1}^{n} i(\lambda a_i) x^{i-1} \;=\; \lambda \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} \;=\; \lambda \cdot \varphi(a(x)) \end{aligned}$$

Demnach ist φ eine lineare Abbildung.

Lösung Teil 2

Sei $a(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in V$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a(x) \in \ker(\varphi) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(a(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a'(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad a_i = 0 \quad \text{für alle} \quad i > 1 \\ &\Leftrightarrow \quad a(x) = a_0 \end{aligned}$$

Der Kern von φ ist also der 1 dimensionale Untervektorraum aller konstanten Funktionen $a(x) = a_0$.

Lösung Teil 3

Wir erhalten als Bilder der Einheisvektoren

$$\begin{aligned} \varphi(e_0) = \varphi(1) \quad &= \quad (0, 0, \ldots, 0, 0), \\ \varphi(e_1) = \varphi(x) \quad &= \quad (1, 0, \ldots, 0, 0), \\ \varphi(e_2) = \varphi(x^2) \quad &= \quad (0, 2, \ldots, 0, 0), \\ &\vdots \\ \varphi(e_n) = \varphi(x^n) \quad &= \quad (0, 0, \ldots, n, 0). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.7.4 Aufgabe 4

Sei $k \in \mathbb{R}$ beliebig. Berechne die inverse Matrix zu $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung

Für die invertierte Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + kc &= 1 \\ b + kd &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= 1, \end{aligned}$$

und es folgt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.7.5 Aufgabe 5

Sei $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(2, \mathbb{R})$ eine beliebige 2×2 Matrix.

Zeige, dass dann

$$X^2 - \mathrm{Sp}(X) \cdot X + \det(X) \cdot E_2 = 0$$

gilt. Dabei ist $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(2, \mathbb{R})$, $\det(X) = ad - bc \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{Sp}(X) = a + d \in \mathbb{R}$.

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned} & X^2 - \mathrm{Sp}(X) \cdot X + \det(X) \cdot E_2 \\ = & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + ad \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ac + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

8.7.6 Aufgabe 6

Sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{M}(n, K)$ eine $n \times n$ Matrix.

$$\mathrm{Sp(A)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in K$$

bezeichnet die so genannte ***Spur*** der Matrix A.

Sei Sp diejenige Abbildung, die jeder $n \times n$ Matrix ihre Spur zuordnet, also

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp} : \mathbb{M}(n, K) &\to K \\ A &\mapsto \mathrm{Sp}(A). \end{aligned}$$

(1) Zeige, dass Sp eine K-lineare Abbildung ist.

(2) Zeige, dass für alle $A, B \in \mathbb{M}(n, K)$

$$\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$$

gilt.

(3) Zeige, dass für alle invertierbaren Matrizen $X \in \mathbb{M}(n, K)$

$$\mathrm{Sp}(XAX^{-1}) = \mathrm{Sp}(A)$$

gilt.

Lösung Teil 1

(1) Seien $A, B \in \mathbb{M}(n, K)$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(A+B) &= \mathrm{Sp}\begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11}) & \dots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{n1}+b_{n1}) & \dots & (a_{nn}+b_{nn}) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\ &= \mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B) \end{aligned}$$

(2) Sei $A \in \mathbb{M}(n, K)$ beliebig und $\lambda \in K$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(\lambda A) &= \mathrm{Sp}\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \\ &= \lambda \mathrm{Sp}(A) \end{aligned}$$

Demnach ist Sp eine K-lineare Abbildung.

Lösung Teil 2

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}(AB) &= \mathrm{Sp}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(a_{1j}\cdot b_{j1}) & \dots & \sum_{i=1}^{n}(a_{1j}\cdot b_{jn}) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}(a_{nj}\cdot b_{j1}) & \dots & \sum_{i=1}^{n}(a_{nj}\cdot b_{jn}) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\cdot b_{ji})\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}\cdot b_{ji})\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(b_{ji}\cdot a_{ij})\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(b_{ij}\cdot a_{ji})\right) \\
&= \mathrm{Sp}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(b_{1j}\cdot a_{j1}) & \dots & \sum_{i=1}^{n}(b_{1j}\cdot a_{jn}) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}(b_{nj}\cdot a_{j1}) & \dots & \sum_{i=1}^{n}(b_{nj}\cdot a_{jn}) \end{pmatrix} = \mathrm{Sp}(BA)
\end{aligned}$$

Lösung Teil 3

Nach Aufgabenteil 2 folgt

$$\mathrm{Sp}(XAX^{-1}) = \mathrm{Sp}(AX^{-1}X) = \mathrm{Sp}(AE) = \mathrm{Sp}(A).$$

9 Lineare Gleichungssysteme

9.1 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

9.1.1 Definition

Sei K ein Körper, seien $a_{ij} \in K$ und sei ein ***lineares Gleichungssystem*** der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mit den n Unbekannten $x_1, .., x_n \in K$ gegeben.

Schreibt man x und b als Spaltenvektoren

$$x \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b \;=\; \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

und ergibt sich $A \in \mathbb{M}(m \times n, K)$ aus

$$A \;=\; (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

so beschreibt

$Ax = b$ ein ***inhomogenes lineares Gleichungssystem*** und

$Ax = 0$ ein ***homogenes lineares Gleichungssystem***.

9.1.2 Satz 1

Sei K ein Körper, sei $x \in K^n$ und sei $A \in \mathbb{M}(m \times n, K)$.

Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$Ax \;=\; 0$$

ist ein Vektorraum von der Dimension

$$n - \operatorname{rang}(A).$$

Beweis

Betrachtet man die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : K^n &\to K^n \\ x &\mapsto Ax, \end{aligned}$$

so ist der Kern von φ gleich dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems.

Die Dimension folgt dann gerade aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen. □

9.1.3 Satz 2

Sei K ein Körper, seien $x \in K^n$ und $b \in K^m$ und sei $A \in \mathbb{M}(m \times n, K)$.

Die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

ist ein affiner Teilraum von K^n.

9.1.4 Definition und Satz

Sei K ein Körper, seien $x \in K^n$ und $b \in K^m$ und sei $A \in \mathbb{M}(m \times n, K)$.

Weiter sei (A, b) die Matrix A, erweitert um den Spaltenvektor b, also

$$(A, b) := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Das inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

hat genau dann mindestens eine Lösung, wenn gilt

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b).$$

9.1.5 Satz für den Fall m=n

Betrachtet man ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten, also

$$Ax \;=\; b$$

mit $A \in \mathbb{M}(n,\, K)$ und $x, b \in K^n$, so kann es nur dann eine Lösung für x geben, wenn A invertierbar ist.

Ist dies der Fall, so gilt

$$x \;=\; A^{-1}b.$$

Beweis

Es gilt

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad Ex = A^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}b.$$

□

9.1.6 Satz 3

Sei K ein Körper, seien $x = (x_1, .., x_n) \in K^n$ und $b = (b_1, .., b_m) \in K^m$ und sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathbb{M}(m \times n,\, K)$.

Durch das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$Ax \;=\; b$$

seien folgende Linearformen gegeben:

$$f_i(x_1, .., x_n) \;:=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad \text{für} \quad i = 1, .., m$$

Dann ist das Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann lösbar, wenn aus einer Relation

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i \;=\; 0 \qquad \text{mit} \quad \lambda_1, .., \lambda_m \in K$$

im Dualraum des K^n stets

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i \;=\; 0$$

folgt.

9.2 Aufgaben

9.2.1 Aufgabe 1

Bestimme den Lösungsraum des folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 4y & - & z & = & 0 \\ & & -7y & + & 5z & = & 2 \end{array}$$

Lösung

Es ergibt sich die Matrix A und der Spaltenvektor b:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wie bei den Gleichungen selber, kann man natürlich auch bei der Matrix (A, b) die üblichen elementaren Zeilenumformungen vornehmen, ohne die Lösungsmenge zu verändern:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man erkennt, dass

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b)$$

gilt, es gibt also mindestens eine Lösung. Es folgt:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 2 \\ -7y + 5z &= 2 \\ z &= \frac{7}{5}y + \frac{2}{5} \\ x &= -\frac{13}{5}y + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit der Lösungsraum

$$W = \left\{ (x, y, z) \in K^3 \;\middle|\; \left(-\frac{13}{5}y + \frac{2}{5},\, y,\, \frac{7}{5}y + \frac{2}{5} \right),\ y \in K \right\}.$$

9.2.2 Aufgabe 2

Bestimme die Lösungsmenge das linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcc}
x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3a+1 \\
3x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 4a \\
-2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & & & = & -2a \\
4x_1 & + & 8x_2 & - & 2x_3 & - & 6x_4 & + & x_5 & = & 5a
\end{array}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

Lösung

Überträgt man das Gleichungssystem in eine Matrix, so folgt:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|c}
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3a+1 \\
3 & 6 & -1 & -1 & 1 & 4a \\
-2 & -4 & 1 & 3 & 0 & -2a \\
4 & 8 & -2 & -6 & 1 & 5a
\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|c}
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3a+1 \\
0 & 0 & -2 & -6 & -3 & -7a-4 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4a+2 \\
0 & 0 & -1 & -3 & -2 & -5a-3
\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|c}
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3a+1 \\
0 & 0 & -2 & -6 & -3 & -7a-4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a-1
\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrrr|c}
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2a+1 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2a+2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a-1
\end{array}\right)$$

Ein derartiges inhomogenes Gleichungssystem kann nur dann eine Lösung haben, wenn $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(Ab)$ gilt, d.h. es muss $-a-1=0$ gelten.

Demnach ist das Gleichungssystem nur für $a=-1$ lösbar.

Es gilt nur für $a=-1$:

$$\begin{aligned}
x_5 &= -1 \\
x_3 + 3x_4 &= 0 \\
x_1 + 2x_2 &= -1
\end{aligned}$$

Demnach ergibt sich der Lösungsraum

$$L = \{(-1-2x_2,\, x_2,\, -3x_4,\, x_4,\, -1) \in \mathbb{R}^5 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

9.2.3 Aufgabe 3

Bestimme eine Basis für den Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems, das gegeben wird durch:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

Lösung

Überträgt man das Gleichungssystem in eine Matrix, so folgt:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Demnach gilt für das Gleichungssystem auch

$$\begin{aligned} 4x_1 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ 3x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

und es folgt:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 2x_3 + x_5 \\ x_4 &= -3x_3 - 2x_5 \end{aligned}$$

Demnach ergibt sich der Lösungsraum

$$L = \{(0,\, 2\lambda + \mu,\, \lambda,\, -3\lambda - 2\mu,\, \mu) \in \mathbb{R}^5 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Der Lösunsraum L ist demnach zweidimensional, es werden also zwei linear unabhängig Vektoren aus L gesucht.

Mit $\lambda = 1$ und $\mu = 0$ sowie mit $\lambda = 0$ und $\mu = 1$ ergeben sich die Vektoren

$$e_1 = (0, 2, 1, -3, 0) \qquad \text{und} \qquad e_2 = (0, 1, 0, -2, 1),$$

die beide in L enthalten und linear unabhängig sind.

Somit bildet $\{e_1, e_2\}$ eine Basis von L.

10 Determinantentheorie

Der Determinantentheorie hat das Anliegen, ein geeignetes und sinnvolles Maß für das Volumen bestimmter paralleler Körper zu definieren.

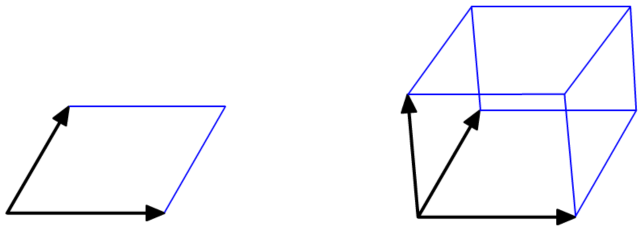


Abbildung 1

So lässt sich zum Beispiel die Fläche V eines Parallelogramms, das durch zwei linear unabhängigen Vektoren $a_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2$ und $a_2 = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2$ aufgespannt wird, durch

$$V = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

berechnen.

Ähnlich lässt sich auch das Volumen V eines Parallelepipeds berechnen, dass durch drei linear unabhängige Vektoren $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$a_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} e_j \qquad i = 1, 2, 3$$

aufgespannt wird:

$$V = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}$$

Die Determinantentheorie versucht diese Eigenschaften nun auf alle n dimensionale Räume zu übertragen.

10.1 Multilinearformen

10.1.1 Definition

Sei V ein n dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei weiter $\{e_1, .., e_n\}$ eine festgelegte Standardbasis von V.

Eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f:\underbrace{V\times\ldots\times V}_{\text{n-mal}} & \to & K \\ (a_1,\ldots,a_n) & \mapsto & f(a_1,\ldots,a_n) \end{array}$$

heißt eine ***alternierende Multilinearform***, wenn für alle $\lambda,\mu\in K$ und für alle $i\in\{1,..,n\}$ gilt:

(1) $f(a_1,..,\lambda a_i+\mu b_i,..,a_n)\ =\ \lambda f(a_1,..,a_i,..,a_n)+\mu f(a_1,..,b_i,..,a_n)$

(2) sind zwei Vektoren aus $\{a_1,..,a_n\}$ gleich, so gilt $f(a_1,..,a_n)=0$

(3) $f(e_1,..,e_n)\ =\ 1$

10.1.2 Folgerung

Sei f eine alternierende Multilinearform.

Sind die Vektoren $\{a_1,..,a_n\}$ linear abhängig, so gilt $f(a_1,..,a_n)=0$.

10.1.3 Folgerung

Sei f eine alternierende Multilinearform und seien $i,j\in\{1,..,n\}$.

Dann gilt

$$f(a_1,..,a_i,..,a_j,..,a_n)\ =\ -f(a_1,..,a_j,..,a_i,..,a_n).$$

Beweis

Es gilt

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & f(a_1,..,a_i+a_j,..,a_i+a_j,..,a_n) \\ & = & f(a_1,..,a_i,..,a_i,..,a_n)+f(a_1,..,a_i,..,a_j,..,a_n)+ \\ & & f(a_1,..,a_j,..,a_i,..,a_n)+f(a_1,..a_j,..,a_j,..,a_n) \\ & = & f(a_1,..,a_j,..,a_i,..,a_n)+f(a_1,..a_i,..,a_j,..,a_n). \end{array}$$

□

10.2 Permutationen

10.2.1 Definition

Eine ***Permutation*** von $\{1,..,n\}$ ist eine bijektive Abbildung

$$\sigma:\{1,..,n\}\to\{1,..,n\}.$$

10.2.2 Definition

S_n bezeichnet die Menge aller Permutationen von $\{1, .., n\}$ nach $\{1, .., n\}$.

Elemente aus S_n werden in der Regel mit π bezeichnet.

10.2.3 Beispiel

Sei $\pi \in S_3$.

Gilt $\pi(1) = 2,\ \pi(2) = 3$ und $\pi(3) = 1$, so wird π auch als

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

geschrieben.

10.2.4 Satz 1

S_n besteht stets aus $n!$ Elementen.

10.2.5 Satz 2

S_n bildet mit der üblichen Verknüpfung "$\circ$" von Funktionen eine so genannte Gruppe (siehe Seite 122).

10.3 Multilinearformen und Permutationen

10.3.1 Satz 1

Sei V ein n dimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit einer Basis $\{e_1, .., e_n\}$, sei

$$f : V \times \ldots \times V \to K$$

eine alternierende Multilinearform und seien $a_1, .., a_n \in V$ mit

$$a_i \ = \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j \qquad \text{für} \ \ i = 1, .., n.$$

Dann gilt

$$f(a_1, \ldots, a_n) \ = \ \sum_{\pi \in S_n} \alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)} \cdot f(e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(n)}).$$

Beweisskizze

Die Behauptung folgt aus der Linearität von f sowie aus der Eigenschaft, dass Terme mit zwei gleichen Argumenten gerade 0 ergeben.

10.3.2 Definition

Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation von $\{1,..,n\}$.

$\alpha(\pi)$ ist gleich der Anzahl der Paare $i, j \in \{1,..,n\}$ für die gilt:

$$i < j \qquad \text{und} \qquad \pi(i) > \pi(j)$$

$\alpha(\pi)$ gibt die Anzahl der so genannten ***Fehlstellungen*** von π an.

10.3.3 Beispiel

Sei $\pi \in S_5$ mit

$$\pi \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\alpha(\pi) = 5$, da genau für

$$(i,j) \;\in\; \{(1,4),\;(2,3),\;(2,4),\;(2,5),\;(3,4)\}$$

$\pi(i) > \pi(j)$ gilt.

10.3.4 Definition

Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation von $\{1,..,n\}$. Dann gilt

$$\operatorname{sgn}(\pi) \;:=\; (-1)^{\alpha(\pi)}.$$

10.3.5 Satz 2

Seien $\pi, \pi_1, \pi_2 \in S_n$. Dann gilt:

(1) $\operatorname{sgn}(id) \;=\; 1$

(2) $\operatorname{sgn}(\pi_1 \circ \pi_2) \;=\; \operatorname{sgn}(\pi_1) \cdot \operatorname{sgn}(\pi_2)$

(3) $\operatorname{sgn}(\pi) \;=\; \operatorname{sgn}(\pi^{-1})$

10.3.6 Satz 3

Die Anzahl der Vertauschungen von Zahlen, um aus den Funktionswerten

$$\{\pi(1), \ldots, \pi(n)\}$$

einer Permutation π die Identität

$$\{1, 2, \ldots, n\}$$

herzustellen, ist gerade, wenn $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$ gilt und ungerade, wenn $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$ gilt.

10.3.7 Satz 4

Sei V ein n dimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit einer Basis $\{e_1, .., e_n\}$, sei

$$f : V \times \ldots \times V \to K$$

eine alternierende Multilinearform und seien $a_1, .., a_n \in V$ mit $a_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j$ für $i = 1, .., n$.

Dann gilt

$$f(a_1, \ldots, a_n) \;=\; \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)} \cdot f(e_1, \ldots, e_n).$$

10.4 Determinanten von Endomorphismen

10.4.1 Satz 1

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, sei $\varphi : V \to V$ ein beliebiger Endomorphismus und sei $f : V \times ... \times V \to K$ eine alternierende Multilinearform.

Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{f} : V \times \ldots \times V &\to K \\ (a_1, \ldots, a_n) &\mapsto f(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \end{aligned}$$

auch eine alternierende Multilinearform.

Das heißt, $\tilde{f}$ ist proportional zu f. Es gibt daher ein Element $\det(\varphi) \in K$, so dass gilt:

$$\tilde{f} \;=\; \det(\varphi) \cdot f$$

10.4.2 Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, sei $\varphi : V \to V$ ein beliebiger Endomorphismus und sei $f : V \times ... \times V \to K$ eine alternierende Multilinearform.

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $\det(\varphi)$ aus K, so dass für $a_1, .., a_n \in V$ gilt:

$$f(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \;=\; \det(\varphi) \cdot f(a_1, \ldots, a_n)$$

$\det(\varphi)$ heißt die ***Determinante*** des Endomorphismus φ.

Bemerkung

$\det(\varphi)$ ist unabhängig von der Wahl von f.

10.4.3 Rechenregeln

Seien $\varphi, \psi : V \to V$ zwei Endomorphismen. Dann gilt:

(1) $\det(\varphi \circ \psi) \ = \ \det(\varphi) \cdot \det(\psi)$.

(2) $\det(id) \ = \ 1$.

(3) $\varphi : V \to V$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\det(\varphi) \neq 0$ gilt.

(4) Existiert φ^{-1}, dann gilt $\det(\varphi^{-1}) \ = \ \det(\varphi)^{-1}$.

Beweis

Siehe 23.3.1 auf Seite 210.

10.5 Determinanten von Matrizen

10.5.1 Definition und Satz

Sei $V = K^n$ ein Vektorraum über einem Körper K, sei $\{e_1, .., e_n\}$ die Standardbasis von V und sei $f : V \times ... \times V \to K$ eine alternierende Multilinearform.

Sei $A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{M}(n, K)$ eine Matrix. Dann wird durch A ein Endomorphismus φ von V bezüglich der Basis $\{e_1, .., e_n\}$ gegeben. Seien weiter

$$\tilde{a}_j \ = \ (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj}) \qquad \text{für} \ \ j = 1, .., n.$$

Dann ergibt sich nach der Definition von Determinanten

$$f(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) \ = \ \det(\varphi) \cdot f(e_1, \ldots, e_n) \ = \ \det(\varphi) \ =: \ \det(A),$$

da gerade $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$ gilt.

Zusammenfassung

Es gilt also für $A \in \mathbb{M}(n, K)$

$$\det(A) \ = \ f(a_1, \ldots, a_n),$$

dabei ist $\det(A)$ die Determinante des Endomorphismus φ, der durch A bezüglich der Standardbasis $\{e_1, .., e_n\}$ gegeben wird, und a_j sind die j-ten Spalten von A.

10.5.2 Leibnitz-Formel

Sei $A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{M}(n, K)$ eine $n \times n$ Matrix.

Dann gilt

$$\det(A) \ = \ \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)}.$$

10.5.3 Satz 1

Sei V ein Vektorrraum über einem Körper K, sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus und seien $\{e_1, .., e_n\}$ und $\{e'_1, .., e'_n\}$ zwei Basen von V.

Dann gilt für $A = \mathbb{M}(\varphi, \{e_1, .., e_n\})$ und $A' = \mathbb{M}(\varphi, \{e'_1, .., e'_n\})$

$$\det(A) \;=\; \det(A').$$

Die Determinante ist also unabhängig von der Wahl der Basis von V.

Beweis

Nach der Transformationsformel 8.4.1 auf Seite 51 gilt

$$A' \;=\; C \cdot A \cdot C^{-1}$$

mit $C = \mathbb{M}(id_V, \{e_1, .., e_n\}, \{e'_1, .., e'_n\})$. Somit folgt auch

$$\begin{aligned} \det(A') &= \det(C \cdot A \cdot C^{-1}) \\ &= \det(C) \cdot \det(A) \cdot \det(C^{-1}) \\ &= \det(A) \cdot \det(C^{-1}) \cdot \det(C) \;=\; \det(A), \end{aligned}$$

da $\det(C^{-1}) \cdot \det(C) = 1$ gilt (siehe Folgerung 11.1.6 Teil **(2)** auf Seite 81).

10.6 Zusammenfassung

In der folgenden Übersicht sind noch einmal die wichtigsten Punkte bei der Definition der Determinante über Multilinearform zusammengetragen.

10.6.1 Definition der Determinante

(1) Definition einer Multilinearform mit festgelegter Basis $\{e_1, .., e_n\}$.

(2) Für $a_1, .., a_n \in V$ mit $a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j$ für $i = 1, .., n$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(a_1, .., a_n) &= \sum_{\pi \in S_n} \alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)} \cdot f(e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(n)}) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)} \cdot f(e_1, .., e_n) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)}. \end{aligned}$$

(3) Sei nun $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$f(\varphi(a_1), .., \varphi(a_n)) \;\sim\; f(a_1, .., a_n)$$

und der Proportionalitätsfaktor ist gerade die Determinante von φ.

(4) Für Matrizen A mit $a_j = (\alpha_{j1}, .., \alpha_{jn})$ für $j = 1, .., n$ gilt dann

$$\det(A) \;=\; f(a_1, .., a_n).$$

Die Determinante ist eindeutig bestimmt und unabhängig von der Wahl der Basis und der Multilinarform.

11 Determinanten von Matrizen

11.1 Rechenregeln und Sätze

11.1.1 1 x 1 Matrizen

Sei $A = (\alpha_{11}) \in \mathbb{M}(1, K)$. Dann gilt

$$\det(A) = \alpha_{11}.$$

11.1.2 2 x 2 Matrizen

Sei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(2, K).$$

Dann gilt

$$\det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}.$$

11.1.3 3 x 3 Matrizen (Sarrus Regel)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(3, K).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(A) \quad = \quad & \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} \\ & -\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}. \end{aligned}$$

11.1.4 Rechenregeln

Seien $A, B \in \mathbb{M}(n, K)$ und $\lambda \in K$. Dann gilt:

(1) $\det(A) = \det(A^t)$

(2) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

(3) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Beweis

Siehe 23.3.2 auf Seite 211.

11.1.5 Satz 1

Sei $A \in \mathbb{M}(n, K)$. Dann gilt:

(1) Die Zeilen von A sind genau dann linear abhängig, wenn $\det(A) = 0$ gilt.

(2) Vertauscht man zwei Zeilen von A, so ändert sich $\det(A)$ um den Faktor (-1).

(3) Multipliziert man eine Zeile von A mit dem Faktor λ, so multiplizert sich die Determinante mit λ.

(4) Addiert man das λ-fache einer Zeile von A zu einer anderen Zeile von A, so ändert sich $\det(A)$ nicht.

Alle Aussagen gelten auch entsprechend für Spalten.

Beweisskizze

Diese Behauptungen folgen aus der Definition der Determinante über alternierende Multilinearformen sowie aus der Rechenregel $\det(A) = \det(A^t)$.

11.1.6 Folgerungen

Sei $A \in \mathbb{M}(n, K)$ eine $n \times n$ Matrix. Dann gilt:

(1) A ist genau dann invertierbar, wenn

$$\det(A) \neq 0$$

gilt.

(2) Ist A invertierbar, so gilt

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

(3) Sei $\det(A) = 0$ und sei φ die zu A gehörige lineare Abbildung.

Dann gilt

$$\ker(\varphi) \neq \{0\}.$$

Auch diese wichtigen Aussagen folgen aus der Definition von Determinanten sowie aus den ursprünglichen Rechenregeln (siehe 10.4.3 auf Seite 77).

11.1.7 Satz 2

Sei

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(n, K),$$

dabei $A \in \mathbb{M}(r, K)$ und $C \in \mathbb{M}(n-r, K)$. Dann gilt

$$\det(X) = \det(A) \cdot \det(C).$$

11.1.8 Bemerkung

Die Menge aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Einträgen aus einem Körper K bildet also auch die allgemeine linear Gruppe $GL(n, K)$ (siehe 6.3.9 auf Seite 39).

Die Untergruppe

$$SL(n, K) = \{A \in GL(n, K) \mid \det(A) = 1\}$$

bildet die ***spezielle lineare Gruppe*** (und ist sogar ein Normalteiler von $GL(n, K)$).

11.2 Weitere Sätze

11.2.1 Definition

Sei $A = (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{M}(n, K)$ und seien $i, j \in \{1, .., n\}$.

Dann ist A_{ij} die zu α_{ij} ***komplementäre Matrix*** die man aus A erhält, indem man die i te Zeile und der j ten Spalte streicht.

11.2.2 Laplacesche Entwicklungsformel

Sei $A = (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{M}(n, K)$.

Entwicklung nach Zeilen

Es gilt für ein festes $i \in \{1, .., n\}$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \cdot \det(A_{ij}).$$

Entwicklung nach Spalten

Es gilt für ein festes $j \in \{1, .., n\}$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \cdot \det(A_{ij}).$$

11.2.3 Beispiel

Berechne die Determinante von $A \in \mathbb{M}(4, \mathbb{R})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Es gilt

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-) \\ \\ (\cdot 1) \\ \\ \end{matrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

da das Addieren des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen die Determinante nich ändert. Nach der Laplacesche Entwicklungsformel folgt nun

$$\begin{aligned}
& \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
= \; & (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
= \; & \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
= \; & (24 + 9 - 24 - 6) + (12 + 3 - 12) \\
= \; & 3 + 3 \\
= \; & 6
\end{aligned}$$

11.2.4 Satz 1

Sei $A = A_{ij} \in \mathbb{M}(n, K)$ eine invertierbare Matrix. Dann gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\beta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

mit

$$\beta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji}).$$

Dabei ist A_{ji} eine $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die man durch Streichung der j ten Zeile und i ten Spalte erhält.

11.2.5 Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\det(A) = 2$ und es ergibt sich

$$A^{-1} \;=\; \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} +2 & -4 \\ -1 & +3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Probe

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.2.6 Cramersche Regel

Sei

$$Ax \;=\; b$$

ein Gleichungssystem aus n linearen Gleichungen mit n Unbekannten, dabei $x = (x_1, .., x_n)$ und $b = (b_1, .., b_n)$.

Ist A invertierbar, so gilt

$$x_i \;=\; \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(\overline{A}_i) \qquad \text{für} \qquad i = 1, .., n.$$

Dabei entsteht $\overline{A}_i$ durch Ersetzen der i ten Spalte von A durch die Spalte

$$b \;=\; \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

11.2.7 Beispiel

Sei das Gleichungssystem $Ax = b$ gegeben durch

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 2x + 4y &= 1. \end{aligned}$$

Es ist also

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ist gilt $\det(A) = 2 \neq 0$, also ist A auch invertierbar und es folgt:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \\ y &= \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

11.3 Aufgaben

11.3.1 Aufgabe 1

Sei $A \in \mathbb{M}(3, \mathbb{R})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Determinante von A.

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} & \det(A) \\ = \; & (2 \cdot 0 \cdot 1) + (4 \cdot 2 \cdot 1) + (3 \cdot 1 \cdot 7) - (3 \cdot 0 \cdot 1) - (4 \cdot 1 \cdot 1) - (2 \cdot 2 \cdot 7) \\ = \; & 0 + 8 + 21 - 0 - 4 - 28 \; = \; 29 - 32 \; = \; -3. \end{aligned}$$

11.3.2 Aufgabe 2

Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -9 & 6 & 9 \\ 6 & -8 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung

Nach dem Satz zur Berechnung von Determinanten der Form $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ folgt

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= (-56 + 54) \cdot (-20 + 18) \\ &= (-2) \cdot (-2) \\ &= 4. \end{aligned}$$

12 Eigenwerte und Eigenvektoren

12.1 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

12.1.1 Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei

$$\varphi : V \to V$$

eine beliebige lineare Abbildung.

Alle Skalare $\lambda \in K$, für die

$$\boxed{\varphi(x) \; = \; \lambda \cdot x}$$

gilt, heißen ***Eigenwerte*** zu den ***Eigenvektoren*** $x \in V$ mit $x \neq 0$.

Eigenvektoren sind also Vektoren, die bei linearen Abbildungen auf ein Vielfaches von sich selber abgebildet werden – die Eigenwerte sind gerade dieses Vielfache.

12.1.2 Finden von Eigenwerten und Eigenvektoren

Sei weiterhin $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung.

Gesucht sind nun alle $\lambda \in K$ mit

$$\varphi(x) \; = \; \lambda \cdot x.$$

Durch einfache Umformungen erhält man

$$\begin{aligned} & \varphi(x) \; = \; \lambda x \\ \Leftrightarrow \quad & \varphi(x) \; = \; \lambda id(x) \\ \Leftrightarrow \quad & \varphi(x) - \lambda id(x) \; = \; 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\varphi - \lambda id)(x) \; = \; 0 \end{aligned}$$

Die weiterhin lineare Abbildung $(\varphi - \lambda id)$ ist nicht injektiv, da auch jeder Vektor $x \in V$ mit $x \neq 0$ auf 0 abgebildet wird.

Es folgt also als Bedingung an einen Eigenwert λ

$$\det(\varphi - \lambda id) \;=\; 0.$$

Andersherum: Sei $\lambda \in K$ und es gelte $\det(\varphi - \lambda id) = 0$.

Das heißt, die lineare Abbildung $(\varphi - \lambda id)$ ist nicht injektiv, also gilt

$$\ker(\varphi - \lambda id) \;\neq\; 0.$$

Demnach gibt es Vektoren $x \in V$ mit $x \neq 0$, für die

$$(\varphi - \lambda id)(x) = 0$$

gilt. Da $(\varphi - \lambda id)(x) = 0$ äqivalent zu $\varphi(x) = \lambda x$ ist, muss x ein Eigenvektor zum Eigenwert λ sein.

Die Bedingung $\det(\varphi - \lambda id) = 0$ ist demnach nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend.

12.1.3 Berechnen von Eigenwerten und Eigenvektoren

Sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, $\{e_1, .., e_n\}$ eine Basis von V und sei

$$A \;:=\; \mathbb{M}(\varphi, \{e_1, .., e_n\}) \;=\; (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

die zu φ gehörige $n \times n$ Matrix.

Dann gilt

$$\det(\varphi - \lambda id) \;=\; \det(A - \lambda E),$$

dabei ist E die $n \times n$ Einheitsmatrix.

Nach der Entwicklungsformel für Determinanten ergibt sich

$$\det(A - \lambda E) \;=\; (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \right) \lambda^{n-1} + \ldots + \det(A),$$

also ein Polynom vom Grad $\leq n$, das so genannte ***charakteristische Polynom***.

12.1.4 Zusammenfassender Satz

Sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung.

Die Nullstellen λ des charakteristischen Polynoms

$$\det(\varphi - \lambda id)$$

sind die Eigenwerte von φ.

Zu jedem Eigenwert gibt es mindestens einen Eigenvektor $x \in V$.

12.1.5 Bemerkung 1

Betrachtet man direkt eine $n \times n$ Matrix A, so ergibt sich für

$$A \cdot x \;=\; \lambda x \;=\; \lambda E \cdot x$$

ebenfalls $\det(A - \lambda E) = 0$ als Bedingung für einen Eigenwert λ.

12.1.6 Bemerkung 2

Sei A eine $n \times n$ Matrix und λ ein Eigenwert von A.

Dann ergibt sich

$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad Ax - \lambda x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda E)(x) = 0$$

als Bedingung für einen Eigenvektor x.

12.1.7 Beispiel 1

Sei

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Finde alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Lösung

$$\det(A-\lambda E) \;=\; \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \;=\; \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich also das charakteristische Polynom

$$(1 - \lambda) \cdot (-2 - \lambda) \;=\; 0.$$

Demnach sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ alle Eigenwerte von A.

Für die Eigenvektoren zu x_{λ_1} folgt

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 E_2)(x_{\lambda_1}) \;&=\; \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; 0, \end{aligned}$$

also gilt $x_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Und für die Eigenvektoren zu x_{λ_2} folgt

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 E_2)(x_{\lambda_2}) \;&=\; \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; 0, \end{aligned}$$

somit gilt $x_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

12.1.8 Beispiel 2

Nicht alle linearen Abbildungen haben Eigenwerte:

Sei $0 < \alpha < \pi$. Finde alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Lösung

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (\cos(\alpha) - \lambda)^2 + \sin(\alpha)^2 \\ &= \cos(\alpha)^2 - 2\lambda\cos(\alpha) + \lambda^2 + \sin(\alpha)^2 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda\cos(\alpha) + 1 \end{aligned}$$

Da das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos(\alpha) + 1$$

für $0 < \alpha < \pi$ keine Nullstelle hat, gibt es keinen reellen Eigenwert für A.

12.1.9 Beispiel 3

Zu einem Eigenwert kann es auch mehrere Eigenvektoren geben:

Sei $c \in \mathbb{R}$. Finde alle Eigenwerte und Eigenvektoren von der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Lösung

Es ergibt sich sofort das charakteristische Polynom

$$(c - \lambda)^3 = 0.$$

Demnach ist c auch der einzige Eigenwert von A.

Gesucht sind nun noch alle Eigenvektoren zum Eigenwert c, also alle $x \in \mathbb{R}^3$ für die gilt:

$$A \cdot x = c \cdot x$$

Diese Gleichung gilt für alle $x \in \mathbb{R}^3$, also sind alle Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ Eigenvektoren zum Eigenwert c.

12.2 Weitere Sätze

12.2.1 Satz 1

Bei einer $n \times n$ Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sind $a_{11}, .., a_{nn}$ alle Eigenwerte von A.

12.2.2 Satz 2

Sei V ein 3 dimensionaler Vektorraum und sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung.

Dann hat φ mindestens einen Eigenwert, da das charakteristische Polynom vom Grad 3 ist.

12.2.3 Satz 3

Zwei Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind stets linear unabhängig.

12.2.4 Satz 4

Sei V ein n dimensionaler Vektorraum und sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit n verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_n$.

Dann gibt es eine Basis von V, die nur aus den Eigenvektoren zu $\lambda_1, .., \lambda_n$ besteht, so dass gerade

$$\mathbb{M}(\varphi, \{\lambda_1, .., \lambda_n\}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

gilt.

Die Abbildung φ bzw. die zugehörige Matrix heißt somit ***diagonalisierbar***.

Beweis

Siehe 23.4.1 auf Seite 212.

12.3 Eigenräume

12.3.1 Definition

Sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung und sei λ ein Eigenwert von φ.

$$V(\varphi, \lambda) \ := \ \{x \in V \mid \varphi(x) = \lambda x\}$$

heißt der ***Eigenraum*** zum Eigenwert λ.

12.3.2 Satz 1

Jeder Eigenraum $V(\varphi, \lambda)$ ist ein Untervektorraum von V.

12.3.3 Hauptsatz über Diagonalisierbarkeit

Sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung und seien $\lambda_1, .., \lambda_r$ alle paarweise verschiedene Eigenwerte von φ.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) φ ist diagonalisierbar.

(2) Es ist

$$\sum_{i=1}^{r} V(\varphi, \lambda_i) \ = \ \bigoplus_{i=1}^{r} V(\varphi, \lambda_i)$$

eine direkte Zerlegung von V.

Beweisskizze

Der Beweis zu diesem Satz ist sehr ähnlich zum Beweis aus Satz 12.2.4.

12.3.4 Beispiel

Prüfe, ob die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(a,b,c) \ = \ (-5a + 7c,\ 6a + 2b - 6c,\ -4a + 6c)$$

diagonalisierbar ist und gib gegebenenfalls eine Basis von $\mathbb{R}^3$ an, so dass die Matrix von φ bezüglich dieser Basis eine Diagonalmatrix ist.

Lösung

Die Abbildung φ ist offenbar linear, also wird zunächst die Matrix bezüglich der Standardbasis bestimmt. Es ergibt sich

$$M \ = \ \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Nun werden die Eigenwerte bestimmt:

$$\begin{aligned}\det(M-\lambda E) &= \begin{vmatrix} -5-\lambda & 0 & 7 \\ 6 & 2-\lambda & -6 \\ -4 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-5-\lambda)(2-\lambda)(6-\lambda)+28(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) \\ &= (2-\lambda)^2(-1-\lambda) \;=\; 0\end{aligned}$$

Somit ist -1 ein einfacher und 2 ein zweifacher Eigenwert von φ.

Es müssen nun die Eigenräume ermittelt werden:

$$\mathbb{R}^3(\varphi,-1): \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a+7c \\ 6a+3b-6c \\ -4a+7c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus $-4a+7c=0$ und $6a+3b-6c=0$ ergibt sich durch einfaches ausrechnen gerade

$$\mathbb{R}^3(\varphi,-1) \;=\; \mathbb{R}\cdot(7,-6,4).$$

Zum zweiten Eigenraum:

$$\mathbb{R}^3(\varphi,2): \quad \begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7a+7c \\ 6a-6c \\ -4a+4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt nun $a=c$ sowie b beliebig. Somit folgt

$$\mathbb{R}^3(\varphi,2) \;=\; \mathbb{R}\cdot(1,0,1)+\mathbb{R}\cdot(0,1,0).$$

Da diese beiden Eigenräume Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ sind und gegenseitig orthogonal zueinander stehen, folgt

$$\mathbb{R}^3 \;=\; \mathbb{R}^3(\varphi,-1)\,\oplus\,\mathbb{R}^3(\varphi,2),$$

da $\dim(\mathbb{R}^3(\varphi,-1))=1$ und $\dim(\mathbb{R}^3(\varphi,2))=2$ gilt.

Somit ist φ auch diagonalisierbar und für die Basis

$$\{e_1=(7,-6,4),\ e_2=(1,0,1),\ e_3=(0,1,0)\}$$

gilt

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= (-7,6,-4) \;=\; -\,e_1, \\ \varphi(e_2) &= (2,0,2) \;=\; 2e_2, \\ \varphi(e_3) &= (0,2,0) \;=\; 2e_3.\end{aligned}$$

Es ergibt sich also gerade

$$\mathbb{M}(\varphi,\{e_1,e_2,e_3\}) \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

12.4 Jordansche Normalform

12.4.1 Definition

Ein Körper K heißt ***algebraisch abgeschlossen***, wenn jedes Polynom aus K vom Grad n auch genau n Nullstellen in K besitzt.

Beispiel

Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist nicht algebraisch abgeschlossen, der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen hingegen schon.

12.4.2 Satz 1

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei V ein Vektorraum über K.

Sei weiter $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung und seien $\lambda_1, .., \lambda_r$ alle Eigenwerte von φ.

Dann gibt es eine Basis $\{b_1, .., b_n\}$ von V, so dass gilt:

$$\mathbb{M}(\varphi, \{b_1, .., b_n\}) = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_k \end{pmatrix} \qquad \text{dabei} \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathbb{M}(\varphi, \{b_1, .., b_n\})$ heißt dann ***Jordansche Normalform*** von φ und die J_i heißen ***Jordankästchen***.

Bemerkungen

Die Darstellung der Jordanschen Normalform ist bis auf Permutationen der Jordankästchen eindeutig bestimmt.

Die Anzahl der Jordankästchen zu einem Eigenwert λ ist gleich der Dimension des Eigenraums $V(\varphi, \lambda)$.

Um nicht einen algebraisch abgeschlossenen Körper als Bedingung vorauszusetzen, reicht es auch zu fordern, dass das charakteristische Polynom von φ vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

12.4.3 Beispiele

Folgende Matrizen liegen in der Jordanschen Normalform vor:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|cc} 7 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

12.5 Aufgaben

12.5.1 Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Bestimme die Eigenwerte von A.

Lösung

Um die Eigenwerte λ von A zu berechnen, muss die Gleichung

$$\det(A - \lambda E_2) \ = \ 0$$

gelöst werden:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)\cdot(3-\lambda) - 1\cdot 1 \\
&= 6 - 5\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 5\lambda + 5 \ = \ 0
\end{aligned}$$

Es ergeben sich also die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

12.5.2 Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Lösung

Um die Eigenwerte λ von A zu berechnen, muss die Gleichung

$$\det(A - \lambda E_2) \ = \ 0$$

gelöst werden:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 1\cdot 1 \\
&= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3 \ = \ 0
\end{aligned}$$

Es ergeben sich also die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$.

Für die Eigenvektoren gilt:

$$
\begin{aligned}
&(A - \lambda_1 E_2)(x_{\lambda_1}) &=& \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\
\text{und} \quad &(A - \lambda_2 E_2)(x_{\lambda_2}) &=& \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0
\end{aligned}
$$

Somit folgt $x_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $x_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13 Euklidische Geometrie

13.1 Skalarprodukt

13.1.1 Definition

Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} (\ ,\ ): V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto (x,y) \end{aligned}$$

heißt ***Skalarprodukt***, wenn gilt:

(1) $(\ ,\ )$ ist bilinear in x und y, das heißt es gilt für alle $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$ und alle $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) &= \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y) \qquad \text{und} \\ (x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) &= \beta_1 (x, y_1) + \beta_2 (x, y_2). \end{aligned}$$

(2) $(\ ,\ )$ ist symmetrisch, das heißt es gilt für alle $x, y \in V$

$$(x,y) = (y,x).$$

(3) $(\ ,\ )$ ist positive definit, das heißt es gilt für alle $x \in V$

$$(x,x) \geq 0$$

mit Gleichheit, wenn $x = 0$.

13.1.2 Beispiel 1

Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ y = (y_1, .., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Die Abbildung

$$(x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

wird als ***Standardskalarprodukt*** bezeichnet.

Bemerkung

Das Standardskalarprodukt von zwei Vektoren ist anschaulich genau die Länge der Projekt von einem Vektor auf den anderen.

13.1.3 Beispiel 2

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $V = \mathcal{C}(I)$ der Vektorraum aller stetigen reellen Funktionen auf I.

Dann wird durch

$$(f, g) \;\mapsto\; \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.

13.1.4 Definition

Ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum V versehen mit einem Skalarprodukt $(\ ,\ )$ ist ein ***euklidischer Vektorraum***.

Schreibweise: $(V, (\ ,\ ))$.

13.2 Definitionen und Sätze

13.2.1 Definition

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum. Die ***Länge*** von $x \in V$ wird gegeben durch

$$\|x\| \;:=\; \sqrt{(x, x)}.$$

13.2.2 Cauchy-Schwarz Ungleichung

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum und seien $x, y \in V$ beliebig.

Dann gilt

$$|(x, y)| \;\leq\; \|x\| \cdot \|y\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

13.2.3 Definition

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum und seien $x, y \in V$.

Der ***Abstand*** von x und y wird gegeben durch

$$d(x, y) \;:=\; \|x - y\| \;=\; \sqrt{(x - y, x - y)}$$

13.2.4 Satz 1

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum und sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine festgelegte Basis von V.

Dann ist das Skalarprodukte $(\ ,\ )$ eindeutig festgelegt durch die Matrix

$$G \;=\; (g_{ij})_{1 \le i,j \le n} \qquad \text{mit} \qquad g_{ij} \;=\; (e_i, e_j).$$

Beweis

Seien $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ und $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$ zwei Vektoren aus V. Dann folgt

$$(x, y) \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_y) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_i.$$

□

13.2.5 Satz 2

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{cccccc} \varphi : & V & \to & V^* & & \\ & x & \mapsto & \varphi_x : & V & \to & \mathbb{R} \\ & & & & y & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

ein Isomorphismus von V auf V^*.

Beweisskizze

Die Abbildung φ ist injektiv und es gilt $\dim(V) = \dim(V^*)$. Daher ist φ auch surjektiv und es folgt die Behauptung.

13.2.6 Definition

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum und seien $x, y \in V$.

x und y stehen genau dann ***orthogonal*** zueinander oder ***senkrecht*** aufeinander, wenn gilt

$$(x, y) \;=\; 0.$$

13.2.7 Definition

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum und sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine Basis von V.

$\{e_1, .., e_n\}$ heißt ***Orthogonalbasis*** von V, wenn $(e_i, e_j) = 0$ für alle $i \neq j$ gilt.

$\{e_1,..,e_n\}$ heißt ***Orthonormalbasis*** von V, wenn die Matrix $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ mit $g_{ij}=(e_i,e_j)$ die Enheitsmatrix ist.

13.2.8 Satz 3

Sei $(V,(\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum mit Orthogonalbasis $\{e_1,..,e_n\}$.

Dann gilt für alle $x\in V$

$$x \;=\; \sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i.$$

13.2.9 Definition

Sei $(V,(\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum und seien $x,y\in V$ mit $x,y\neq 0$.

Der ***Winkel*** φ zwischen x und y wird gegeben durch

$$\cos(\varphi) \;=\; \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|} \;=\; \frac{(x,y)}{\sqrt{(x,x)(y,y)}} \qquad \text{mit} \quad 0\leq\varphi\leq\pi.$$

Schreibweise: $\sphericalangle(x,y)$.

Bemerkung

Nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung gilt

$$-1 \;\leq\; \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|} \;\leq\; 1.$$

Da cos auf $[0,\pi]$ streng monoton ist, wird also jeder Wert aus $[-1,1]$ genau einmal angenommen. Somit ist der Winkel eindeutig bestimmt.

13.2.10 Satz 4

Sei $(V,(\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum, seien $x,y\in V$ mit $x,y\neq 0$ und sei $\sphericalangle(x,y)$ der Winkel zwischen x und y.

x und y stehen genau dann orthogonal zueinander, wenn $\sphericalangle(x,y)=\frac{\pi}{2}$ gilt.

13.2.11 Definition und Satz

Sei $(V,(\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum und sei $W\subset V$ ein Untervektorraum.

$$W^{\perp} \;:=\; \{x\in V \mid (x,y)=0 \text{ für alle } y\in W\}$$

heißt das ***orthogonale Komplement*** von W.

$W^{\perp}$ ist ein Untervektorraum von V und es gilt die ***Dimensionsformel***

$$\boxed{\dim(V) \;=\; \dim(W^{\perp}) + \dim(W)} \quad .$$

Weiter gilt:

(1) $(W^{\perp})^{\perp} \;=\; W$

(2) $V \;=\; W \oplus W^{\perp}$

Beweisskizze

Dass auch $W^{\perp}$ ein Untervektorraum von V ist, kann leicht durch prüfen der Axiome gezeigt werden.

Nun zur Dimensionsformel: Wählte man eine Basis $\{e_1, .., e_r\}$ von W und ergänzt diese zu einer Basis $\{e_1, .., e_n\}$ von V, so kann man durch das folgende Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis $\{\tilde{e}_1, .., \tilde{e}_n\}$ von V finden. Dann wird W von $\{\tilde{e}_1, .., \tilde{e}_r\}$ erzeugt und man erhält gerade wegen der Orthonormalität die Behauptung.

13.3 Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Sei V ein K-Vektorraum, seien $a_1, .., a_r \in V$ und sei

$$W \;=\; K \cdot a_1 + \ldots + K \cdot a_m$$

ein Untervektorraum von V.

Durch das Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren lässt sich eine Basis $\{b_1, .., b_m\}$ von W findet, bei dem alle Basisvektoren senkrecht zueinander stehen und die Länge 1 haben.

Dabei geht man wie folgt vor:

$$\begin{array}{rl}
 & b_1 = a_1, \\
\text{ist } a_2 \notin \{K \cdot b_1\} \text{ (sonst } a_3 \text{ usw.), dann} & b_2 = a_2 - \dfrac{a_2 \cdot b_1}{b_1^2} b_1, \\
\text{ist } a_3 \notin \{K \cdot b_1 + K \cdot b_2\}, \text{ dann} & b_3 = a_3 - \dfrac{a_3 \cdot b_1}{b_1^2} b_1 - \dfrac{a_3 \cdot b_2}{b_2^2} b_2 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Dabei geht man so lange vor, bis $\{b_1, .., b_m\}$ eine Basis von W ist.

Aus dieser Orthogonalbasis erhält man durch Normieren eine Orthonormalbasis

$$\left\{ \frac{b_1}{|b_1|}, \ldots, \frac{b_m}{|b_m|} \right\} .$$

13.3.1 Beispiel

Bestimme eine Orthonormalbasis von $W = \mathbb{R} \cdot a_1 + \ldots + \mathbb{R} \cdot a_5$ mit

$$\begin{array}{ll} a_1 = (1, -2, 0, -1, 0) & a_2 = (-1, 7, 1, 3, 2) \\ a_3 = (1, 3, 1, 1, 2) & a_4 = (3, 0, 2, -3, 1) \\ a_5 = (4, -4, 0, 0, 3) & \end{array}$$

Lösung

Es sei nun

$$b_1 \;=\; a_1 \;=\; (1, -2, 0, -1, 0).$$

Da $a_2 \notin \{\mathbb{R} \cdot b_1\}$ ist, folgt

$$\begin{aligned} b_2 \;&=\; (-1, 7, 1, 3, 2) - \frac{a_2 \cdot b_1}{b_1^2} b_1 \\ &=\; (-1, 7, 1, 3, 2) + \frac{18}{6}(1, -2, 0, -1, 0) \;=\; (2, 1, 1, 0, 2). \end{aligned}$$

Da $a_3 \in \{\mathbb{R} \cdot b_1 + \mathbb{R} \cdot b_2\}$ (denn $a_3 = -b_1 + b_2$), aber $a_4 \notin \{\mathbb{R} \cdot b_1 + \mathbb{R} \cdot b_2\}$ ist, folgt

$$b_3 \;=\; (3, 0, 2, -3, 1) - \frac{6}{6} b_1 - \frac{10}{10} b_2 \;=\; (0, 1, 1, -2, -1).$$

Da $a_5 \in \{\mathbb{R} \cdot b_1 + \mathbb{R} \cdot b_2 + \mathbb{R} \cdot b_3\}$ (denn $a_5 = 2b_1 + b_2 - b_3$) ist $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Orthogonalbasis von W.

Es folgt die Orthonormalbasis

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} b_1, \frac{1}{\sqrt{10}} b_2, \frac{1}{\sqrt{7}} b_3 \right\}.$$

13.4 Normierte Vektorräume

13.4.1 Satz 1

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum.

Dann erfüllt die Länge folgende Eigenschaften:

(1) $\|x\| \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$.

(2) $\|\lambda x\| \;=\; |\lambda| \cdot \|x\|$.

(3) $\|x + y\| \;\leq\; \|x\| + \|y\|$ mit Gleichheit bei linearer Abhängigkeit von x und y.

Die Länge wird dann auch ***Norm*** genannt.

Beweis

(1) Es gilt $(x,x) \geq 0$, somit auch $\sqrt{(x,x)} \geq 0$ und es folgt $\|x\| \geq 0$.

(2) Es gilt

$$\|\lambda x\| \;=\; \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} \;=\; \sqrt{\lambda^2 (x,x)} \;=\; |\lambda| \cdot \|x\|.$$

(3) Es gilt

$$\begin{aligned}(\|x\| + \|y\|)^2 &= (x,x) + 2\sqrt{(x,x)(y,y)} + (y,y) \\ &\geq (x+y, x+y) \;=\; (x,x) + (y,y) + 2(x,y) \\ &= (\|x+y\|)^2.\end{aligned}$$

□

13.4.2 Definition

Ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum V versehen mit einer Norm ist ein ***normierter Vektorraum***.

Schreibweise: $(V, (\ ,\ ))$.

13.5 Hessesche Normalform

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum, sei $a \in V$ mit $a \neq 0$ und sei $d \in \mathbb{R}$.

Die beiden Gleichungen

$$(a,x) \;=\; d \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{a}{\|a\|}, x\right) \;=\; \frac{d}{\|a\|}$$

beschreiben dieselben Hyperebene in V.

Gilt nun $\|a\| = 1$, so liegt die Hyperebene in der ***Hessischen Normalform***

$$H : (a,x) \;=\; d$$

vor.

13.5.1 Satz 1

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum, sei $x \in V$ beliebig und sei

$$H : (a,x) \;=\; d$$

eine Hyperebene in Hessischer Normalform (also $\|a\| = 1$).

Dann gibt $|(a,x) - d|$ genau den Abstand von x zur Hyperebene H an.

13.5.2 Satz 2

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum, sei $x \in V$ beliebig und sei

$$H : (a, x) \ = \ d$$

eine Hyperebene in Hessischer Normalform (also $\|a\| = 1$).

Dann gibt das Vorzeichen von $(a, x) - d$ an, ob der Nullpunkt und x auf der selben Seite oder auf unterschiedlichen Seiten der Hyperebene H liegen.

13.6 Vektorprodukt

Sei $(\mathbb{R}^3, (\ ,\ ))$ ein 3 dimensionaler euklidischer Vektorraum mit einer Orthonormalbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Seien $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ und $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$.

Das ***Vektorprodukt***

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (a, b) & \mapsto & a \times b \end{array}$$

wird dann definiert durch

$$a \times b \ := \ \Big((a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1, \ - (a_1 b_3 - a_3 b_1) e_2, \ (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3 \Big) \ \in \ \mathbb{R}^3.$$

Merkregel

Das Vektorprodukt lässt sich leicht merken, indem man die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

nach der 1. Zeile entwickelt:

$$a \times b \ = \ e_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - e_2 \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + e_3 \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

13.6.1 Satz 1

Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$.

Dann steht das Vektorprodukt $a \times b$ senkrecht auf a und b.

Beweisskizze

Man erhält dann durch einfaches Ausrechnen gerade

$$(a \times b, \, a) \ = \ (a \times b, \, b) \ = \ 0,$$

was die Behauptung zeigt.

13.6.2 Satz 2

Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (a,b) & \mapsto & a \times b \end{array}$$

ist bilinear.

13.6.3 Satz 3

Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$.

Dann ist $\|a \times b\|$ der Flächeninhalt von dem durch a und b gegebenen Parallelogramm.

13.7 Aufgaben

13.7.1 Aufgabe 1

Sei

$$H \;=\; \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 - \xi_5 = 0\} \;\subset\; \mathbb{R}^5$$

eine Hypebene im $\mathbb{R}^5$.

(1) Bestimme die Hessesche Normalform der Hyperebende H.

(2) Bestimme den Abstand von $p = (1, 2, 3, 4, 5)$ zu H.

Lösung Teil 1

Die Gleichung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x \;=\; 0$ beschreibt genau die Hyperebene H. Man

erhält in der Hesseschen Normalform: $\quad H : \sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x \;=\; 0$

Lösung Teil 2

Für den Abstand d des Punktes p von H gilt:

$$\left| \sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = |\sqrt{5} \cdot (-3)| = 3\sqrt{5}$$

13.7.2 Aufgabe 2

Sei

$$W = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Bestimme das orthogonale Komplement $W^\perp$ von W.

Lösung

Es gilt $\dim(W) = 3$ und somit folgt aus der Dimensionsformel

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(\mathbb{R}^4)$$

$\dim(W^\perp) = 1$.

Der Vektor $x = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ ist offenbar orthogonal zu allen Vektoren $w \in W$. Somit gilt für das orthogonale Komplement

$$W^\perp = \{(\lambda, \lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

13.7.3 Aufgabe 3

Beweise den ***Satz des Thales*** mit Hilfe des Standardskalarproduktes:

Konstruiert man ein Dreieck aus den zwei Endpunkten des Durchmessers eines Halbkreises und einem weiteren Punkt auf dem Halbkreis, so erhält man immer ein rechtwinkliges Dreieck.

Lösung

Zunächst soll die folgende Skizze das Problem verdeutlichen:

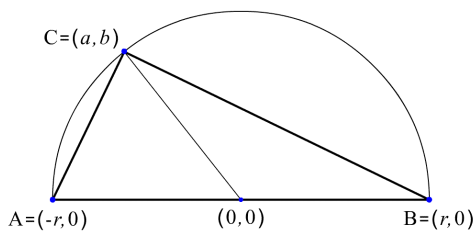


Abbildung 2

Der Ursprung ist dabei der Mittelpunkt des Kreises, A, B und C haben somit den gleichen Abstand zu $(0,0)$ und es gilt daher

$$a^2 + b^2 \;=\; (a,b)\cdot(a,b) \;=\; (r,0)\cdot(r,0) \;=\; (-r,0)\cdot(-r,0) \;=\; r^2.$$

Nach dem Standardskalarprodukt muss nun das Produkt der beiden Vektoren $\vec{AC}$ und $\vec{BC}$ gerade 0 ergeben:

$$\begin{aligned}
\vec{AC}\cdot\vec{BC} &= [(r,0)+(a,b)]\cdot[(-r,0)+(a,b)] \\
&= (r+a,b)\cdot(a-r,b) \\
&= (r+a)(a-r)+b^2 \\
&= -r^2+a^2+b^2
\end{aligned}$$

Nach der ursprünglichen Erkenntnis $a^2+b^2=r^2$ folgt nun wie behauptet

$$\vec{AC}\cdot\vec{BC} \;=\; -\,a^2-b^2+a^2+b^2 \;=\; 0.$$

14 Orthogonale Abbildungen

In diesem Kaptitel seien $V = (V, (\ ,\ ))$ und $W = (W, (\ ,\ ))$ stets euklidische Vektorräume.

14.1 Definitionen und Sätze

14.1.1 Definition

Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt eine ***Isometrie*** oder ***orthogonale Abbildung***, wenn für alle $x, y \in V$

$$(\varphi(x), \varphi(y)) \ = \ (x, y)$$

gilt.

14.1.2 Satz 1

Sei $\varphi : V \to W$ eine Isometrie.

Dann gilt:

(1) φ ist injektiv.

(2) Für alle $x \in V$ gilt $\|x\| \ = \ \|\varphi(x)\|$.

(3) Für alle $x, y \in V$ gilt $\sphericalangle(x, y) \ = \ \sphericalangle(\varphi(x), \varphi(y))$.

Die Längen und Winkel zwischen zwei Vektoren ändern sich also nicht, wenn man auf beide Vektoren eine Isometrie φ anwendet.

Beweis Teil 2

Es gilt gerade $\|x\| \ = \ \sqrt{(x, x)} \ = \ \sqrt{(\varphi(x), \varphi(x))} \ = \ \|\varphi(x)\|$. □

14.1.3 Satz 2

Eine Verknüpfung von zwei Isometrien ist wiederum eine Isometrie.

14.1.4 Satz 3

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine Basis von V.

φ ist genau dann eine Isometrie, wenn

$$(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) \;=\; (e_i, e_j)$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt.

14.1.5 Satz 4

Seien V, W euklidische Vektorräume, sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine Orthonormalbasis von V und sei $\{f_1, .., f_n\}$ eine Orthonormalbasis von W.

Dann gibt es genau eine Isometrie $\varphi : V \to W$ mit $\varphi(e_i) = f_i$ für $1 \leq i \leq n$.

14.2 Orthogonale Gruppen

14.2.1 Satz 1

Eine Isometrie $\varphi : V \to V$ ist stets bijektiv.

14.2.2 Definition

Sei $V = (V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum.

$$O(V) \;=\; \{\varphi : V \to V \mid \varphi \text{ ist Isometrie}\}$$

bildet die ***allgemeine orthogonale Gruppe*** von $(V, (\ ,\ ))$.

14.2.3 Drehungen

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $(\ ,\ )$ das Standardskalarprodukt.

Die Menge aller Drehungen ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \leq \alpha < 2\pi \right\}$$

und bildet eine Untergruppe von $O(V)$. Es handelt sich sogar um die spezielle orthogonale Gruppe $SO(\mathbb{R})$ bezüglich $(\mathbb{R}^2, (\ ,\ ))$.

14.2.4 Spiegelungen

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum und sei $a \in V$ mit $a \neq 0$.

Dann ist die Isometrie

$$\begin{aligned} S_a : V &\rightarrow V \\ x &\mapsto x - \frac{2(a,x)}{(a,a)}a \end{aligned}$$

eine Spiegelung an der zu a orthogonalen Hyperebene

$$H_a = \{x \in V \mid (a,x) = 0\}.$$

14.2.5 Definition

Sei $V = (V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum.

$$SO(V) = \{\varphi : V \rightarrow V \mid \varphi \in O(V) \text{ und } \det(\varphi) = 1\}$$

bildet die ***spezielle orthogonale Gruppe***.

14.2.6 Satz 2

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$.

Dann ist jede orthogonale Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ Produkt von höchstens n Spiegelungen.

14.3 Isometrien und Matrizen

14.3.1 Definition

Sei $\varphi : V \rightarrow W$ eine Isometrie, sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine Basis von V und sei $\{f_1, .., f_n\}$ eine Basis von W.

Die Matrix

$$\mathbb{M}(\varphi, \{e_1, .., e_n\}, \{f_1, .., f_n\})$$

heißt dann ***orthogonale Matrix*** bezüglich φ.

14.3.2 Satz 1

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum, sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine Basis von V und sei $\varphi : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Seien weiter

$$G = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \qquad \text{mit} \qquad g_{ij} = (e_i, e_j)$$

und

$$A = \mathbb{M}(\varphi, \{e_1, .., e_n\})$$

zwei $n \times n$ Matrizen.

Dann ist φ genau dann eine Isometrie, wenn $A^t G A = G$ gilt.

A nennt man dann orthogonal bezüglich G.

14.3.3 Satz 2

Sei A eine $n \times n$ Matrix.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) A ist eine orthogonale Matrix.

(2) Es gilt $A^t A = E$.

(3) Es gilt $A^t = A^{-1}$.

14.3.4 Satz 3

Die Determinante einer orthogonalen $n \times n$ Matrix ist ± 1.

Es gilt also

$$\begin{array}{rclll} \det(\varphi) & = & \pm 1 & \text{für alle } \varphi \in O(V) & \quad\text{und} \\ \det(\varphi) & = & +1 & \text{für alle } \varphi \in SO(V). & \end{array}$$

Beweis

Siehe in der Aufgabe 14.5.1.

14.3.5 Satz 4

Alle Eigenwerte einer orthogonalen $n \times n$ Matrix sind ± 1.

Beweis

Sei φ eine Isometrie, sei $x \in V$ mit $x \neq 0$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$(x, x) \;=\; (\varphi(x), \varphi(x)) \;=\; (\lambda x, \lambda x) \;=\; \lambda^2 (x, x).$$

Da $(x, x) \neq 0$ folgt gerade die Behauptung. □

Bemerkung

Wie die Drehmatrizen $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ zeigen, gibt es orthogonale Matrizen ohne reelle Eigenwerte.

14.4 Anwendung und Beispiele

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie und M die orthogonale Matrix bezüglich φ sowie der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

Soll nun ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ auf die Isometrie φ angewendet werden, so berechnet sich $\varphi(a)$ über die orthogonale Matrix M:

$$\varphi(a) \;=\; M \cdot a \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

14.4.1 Spiegelungen in der Ebene

Folgende orthogonale Matrizen sind Beispiele für Spiegelungen im $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Spiegelung an der } x \text{ Achse}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Spiegelung an der } y \text{ Achse}$$

$$\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \qquad \text{Spiegelung an der Geraden } y = mx$$

Alle orthogonale Matrizen zu Spiegelungen haben die Determinante -1.

Beispiel

Soll der Punkt $(3, 4)$ an der x Achse gespiegelt werden, so gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

14.4.2 Drehungen in der Ebene

Folgende orthogonale Matrizen sind Beispiele für Drehungen im $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Drehung um } \pi/2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Drehung um } \pi/4$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad \text{Drehung um } \alpha$$

Alle orthogonale Matrizen zu Drehungen haben die Determinante $+1$.

Beispiel

Soll der Punkt $(3,4)$ um $90°$ gedreht werden, so gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

14.4.3 Projektionen in der Ebene

Folgende orthogonale Matrizen sind Beispiele für Projektionen im $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{Projektion auf die } x \text{ Achse} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{Projektion auf die } y \text{ Achse} \\ \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix} & \text{Projektion auf die Gerade } y = mx \end{array}$$

Alle Matrizen zu Projektionen haben die Determinante 0. Es handelt sich dabei also nicht um orthogonale Matrizen.

Beispiel

Soll der Punkt $(3,4)$ auf die x Achse projiziert werden, so gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

14.5 Aufgaben

14.5.1 Aufgabe 1

Zeige, dass die Determinante einer orthogonalen Matrix ± 1 ist.

Lösung

Für orthogonale Matrizen A gilt

$$A^t G A = G,$$

dabei ist G die durch das Skalarprodukt festgelegte Matrix.

Es gilt $\det(G) \neq 0$ und $\det(A^t) = \det(A)$.

Demnach folgt

$$\begin{aligned} \det(A^t G A) &= \det(G) \\ \det(A^t)\det(G)\det(A) &= \det(G) \\ \det(A)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Es gilt also $\det(A)^2 = 1$ und damit folgt $\det(A) = \pm 1$.

15 Hauptachsentransformation

15.1 Selbstadjungte Abbildungen

15.1.1 Definition

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum.

Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt eine ***selbstadjungierte Abbildung***, wenn für alle $x, y \in V$

$$(\varphi(x), y) \ = \ (x, \varphi(y))$$

gilt.

15.1.2 Satz 1

Die Matrix jeder selbstadjungierten Abbildung hat mindestens einen reellen Eigenwert.

15.1.3 Satz 2

Die lineare Abbildung einer symmetrischen Matrix ist eine selbstadjungierte Abbildung.

15.1.4 Spektralsatz

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum und sei $\varphi : V \to V$ eine selbstadjungierte Abbildung.

Dann gibt es eine Orthonormalbasis $\{e_1, .., e_n\}$ von V aus lauter Eigenvektoren von φ.

Die Matrix $\mathbb{M}(\varphi, \{e_1, .., e_n\})$ hat dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit den reellen Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_n$.

Bemerkungen

Dieser Satz wird auch Hauptachsentransformationssatz oder Hauptsatz über selbstadjungierte Abbildungen genannt.

Zusammengefasst ergeben die letzten beiden Sätze gerade, dass jede symmetrische Matrix auch diagonalisierbar ist.

15.2 Hauptachsentransformation

Eine Hauptachsentransformation einer symmetrischen Matrix M ist eine Koordinatentransformation durch eine geeignete orthogonale Matrix A.

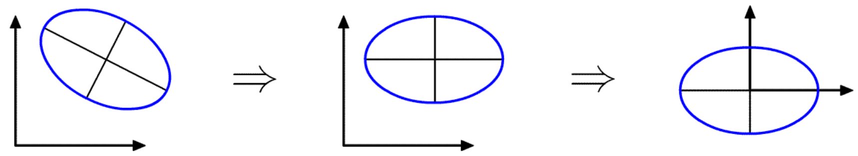


Abbildung 3

Durch den Spektralsatz folgt zunächst ein dafür notwendiger Satz:

15.2.1 Satz 1

Sei $(V, (\ ,\ ))$ ein euklidischer Vektorraum und sei

$$(\ ,\ )' : V \times V \to V$$

ein weiteres Skalarprodukt auf V.

Dann gibt es eine Orthonormalbasis von V, die auch für $(\ ,\ )'$ noch eine Orthogonalbasis ist.

15.2.2 Das Verfahren der Hauptachsentransformation

Sei $\{e_1, .., e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und sei

$$M = \mathbb{M}(\varphi, \{e_1, .., e_n\}, \{e_1, .., e_n\})$$

eine symmetrische Matrix mit zugehöriger Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Mx. \end{aligned}$$

Um eine Hauptachsentransformation von M durchzuführen berechnet man zunächst die Eigenwerte $\lambda_1, .., \lambda_n$ von M und konstruiert eine Orthonormalbasis aus den Eigenvektoren.

Sei

$$A \;:=\; (\tilde{x}_1, .., \tilde{x}_n)$$

die Matrix aus den normierten Eigenvektoren $\tilde{x}_1, .., \tilde{x}_n$ von M.

Dann erhält man durch

$$C \;:=\; A^t \cdot M \cdot A.$$

die entsprechende Hauptachsentransformation von M.

15.2.3 Beispiel

Sei $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Dann ist

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R}^2 &\;\to\; \mathbb{R} \\ (x, y) &\;\mapsto\; (x, y) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; xy \end{aligned}$$

die zugehöhrige ***quadratische Form***, also eine ***Kurve*** im $\mathbb{R}^2$ (siehe quadratische Form auf Seite 156).

Um die Hauptachsentransformation durchzuführen, müssen nun die Eigenwerte bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - \frac{1}{4} \;=\; 0 \end{aligned}$$

Somit sind $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ die Eigenwerte von M. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

als normierte Eigenvektoren erhält man somit

$$\tilde{e}_1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \tilde{e}_2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man erhält nun die Matrix A aus den normierten Eigenvektoren:

$$A \;=\; (\tilde{e}_1,\, \tilde{e}_2) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich nun die transformierte Matrix

$$\begin{aligned} C \;=\; A^t \cdot M \cdot A \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die nun zur Matrix A gehörige quadratische Form ist

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R}^2 \;&\to\; \mathbb{R} \\ (x,y) \;&\mapsto\; (x,y) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2. \end{aligned}$$

Der Graph dieser Kurve im $\mathbb{R}^2$ entspricht dem Graph der ursprünglichen Kurve, nur wurde er nun so um den Ursprung gedreht, dass er in Normalform vorliegt.

Es handelt sich hierbei um eine Hyperbel.

Weitere Beispiele

Siehe dazu in den Beispielaufgaben zum Kapitel Quadriken ab Seite 175.

16 Teilweise geordnete Mengen

16.1 Definitionen und Sätze

16.1.1 Definition

Sei M eine beliebige Menge.

Die Menge M zusammen mit einer ***Relation*** $\leq$ auf M heißt eine ***teilweise geordnete Menge*** oder auch eine ***partiell geordnete Menge*** auf M, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:

(TGM1) $x \leq x$

(TGM2) aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$

(TGM3) aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$

Schreibweise: $(M, \leq)$.

16.1.2 Beispiel 1

Sei V ein Vektorraum und sei

$$M \ := \ \{W \mid W \subset V \text{ Untervektorraum}\}$$

die Menge aller Untervektorräumen von V. Dann wird M durch die Inklusionsrelation

$$W_1 \leq W_2 \quad :\Leftrightarrow \quad W_1 \subset W_2$$

mit $W_1, W_2 \in M$ zu einer teilweise geordneten Menge.

16.1.3 Beispiel 2

Sei X eine beliebige Menge und sei $M = P(X)$ die Potenzmenge von X. Durch die Inklusionsrelation

$$X_1 \leq X_2 \quad :\Leftrightarrow \quad X_1 \subset X_2$$

mit $X_1, X_2 \subset X$ wird M zu einer teilweise geordneten Menge.

16.1.4 Definition

Eine teilweise geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt ***total geordnet***, wenn für alle $x, y \in M$

$$x \leq y \quad \text{oder} \quad y \leq x$$

gilt.

16.1.5 Beispiel

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ werden mit der üblichen "Kleiner-Gleich-Relation" zu total geordneten Mengen.

16.1.6 Definition

Eine total geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt ***wohl geordnet***, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) Jede nicht leere Menge $N \subset M$ hat ein kleinstes Element $n \in N$.

(2) Zu jeder nicht leeren Menge $N \subset M$ gibt es ein $n \in N$, so dass für alle $x \in N$ gerade $n \leq x$ gilt.

16.1.7 Beispiel

Mit der üblichen "Kleiner-Gleich-Relation" ist $\mathbb{N}$ eine wohl geordnete Menge, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ hingegen nicht.

In der Mengenlehre stellte sich die Frage, ob jede Menge wohl geordnet werden kann. Die Antwort ist ja und wird durch die folgende Sätze geklärt.

16.1.8 Definition

Sei $(M, \leq)$ eine teilweise geordnete Menge und seien $a, b \in M$.

Eine ***obere Schranke*** für a und b ist ein Element $s \in M$ mit $a \leq s$, $b \leq s$. Gilt $s \leq s'$ für alle oberen Schranken s', so ist s die ***kleinste obere Schranke***.

Schreibweise: $a \vee b$.

Eine ***untere Schranke*** für a und b ist ein Element $s \in M$ mit $s \leq a$, $s \leq b$. Gilt $s' \leq s$ für alle unteren Schranken s', so ist s die ***größte untere Schranke***.

Schreibweise: $a \wedge b$.

16.1.9 Beispiel 1

Sei V ein Vektorraum und sei

$$M := \{W \mid W \subset V \text{ Untervektorraum}\}$$

eine teilweise geordnete Menge mit der Relation

$$W_1 \leq W_2 \quad :\Leftrightarrow \quad W_1 \subset W_2.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} W_1 \vee W_2 &= W_1 + W_2 \\ W_1 \wedge W_2 &= W_1 \cap W_2 \end{aligned}$$

16.1.10 Beispiel 2

Sei X eine beliebige Menge und sei $M = P(X)$ (die Potenzmenge von X) eine teilweise geordnete Menge mit der Relation

$$X_1 \leq X_2 \quad :\Leftrightarrow \quad X_1 \subset X_2.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} X_1 \vee X_2 &= X_1 \cup X_2 \\ X_1 \wedge X_2 &= X_1 \cap X_2 \end{aligned}$$

16.1.11 Satz 1

Sei $(M \leq)$ eine teilweise geordnete Menge.

Existieren für alle $a, b \in M$ eine kleinste untere und eine größte obere Schranke in M, dann bildet M mit den Verbandsverknüpfungen $a \vee b$ und $a \wedge b$ einen so genannten ***Verband***.

16.2 Zornsches Lemma

16.2.1 Auswahlaxiom

Sei I eine beliebige Indexmenge und sei $(M_i)_{i \in I}$ eine durch I indizierte Menge von nicht leeren Mengen.

Dann gibt es eine Abbildung

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} M_i$$

mit $f(i) \in M_i$ für alle $i \in I$.

16.2.2 Wohlordnungssatz

Jede Menge kann mittels geeigneter Relation wohl geordnet werden.

16.2.3 Zornsches Lemma

Sei $(M, \leq)$ eine teilweise geordnete Menge, für die jede Kette $N \subset M$, das heißt jede total geordnete Teilmenge N von M, eine obere Schranke $m' \in M$ in N besitzt.

Dann besitzt $(M, \leq)$ mindestens ein maximales Element, es gibt also ein $m \in M$, so dass aus $m \leq x$ für alle $x \in M$ gerade $m = x$ folgt.

16.2.4 Satz 1

Das Auswahlaxiom, der Wohlordnungssatz und das Zornsche Lemma sind äquivalente Aussagen.

16.2.5 Satz 2

Jeder beliebiege Vektorraum V über einem Körper K hat eine Basis.

Beweis

Sei M die Menge aller Teilmengen $X \subset V$, die nur aus linear unabhängigen Vektoren besteht. Es soll gelten $X \leq X'$, wenn $X \subset X'$ ist. Damit wird M wie üblich zu einer teilweise geordneten Menge. Durch das Zornsche Lemma soll nun bewiesen werden, dass das maximale Element m aus M eine Basis von V ist.

Die Kettenbedingung ist offenbar erfüllt, somit sei $m \in M$ ein maximales Element von $(M, \leq)$.

Angenommen m erzeugt nicht ganz V, dann gibt es ein $x \in V$, das linear unabhängig zu den Vektoren aus m ist. Sei nun $\tilde{m} = m \cup \{x\}$. Dann gilt aber gerade $m < \tilde{m}$, was ein Widerspruch zur Maximalität von m ist. Somit gibt es kein solches x und m erzeugt wirklich ganz V und ist als System von linear unabhängigen Vektoren eine Basis von V. □

16.3 Abbildungen

16.3.1 Definition

Seien $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ teilweise geordnete Mengen und sei $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung.

f heißt eine ***Abbildung teilweise geordneter Mengen***, wenn für alle

$x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \leq x_2$ auch

$$f(x_1) \ \leq \ f(x_2)$$

in Y gilt.

16.4 Aufgaben

16.4.1 Aufgabe 1

Sei $M = \{1, 2, 3, .., 12\}$ und seien $a, b \in M$.

Es gelte

$$a \leq b \quad :\Leftrightarrow \quad a \text{ teilt } b.$$

Gib eine möglichst übersichtliche graphische Darstellung der teilweise geordneten Menge $(M, \leq)$ an.

Lösung

Beispiel: 3 teilt 6, daher steht die 3 in der graphische Darstellung weiter unten und ist mit der 6 durch eine Linie verbunden. Insgesamt ergibt sich folgende Abbildung:

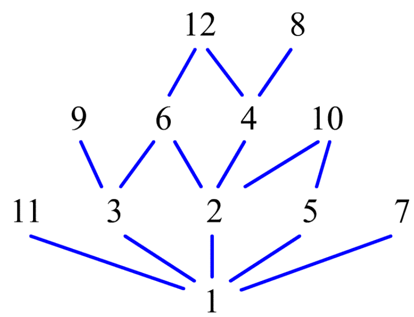


Abbildung 4

17 Gruppen

17.1 Definitionen und Sätze

Sei G eine Menge und sei

$$\begin{array}{rcl} \circ : G \times G & \rightarrow & G \\ (g,h) & \mapsto & g \circ h \end{array}$$

eine Abbildung.

G ist genau dann eine ***Gruppe***, wenn gilt:

(GRP1) Assozialtivgesetz: $(g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k) \quad$ für alle $g, h, k \in G$.

(GRP2) Linkseins: Es gibt $e \in G$ mit $e \circ g = g \quad$ für alle $g \in G$.

(GRP3) Linksinverses: Es gibt $g' \in G$ mit $g' \circ g = e \quad$ für alle $g \in G$.

Schreibweise: $(G, \circ)$.

Die Abbildung $\circ$ heißt ***Gruppenmultiplikation***.

17.1.1 Satz 1

Die eindeutig bestimmte Linkseins e ist auch eine Rechtseins.

17.1.2 Satz 2

Zu jedem Linksinversen $g \in G$ gibt es auch ein Rechtsinvers $g^{-1} \in G$.

17.1.3 Definition

Eine Gruppe G heißt ***abelsche*** oder ***kommutative*** Gruppe, wenn für alle $g, h \in G$

$$g \circ h \;=\; h \circ g$$

gilt.

17.1.4 Beispiel

$\mathbb{Z}$ ist mit der üblichen Addition als Gruppenmultiplikation eine kommutative Gruppe. Alle Axiome lassen sich leicht nachprüfen.

17.1.5 Definition

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, sei X eine beliebige Menge und sei

$$\begin{array}{rcl} \circ : G \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & g \circ x \end{array}$$

eine Abbildung.

Dann ***operiert*** die Gruppe G von links auf der Menge X, wenn gilt:

(1) $(g \cdot h) \circ x = g \circ (h \circ x)$ für alle $g, h \in G$ und $x \in X$.

(2) $e \circ x = x$ für alle $x \in X$ und e als Einselement von G.

17.1.6 Defninitionen und Rechenregeln

Sei G eine beliebige Gruppe.

Dann gelte bzw. gilt für alle $g, h \in G$ und alle $n, m \in \mathbb{Z}$:

(1) $g^n := (g \circ g \circ \ldots \circ g)$ (n-mal)

(2) $g^0 := e$

(3) $g^{-n} := (g^n)^{-1}$

(4) $g^n \circ g^m = g^{n+m}$

(5) $(g^n)^m = g^{nm}$

(6) $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$

17.1.7 Defninition

Seien G, H zwei Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ eine Abbildung.

Dann heißt φ ein ***Gruppenhomomorphismus***, wenn für alle $g, h \in G$ gilt:

$$\varphi(g \circ h) = \varphi(g) \circ \varphi(h).$$

φ heißt ein ***Gruppenisomorphismus***, wenn φ ein Gruppenhomomorphismus und zusätzlich auch noch bijektiv ist.

17.2 Untergruppen

17.2.1 Definition

Sei G eine Gruppe und sei $H \subset G$ eine Teilmenge von G.

H ist eine ***Untergruppe*** von G, wenn gilt:

(1) Das Einselement e von G ist auch Element von H.

(2) $g \circ h^{-1} \in H \quad$ für alle $g, h \in H$.

17.2.2 Satz 1

Eine Teilmenge H einer Gruppe G mit dem Einselement e ist also genau dann eine Untergruppe von G, wenn für alle $g, h \in H$ gilt:

(1) $e \in H$.

(2) $g \circ h \in H$.

(3) $g^{-1} \in H$.

17.2.3 Satz 2

Eine Untergruppe H einer Gruppe G ist mit der Gruppenmultiplikation von G selber eine Gruppe.

17.2.4 Satz 3

Sei $\varphi : G \to H$ ein beliebiger Gruppenhomomorphismus.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\varphi) &= \{\varphi(g) \mid g \in G\} \text{ ist eine Untergruppe von } H \\ \ker(\varphi) &= \{g \in G \mid \varphi(g) = e\} \text{ ist eine Untergruppe von } G \end{aligned}$$

17.2.5 Satz 4

Alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ sind von der Form

$$n\mathbb{Z} = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

mit $n \in \mathbb{N}$.

Beweis

Siehe 23.5.1 auf Seite 213.

17.2.6 Definition

Sei G eine Gruppe sei H eine Untergruppe von G und sei $g \in G$ beliebig.

$gH := \{g \circ h \mid h \in H\} \subset G$ heißt eine ***Linksnebenklasse*** von H in G.

$Hg := \{h \circ g \mid h \in H\} \subset G$ heißt eine ***Rechtsnebenklasse*** von H in G.

17.2.7 Satz 5

Zwei Linksnebenklassen g_1H und g_2H sind entweder gleich oder disjunkt. Die Menge aller Linksnebenklassen von G nach H wird mit G/H bezeichnet.

Zwei Rechtsnebenklassen Hg_1 und Hg_2 sind entweder gleich oder disjunkt. Die Menge aller Rechtsnebenklassen von G nach H wird mit $H \backslash G$ bezeichnet.

Beweis

Siehe 23.5.2 auf Seite 213.

17.2.8 Definition

Sei G eine Gruppe, seien H_1, H_2 Untergruppen von G und sei $g \in G$ beliebig.

$H_1gH_2 := \{h_1 \circ g \circ h_1 \mid h_1 \in H_1,\ h_2 \in H_2\} \subset G$ heißt eine ***Doppelnebenklasse*** nach H_1 und H_2 in G.

17.2.9 Satz 6

Zwei Doppelnebenklassen $H_1g_1H_2$ und $H_1g_2H_2$ sind entweder gleich oder disjunkt.

17.2.10 Defninition und Satz

Sei G eine Gruppe sei X eine Menge und es operierre G auf X von links.

Die Teilmengen $Gx := \{g \circ x \mid g \in G\} \subset X$ mit $g \in G$ heißen ***Bahnen*** oder ***Orbits*** von G in X. Sie ergeben eine disjunkte Zerlegung von X.

$\mathrm{Stab}(x) := \{g \in G \mid g \circ x = x\} \subset G$ heißt ***Stabilisator*** von x in G und bildet eine Untergruppe von G.

$\mathrm{Zent}(x) := \{g \in G \mid g \circ x = x \circ g\} \subset G$ heißt ***Zentralisator*** von x in G und bildet eine Untergruppe von G.

17.3 Ordnungen

17.3.1 Definition

Sei G eine Gruppe.

Die Ordnung $|G|$ von G ist die Anzahl der Elemente in G. Gilt $|G| < \infty$, so ist G eine endliche Gruppe, andernfalls eine unendliche Gruppe.

17.3.2 Definition

Sei G eine Gruppe, sei $g \in G$ und sei $n \in \mathbb{N}$.

Gilt $g^n = e$ und ist n mit dieser Eigenschaft minimal, so ist die Ordnung $\operatorname{ord}(g)$ des Elementes g gerade n. Existiert kein solches n, so ist die Ordnung von g unendlich.

17.3.3 Satz 1

Sei G eine endliche Gruppe.

Dann sind alle Elemente aus g von endlicher Ordnung, es gilt also gerade $\operatorname{ord}(g) < \infty$ für alle $g \in G$.

Beweis

Da G endlich ist, gibt es $i, j \in \mathbb{N}$ mit $j < i$ und $g^i = g^j$. Dann gilt aber auch

$$g^{i-j} \;=\; g^i g^{-j} \;=\; g^j g^{-j} \;=\; e$$

und somit hat g endliche Ordnung. □

17.3.4 Satz 2

Sei G eine Gruppe und sei $\operatorname{ord}(g) = n$ für ein $g \in G$.

Dann ist

$$\langle g \rangle \;:=\; \{g^0, g^1, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$$

die kleinste Untergruppe von G, die g enthält.

17.3.5 Satz 3

Sei G eine Gruppe und sei $H \subset G$ eine Untergruppe von G.

Dann gilt $|g_1 H| = |g_2 H|$ für alle $g_1, g_2 \in G$.

17.3.6 Satz 4

Sei G eine Gruppe und sei $H \subset G$ eine endliche Untergruppe von G.

Dann gilt $|gH| = |H|$ für alle $g \in G$.

17.3.7 Satz 5

Sei G eine endliche Gruppe und sei $H \subset G$ eine Untergruppe von G.

Dann gilt $|G| = |G/H| \cdot |H|$.

17.3.8 Satz von Lagrange

Sei G eine endliche Gruppe und sei $H \subset G$ eine Untergruppe von G.

Dann ist $|H|$ ein Teiler von $|G|$.

Beweis

Siehe 23.5.3 auf Seite 214.

17.3.9 Satz 6

Sei G eine endliche Gruppe und sei $g \in G$.

Dann ist $\operatorname{ord}(g)$ ein Teiler von $|G|$.

17.3.10 Satz 7

Seien G, H zwei endliche Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

Dann gilt:

(1) $|G/\ker(\varphi)| \cdot |\ker(\varphi)| \;=\; |G|$.

(2) $|\operatorname{Im}(\varphi)| \cdot |\ker(\varphi)| \;=\; |G|$.

(3) $|G/\ker(\varphi)| \;=\; |\operatorname{Im}(\varphi)|$.

17.4 Normalteiler und Quotientengruppen

17.4.1 Definition

Sei G eine Gruppe und sei N eine Untergruppe von G.

N heißt ein ***Normalteiler*** von G, wenn für alle $g \in G$

$$gNg^{-1} \;=\; N \qquad \Leftrightarrow \qquad gN \;=\; Ng$$

gilt.

17.4.2 Beispiele

(1) Sei K ein beliebiger Körper.

Sei weiter $GL(n,K)$ die lineare Gruppe, sei $SL(n,K)$ die spezielle lineare Gruppe und sei H die Menge aller Diagonalmatrizen. Dann sind wie man leicht zeigen kann $SL(n,K)$ und auch H Untergruppen von $GL(n,K)$, aber nur $SL(n,K)$ ist auch ein Normalteiler, H hingegen nicht.

(2) Sei S_n die Gruppe aller Permutationen von $\{1,..,n\}$. Dann ist die alternierende Untergruppe

$$A_n \;=\; \{\pi \in S_n \mid \operatorname{sgn}(\pi) = +1\}$$

ein Normalteiler von S_n. Für $n \geq 5$ ist A_n sogar der einzige nicht triviale Normalteiler.

17.4.3 Satz 1

Seien G, H zwei Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

Dann ist $\ker(\varphi)$ ein Normalteiler von G.

Beweis

Es wird nur die Normalteilereigenschaft gezeigt:

Sei $h \in \ker(\varphi)$ und sei $g \in G$ beliebig. Dann gilt

$$\varphi(ghg^{-1}) \;=\; \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) \;=\; \varphi(g)e\varphi(g^{-1}) \;=\; e.$$

Somit folgt $g\ker(\varphi)g^{-1} \subset \ker(\varphi)$ für alle $g \in G$. Analog gilt aber auch

$$g^{-1}\ker(\varphi)g \;\subset\; \ker(\varphi)$$

und es folgt $\ker(\varphi) \subset g\ker(\varphi)g^{-1}$. Dies zeigt gerade die Gleichheit. □

17.4.4 Satz 2

Sei G ein Gruppe, sei N ein Normalteiler von G und sei G/N die Menge der Nebenklassen von N in G.

Dann ist G/N mit der Verknüpfung

$$(g_1N) \circ (g_2N) \;:=\; g_1g_2N$$

selber eine Gruppe.

17.4.5 Definition

Sei G ein Gruppe, sei N ein Normalteiler von G und sei G/N die Menge der Nebenklassen von N in G mit der zugehörige Verknüpfung

$$(g_1N) \circ (g_2N) \;=\; g_1g_2N.$$

Dann heißt $(G/N, \circ)$ eine ***Quotientengruppe***.

17.4.6 Beispiel 1

Sei $(\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe mit dem Normalteiler $3\mathbb{Z} = \{.., -6, -3, 0, 3, 6, ..\}$.

Die Quotientengruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ gesteht dann aus genau drei Elementen:

$$\begin{array}{rcccl} \overline{0} & = & 0 + 3\mathbb{Z} & = & \{.., -6, -3, 0, 3, 6, ..\} \\ \overline{1} & = & 1 + 3\mathbb{Z} & = & \{.., -5, -2, 1, 4, 7, ..\} \\ \overline{2} & = & 2 + 3\mathbb{Z} & = & \{.., -4, -1, 2, 5, 8, ..\} \end{array}$$

17.4.7 Beispiel 2

Sei V ein Vektorraum und sei $W \subset V$ ein Untervektorraum.

Dann ist $(V, +)$ eine Gruppe und W ein Normalteiler von V.

Demnach ist $(V/W, +)$ mit der Verknüpfung

$$(v_1 + W) + (v_2 + W) \;=\; (v_1 + v_2) + W$$

wiederrum eine Gruppe, nämlich genau die Quotientengruppe $(V/W, +)$.

17.4.8 Definition

Sei G ein endliche Gruppe.

G heißt ***zyklisch***, wenn es ein Element $g \in G$ gibt, so dass

$$G \;=\; \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

gilt.

17.4.9 Beispiel

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe.

Alle Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ sind von der Form $n\mathbb{Z} = \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Die Quotientengruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ bestehend aus den n verschiedenen Nebenklassen

$$0 + n\mathbb{Z},\ 1 + n\mathbb{Z},\ 2 + n\mathbb{Z},\ \ldots,\ (n-1) + n\mathbb{Z}$$

und ist eine zyklische Gruppe durch das ***erzeugende Element*** $1 + n\mathbb{Z}$.

Beweis

Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Dann gilt

$$m + n\mathbb{Z} \;=\; (1 + n\mathbb{Z}) + (1 + n\mathbb{Z}) + \ldots + (1 + n\mathbb{Z}) \qquad \text{(m-mal)}$$

und somit folgt $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) = \{(1 + n\mathbb{Z})^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. □

17.4.10 Satz 3

Jede zyklische Gruppe G der Ordnung n ist isomorph zu $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

17.4.11 Definition

Seien G, H zwei Gruppen.

Das ***direkte Produkt***

$$G \times H \;:=\; \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$$

wird gebildet durch

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) \;:=\; (g_1 g_2, h_1 h_2).$$

17.4.12 Satz 4

Seien G und H beliebige Gruppen mit gleicher Gruppenmultiplikation.

Dann ist auch $G \times H$ eine Gruppe.

17.4.13 Definition

Sei G eine beliebige Gruppe.

G heißt ***einfach***, wenn $\{e\}$ und G die einzigen Normalteiler von G sind.

17.4.14 Beispiel

Ist p ein Primzahl, dann ist $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ eine einfache Gruppe.

Beweis

Zunächst gilt $|G| = p$.

Sei nun H eine Untergruppe von G. Dann ist $|H|$ nach dem Satz von Lagrange ein Teiler von $|G|$. Demnach gilt $|H| = 1$ oder $|H| = p$, da p Primzahl ist und es folgt $H = \{e\}$ oder $H = G$. □

17.5 Zykelschreibweise

17.5.1 Satz 1

Sei S_n die Menge aller Permutationen von $\{1, .., n\}$ (siehe Seite 73).

$(S_n, \circ)$ bildet durch die Komposition von zwei Funktionen als Gruppenmultiplikation eine nicht kommutative Gruppe.

Elemente aus S_n werden in der Regel mit π bezeichnet.

17.5.2 Beispiel

Seien $\pi_1, \pi_2 \in S_3$, dabei

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

das heißt $\pi_1(1) = 2,\ \pi_1(2) = 3,\ \pi_1(3) = 1$ usw. Dann gilt

$$(\pi_2 \circ \pi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ (2 & 3 & 1) \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

17.5.3 Zerlegung in Zyklen

Eine andere Schreibweise für eine Permuatation ist die ***Zykelschreibweise***.

Jede Permutation kann als Produkt von elementfremden so genannte ***Zyklen*** zerlegt werden:

Sei $\pi \in S_7$ mit

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt für π

$$1 \mapsto 4 \mapsto 7 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 1 \ldots \qquad \text{und} \qquad 2 \mapsto 3 \mapsto 2 \ldots.$$

Daraus ergibt sich nun die Zykelschreibweise für π:

$$\pi \;=\; (14567)(23)$$

Die Permutation π besteht in diesem Beispiel also aus einem 5er und einem 2er Zykel.

Beinhaltet eine Permutation in ihrer Zykelschreibweise 1er Zykel, so werden diese in der Regel weggelassen:

$$\pi \;=\; (2568)(17)(2)(3) \;=\; (2568)(17)$$

17.5.4 Verknüpfen von Zyklen

Beispiel 1

Seien $\pi_1, \pi_2 \in S_5$ zwei Permutation mit den Zykelschreibweisen

$$\pi_1 = (123)(45) \qquad \text{und} \qquad \pi_2 = (35)(14).$$

Dann gilt

$$\pi_2 \circ \pi_1 \;=\; (35)(14) \circ (123)(45) \;=\; (125)(34).$$

Es wird also mit der 1 angefangen, $\pi_2(\pi_1(1))$ ermittelt und mit dem Ergebnis analog weitergemacht.

Beispiel 2

Sei $\pi \in S_3$ mit $\pi = (231)$. Dann gilt

$$\pi^3 = (231) \circ (231) \circ (231) = (1)(2)(3) = id.$$

Da π^3 die Identität ergibt, hat π genau die Ordnung 3.

17.5.5 Definition

Sei π eine Permutation in Zykelschreibweise.

Die ***Länge*** eines Zykels ist gleich der Anzahl der Zahlen in ihm.

17.5.6 Satz 2

Sei π eine Permutation in Zykelschreibweise.

Dann ist die Ordnung von π das kleinste gemeinsame Vielfache der Längen der einzelnen Zykel.

17.5.7 Beispiele

$\pi = (123)(45)$ hat die Ordnung 6.
$\pi = (123)(4)(5)$ hat die Ordnung 3.
$\pi = (123)(456)$ hat die Ordnung 3.

17.6 Aufgaben

17.6.1 Aufgabe 1

Prüfe, welche der folgenden Teilmengen Untergruppen der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ der reellen Zahlen sind.

(1) $H = 2\mathbb{Z} = \{2u \mid u \in \mathbb{Z}\}$

(2) $H = \mathbb{Q}_- = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq 0\}$

(3) $H = 2\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$

(4) $H = \mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$

Lösung

Das Einselement e von $(\mathbb{R}, +)$ ist 0. Es müssen also folgende Axiome geprüft werden:

(1) H ist eine Teilmenge von G

(2) $e = 0 \in H$

(3) $a + b^{-1} = a - b \in H \quad$ für alle $a, b \in H$

Wie man leicht sieht, ist jeweils H eine Teilmenge von G und es gilt $0 \in H$. Somit muss nur noch der dritte Punkt überprüft werden.

Teil 1

Es gilt für alle $a, b \in H$

$$2a + (2b)^{-1} = 2a - 2b = 2(a - b) \in H,$$

somit ist H eine Untergruppe von G.

Teil 2

Sei $a = -2, \ b = -3$. Dann gilt

$$a + b^{-1} = -2 + 3 = 1 \notin H,$$

somit ist H keine Untergruppe von G.

Teil 3

Sei $a = 0, \ b = 2$. Dann gilt

$$a + b^{-1} = 0 + (-2) = -2 \notin H,$$

somit ist H keine Untergruppe von G.

Teil 4

Sei $a = 0, \ b = 1$. Dann gilt

$$a + b^{-1} = 0 + (-1) = -1 \notin H,$$

somit ist H keine Untergruppe von G.

17.6.2 Aufgabe 2

Untersuche, welche der folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{R}, \cdot\,)$ der reellen Zahlen in sich.

(1) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x$

(2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$

(3) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1$

(4) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x-1)$

(5) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{-1}$

Lösung

Es muss jeweils geprüft werden, ob für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$\varphi(a \cdot b) \;=\; \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

gilt.

Teil 1

Es gilt

$$\varphi(a \cdot b) \;=\; 2(ab) \;=\; 2ab \;\neq\; 2a2b \;=\; \varphi(a) \cdot \varphi(b),$$

somit ist φ kein Gruppenhomomorphismus.

Teil 2

Es gilt

$$\varphi(a \cdot b) \;=\; (ab)^2 \;=\; a^2b^2 \;=\; \varphi(a) \cdot \varphi(b),$$

somit ist φ ein Gruppenhomomorphismus.

Teil 3

Es gilt

$$\varphi(a \cdot b) \;=\; 1 \;=\; 1 \cdot 1 \;=\; \varphi(a) \cdot \varphi(b),$$

somit ist φ ein Gruppenhomomorphismus.

Teil 4

Es gilt

$$\varphi(a \cdot b) \;=\; ab - 1 \;\neq\; (a-1) \cdot (b-1) \;=\; \varphi(a) \cdot \varphi(b),$$

somit ist φ kein Gruppenhomomorphismus.

Teil 5

Es gilt
$$\varphi(a \cdot b) \;=\; (ab)^{-1} \;=\; a^{-1}b^{-1} \;=\; \varphi(a) \cdot \varphi(b),$$
somit ist φ ein Gruppenhomomorphismus.

17.6.3 Aufgabe 3

Bestimme alle möglichen Ordnungen von Elementen der Gruppe S_5.

Lösung

Es sind alle möglichen Zykelzerlegungen zu untersuchen. Die Ordnung ist dann das kleinste gemeinsame Vielfache der Längen der einzelnen Zykel.

Folgende Zykelzerlegungen und dementsprechend folgende Ordnungen sind möglich:

$$\begin{array}{lcl}
(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot) & \Rightarrow & \text{Ordnung} = 1 \\
(\cdot\ \cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot) & \Rightarrow & \text{Ordnung} = 2 \\
(\cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot)(\cdot) & \Rightarrow & \text{Ordnung} = 2 \\
(\cdot\ \cdot\ \cdot)(\cdot)(\cdot) & \Rightarrow & \text{Ordnung} = 3 \\
(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)(\cdot) & \Rightarrow & \text{Ordnung} = 4 \\
(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot) & \Rightarrow & \text{Ordnung} = 5 \\
(\cdot\ \cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot) & \Rightarrow & \text{Ordnung} = 6
\end{array}$$

Jedes Element aus S_5 hat also die Ordnung 1,2,3,4,5 oder 6.

17.6.4 Aufgabe 4

Sei φ eine Abbildung, die gegeben wird durch

$$\begin{array}{rcl}
\varphi : \mathbb{Z}/105\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \\
(a + 105\mathbb{Z}) & \mapsto & (a + 3\mathbb{Z},\, a + 5\mathbb{Z},\, a + 7\mathbb{Z}).
\end{array}$$

(1) Zeige, dass φ ein Gruppenisomorphismus ist.

(2) Bestimme $\varphi^{-1}(1 + 3\mathbb{Z}, 0 + 5\mathbb{Z}, 0 + 7\mathbb{Z})$.

Lösung Teil 1

Seien $(a + 105\mathbb{Z}), (b + 105\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}/105\mathbb{Z}$ beliebig.

Dann gilt:

$$\begin{array}{rl}
& \varphi((a + 105\mathbb{Z}) + (b + 105\mathbb{Z})) \\
= & \varphi((a + b) + 105\mathbb{Z}) \\
= & ((a + b) + 3\mathbb{Z},\, (a + b) + 5\mathbb{Z},\, (a + b) + 7\mathbb{Z})
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= ((a+3\mathbb{Z})+(b+3\mathbb{Z}),\ (a+5\mathbb{Z})+(b+5\mathbb{Z}),\ (a+7\mathbb{Z})+(b+7\mathbb{Z})) \\
&= (a+3\mathbb{Z},\ a+5\mathbb{Z},\ a+7\mathbb{Z})+(b+3\mathbb{Z},\ b+5\mathbb{Z},\ b+7\mathbb{Z}) \\
&= \varphi(a+105\mathbb{Z})+\varphi(b+105\mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

Damit ist gezeigt, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist. Es muss also nur noch die Bijektivität gezeigt werden.

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{Z}/105\mathbb{Z}| &= 105 \\
|\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}| &= |\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}|\cdot|\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}|\cdot|\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}| = 3\cdot 5\cdot 7 = 105
\end{aligned}
$$

Da das kleinste gemeinsame Vielfache von $(3, 5, 7)$ gerade 105 ist, gilt

$$\ker(\varphi) = \{0+105\mathbb{Z}\}.$$

Somit folgt

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{Z}/105\mathbb{Z}| &= |\ker(\varphi)|\cdot|\mathrm{Im}(\varphi)| \\
105 &= 1\cdot|\mathrm{Im}(\varphi)|.
\end{aligned}
$$

Demnach gilt

$$|\mathrm{Im}(\varphi)| = |\mathbb{Z}/105\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}|\cdot|\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}|\cdot|\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}| = 105$$

und somit ist φ auch bijektiv.

Lösung Teil 2

Gesucht ist das Urbild von $(1+3\mathbb{Z},\ 0+5\mathbb{Z},\ 0+7\mathbb{Z})$ in $\mathbb{Z}/105\mathbb{Z}$.

Da φ bijektiv ist, gibt es zu jedem Element aus $\mathrm{Im}(\varphi)$ genau ein Element aus $\mathbb{Z}/105\mathbb{Z}$.

Es gilt:

$$\varphi(70+105\mathbb{Z}) = (70+3\mathbb{Z},\ 70+5\mathbb{Z},\ 70+7\mathbb{Z}) = (1+3\mathbb{Z},\ 0+5\mathbb{Z},\ 0+7\mathbb{Z})$$

Somit ist $\{70+105\mathbb{Z}\}$ die zu bestimmende einelementige Menge.

17.6.5 Aufgabe 5

Sei G eine Gruppe und seien $a, b \in G$.

Der ***Kommutator*** $[a, b]$ von a und b in G ist

$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1} \in G.$$

Es bezeichnet

$$[G, G] := \{[a, b] \mid a, b \in G\} \subset G$$

die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe von G.

Zeige, dass $[G, G]$ sogar ein Normalteiler von G ist.

Lösung

Da bereits bekannt ist, dass $[G,G]$ eine Untergruppe von G bildet, ist nur noch die Normalteilereigenschaft

$$g[G,G]g^{-1} \;=\; [G,G] \qquad \text{für alle } g \in G$$

zu zeigen.

Zunächst einmal gilt für alle $x, g \in G$:

(1) $(gxg^{-1})^{-1} = g(gx)^{-1} = gx^{-1}g^{-1}$

(2) $(g^{-1}x^{-1}g)^{-1} = g^{-1}(g^{-1}x^{-1})^{-1} = g^{-1}xg$

Sei nun $[a,b] \in [G,G]$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
g[a,b]g^{-1} &= gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} \\
&= gag^{-1}gbg^{-1}ga^{-1}g^{-1}gb^{-1}g^{-1} \\
&= gag^{-1} \cdot gbg^{-1} \cdot ga^{-1}g^{-1} \cdot gb^{-1}g^{-1} \\
&\overset{(1)}{=} gag^{-1} \cdot gbg^{-1} \cdot (gag^{-1})^{-1} \cdot (gbg^{-1})^{-1} \\
&= [gag^{-1}, gbg^{-1}] \;\in\; [G,G]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a,b] &= aba^{-1}b^{-1} \\
&= gg^{-1}agg^{-1}bgg^{-1}a^{-1}gg^{-1}b^{-1}gg^{-1} \\
&\overset{(2)}{=} g \cdot g^{-1}ag \cdot g^{-1}bg \cdot (g^{-1}ag)^{-1} \cdot (g^{-1}bg)^{-1} \cdot g^{-1} \\
&= g[g^{-1}ag, g^{-1}bg]g^{-1} \;\in\; g[G,G]g^{-1}
\end{aligned}$$

Somit gilt $g[G,G]g^{-1} = [G,G]$.

17.6.6 Aufgabe 6

Sei $\mathbb{F}_q$ ein Körper aus q Elementen, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $GL(n, \mathbb{F}_q)$ die Gruppe aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen.

Berechne die Ordnung der Gruppe $GL(n, \mathbb{F}_q)$.

Lösung

Betrachtet man zunächst eine beliebige Matrix $A \in GL(n, \mathbb{F}_q)$, so ist A invertierbar und besteht aus n Spaltenvektoren $x_1, .., x_n \in \mathbb{F}_q^n$.

Da A invertierbar ist, sind die n Spaltenvektoren linear unabhängig.

Betrachtet man den ersten Spaltenvektor $x_1 = (x_{11}, .., x_{1n})$, so gilt $x_{1i} \in \mathbb{F}_q$ mit $i = 1, .., n$. Somit sind zunächst q^n unterschiedliche Vektoren x_1

gefunden in $\mathbb{F}_q^n$. Da A aber invertierbar ist, kann x_1 nicht der Nullvektor sein und es ergeben sich genau

$$q^n - 1$$

Möglichkeiten für die Wahl von x_1.

Nach gleicher Überlegung gibt es nun zunächst auch $q^n - 1$ Möglichkeiten für die Wahl des zweiten Spaltenvektors x_2. Da aber x_1 und x_2 linear unabhängig sein müssen, dürfen keine Vielfachen des ersten Spaltenvektors auftreten. Dies sind nach Abzug einer Möglichkeit durch die 0 genau $q - 1$. Es ergeben sich somit für den zweiten Spaltenvektor genau

$$q^n - 1 - (q - 1) \; = \; q^n - q$$

Möglichkeiten.

Für x_3 bleiben nun q^n Möglichkeiten abzüglich Vielfacher der beiden ersten Vektoren, dies sind genau q^2. Somit gibt es genau

$$q^n - q^2$$

Wahlmöglichkeiten für x_3.

Analog erhält man für den Spaltenvektor x_m mit $1 \leq m \leq n$ genau

$$q^n - q^{m-1}$$

Möglichkeiten der Wahl.

Die gesuchte Gruppenordnung ist das Produkt der Wahlmöglichkeiten der einzelnen Spaltenvektoren, also

$$\begin{aligned} |GL(n, \mathbb{F}_q)| &= (q^n - 1) \cdot (q^n - q) \cdot \ldots \cdot (q^n - q^{n-1}) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i). \end{aligned}$$

18 Ringe

18.1 Definitionen und Sätze

Sei R eine Menge und seien "$+$" die Addition sowie "$\cdot$" die Multiplikation als Verknüpfungen von Elementen aus R.

R ist genau dann ein ***Ring***, wenn gilt:

(RNG1) $(R,+)$ ist eine kommutative Gruppe.

(RNG2) AG: $(rs)t = r(st)$ für alle $r,s,t \in R$.

(RNG3) DG: $r(s+t) = rs+rt$ und $(r+s)t = rt+st$ für alle $r,s,t \in R$.

Schreibweise: $(R,+,\cdot)$.

Gilt sogar $rs = sr$ für alle $r,s \in R$, so ist R ein ***kommutativer Ring***.

18.1.1 Beispiele

(1) Jeder Körper ist auch ein Ring.

(2) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ bildet mit üblicher Addition und Multiplikation einen Ring.

(3) Die Menge der $n \times n$ Matrizen über einem Körper K $M(n,K)$ bildet mit der Matrixaddition und Matrixmultiplikation einen nicht kommutativen Ring.

18.1.2 Der Polynomring

Sei K ein beliebiger Körper.

$$K[x] = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a \in K \right\}$$

bezeichnet den so genannten ***Polynomring*** über dem Körper K. Dabei wird definiert:

$$+ : \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

$$\cdot: \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{k=0}^{n+m} \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j \Big) x^k$$

$K[x]$ bildet sogar einen kommutativen Ring.

18.1.3 Definition

Seien R, S zwei Ringe und sei $\varphi : R \to S$ eine Abbildung.

φ heißt ein ***Ringhomomorphismus***, wenn für alle $r, x \in R$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) &= \varphi(a) + \varphi(b), \\ \varphi(a \cdot b) &= \varphi(a) \cdot \varphi(b). \end{aligned}$$

φ heißt ein ***Ringisomorphismus***, wenn φ ist ein Rinhomomorphismus und zusätzlich noch bijektiv ist.

18.1.4 Satz 1

Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

Dann ist $\ker(\varphi)$ eine additive Untergruppe von $(R, +)$.

18.2 Ideale

18.2.1 Definition

Sei R ein beliebiger Ring und sei $I \subset R$.

I heißt ***linksseitiges Ideal*** von R, wenn $(I, +)$ eine Untergruppe von $(R, +)$ ist und $RI \subset I$ gilt.

I heißt ***rechtsseitiges Ideal*** von R, wenn $(I, +)$ eine Untergruppe von $(R, +)$ ist und $IR \subset I$ gilt.

I heißt ***Ideal***, wenn I ein links- und rechtsseitiges Ideal ist.

18.2.2 Beispiel

Im Ring $R = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist jedes Ideal von der Form $I = n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Der Quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bildet einen Ring der Restklassen.

18.2.3 Satz 1

In einem kommutativen Ring R ist jedes Links- oder Rechtsideal I auch ein Ideal.

18.2.4 Satz 2

Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

Dann ist $\ker(\varphi)$ ein Ideal von R.

18.2.5 Satz 3

Sei R ein Ring mit einem Ideal I.

Dann bildet $(R/I, +)$ eine additive Gruppe.

18.2.6 Satz 4

Sei R ein Ring mit einem Ideal I. Durch

$$(r+I)\cdot(s+I) \;:=\; r\cdot s+I \qquad \text{für alle } \; rs \in R$$

als Multiplikation bildet R/I einen Ring.

18.2.7 Beispiel

Sei $R/I = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ und es sei $\overline{a} := a + 13\mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{18}^6 + \overline{11}^5 &= \overline{5}^6 + (\overline{-2})^5 \\ &= \overline{25}\cdot\overline{25}\cdot\overline{25} + (\overline{-8})\cdot\overline{4} \\ &= \overline{-1}\cdot\overline{-1}\cdot\overline{-1} + \overline{-32} \\ &= \overline{-1} + \overline{7} \\ &= \overline{6}. \end{aligned}$$

18.2.8 Homomorphisatz

Seien R und S zwei kommutative Ringe und sei $I \subset R$ ein Ideal von R.

Weiter sei $\varphi : R \to S$ ein beliebiger Ringhomomorphismus mit $I \subset \ker(\varphi)$.

Dann ist auch

$$\begin{aligned} p : R \; &\to R/I \\ r \quad &\mapsto \quad r+I \end{aligned}$$

ein Ringhomomorphismus und es gibt einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\overline{\varphi} : R/I \to S$ mit $\overline{\varphi} \circ p = \varphi$.

Es kommutiert also das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & S \\ & \text{R/I} \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Folgerung und Anwendung

Seien R und S zwei kommutative Ringe und sei $I \subset R$ ein Ideal von R.

Wenn nun gezeigt werden soll, dass R/I isomorph ist zu S, so muss eine Abbildung $\varphi : R \to S$ gefunden werden, für die gilt:

(1) φ ist ein Ringhomormorphismus.

(2) φ ist surjektiv.

(3) Es ist $\ker(\varphi) = I$.

Genau dann folgt aus dem Homomorphisatz, dass R/I isomorph ist zu S.

Dieser Satz gilt des Weiteren auch für Gruppen und Normalteiler statt Ringen und Idealen.

18.2.9 Definition

Sei R ein kommutativer Ring.

R heißt ***nullteilerfrei***, wenn für alle $r, s \in R$ mit $rs = 0$ folgt $r = 0$ oder $b = 0$.

Ist R nullteilerfrei und hat R ein Einselement, so ist R ein ***Integritätsring***.

18.2.10 Beispiele

(1) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist nicht nullteilerfrei, denn es gilt $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4} = \overline{0}$ und $\overline{2} \neq \overline{0}$.

(2) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit einer Primzahl p ist nullteilerfrei.

18.2.11 Definition

Sei R ein kommutativer Ring mit einem Ideal I.

I heißt ***Hauptideal***, wenn I von einem Element $a \in R$ erzeugt wird, wenn also $I = R \cdot a$ gilt.

18.2.12 Definition

Sei R ein kommutativer Ring.

R heißt ein ***Hauptidealring***, wenn R ein Integritätsring und jedes Ideal I in R ein Hauptideal ist.

18.2.13 Beispiel 1

Der Ring der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Hauptidealring, denn jedes Ideal ist von der Form $n\mathbb{Z}$.

18.2.14 Beispiel 2

Sei K ein beliebiger Körper und sei $K[x]$ der Polynomring über K.

Dann ist $K[x]$ ein Hauptidealring.

Beweisskizze

Der Beweis verläuft sehr ähnlich zum Beweis, dass bei den ganzen Zahlen jede Untergruppe und auch jedes Ideal ein Hauptideal ist (siehe 23.5.1 auf Seite 213).

Bei der Division mit Rest betrachtet man dabei den Grad des Polynoms.

18.2.15 Definition

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und sei M ein Ideal von R.

M heißt ***maximal***, wenn $M \neq R$ gilt und alle Ideale I von R eine Teilmenge von M sind.

18.2.16 Definition

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und sei P ein Ideal in R.

P heißt ***Primideal***, wenn aus $a \cdot b \in P$ folgt $a \in P$ oder $b \in P$.

18.2.17 Satz 5

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement 1. Dann gilt:

(1) P ist Primideal $\Leftrightarrow$ R/P ist ein Integritätsring.

(2) M ist maximales Ideal $\Leftrightarrow$ R/M ist ein Körper.

(3) Jedes maximale Ideal ist auch ein Primideal.

Beweis

Siehe 23.5.4 auf Seite 214.

18.2.18 Beispiel 1

Sei $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ der Ring der ganzen Zahlen und sei p eine Primzahl.

Dann ist $p\mathbb{Z}$ ein maximales und ein Primideal, da $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sowohl ein Integritätsring als auch ein Körper ist.

18.2.19 Beispiel 2

Sei $\mathbb{R}[x]$ der Polynomring über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Dann ist

$$\langle x\rangle \;=\; \mathbb{R}[x]x \;=\; \left\{\sum_{i=0}^{r} a_i x^i x \mid r \in \mathbb{N},\; a_i \in \mathbb{R}\right\}$$

ein maximales Ideal, da $\mathbb{R}[x]/\langle x\rangle = \mathbb{R}$ ein Körper ist. Somit ist $\langle x\rangle$ auch ein Primideal.

18.2.20 Beispiel 3

Sei $\mathbb{Z}[x]$ der Polynomring über den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

Dann ist

$$\langle x\rangle \;=\; \mathbb{Z}[x]x \;=\; \left\{\sum_{i=0}^{r} a_i x^i x \mid r \in \mathbb{N},\; a_i \in \mathbb{Z}\right\}$$

ein Primideal, aber kein maximales Ideal, da $\mathbb{Z}[x]/\langle x\rangle = \mathbb{Z}$ ein Integritätsring aber kein Körper ist.

18.3 Moduln

18.3.1 Definition

Sei R ein beliebiger Ring und sei $(M, +)$ eine kommutative Gruppe mit einer zusätzlichen Multiplikation $\cdot : R \times M \to M$.

M ist genau dann ein ***R*-Linksmodul**, wenn für alle $r, s \in R$ und $m, n \in M$ gilt:

(MDL1) AG: $(rs)m \;=\; r(sm)$.

(MDL2) DG: $(r + s)m \;=\; rm + sm$ und $r(m + n) \;=\; rm + rn$

(MDL3) Für das Einselement $1 \in R$ gilt $1m \;=\; m$.

Entsprechend gilt die Definition auch für ***R*-Rechtsmodul**.

Ist M kommutativ, so ist jedes R-Linksmodul auch ein R-Rechtsmodul und M heißt dann ein R-Modul.

18.3.2 Satz 1

Ist R sogar ein Körper, dann ist jeder R-Modul genau ein Vektorraum.

18.3.3 Beispiel

Ist $R = \mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen, so sind $\mathbb{Z}$-Moduln genau kommutative Gruppen mit

$$m \cdot a \;=\; (a + a + \ldots + a) \qquad \text{(m-mal)}.$$

18.3.4 Definition

Sei R ein Ring, seien M, N zwei R-Moduln und sei $\varphi : M \to N$ eine beliebige Abbildung.

φ heißt ein ***Modulhomomorphismus***, wenn für alle $a, b \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) &= \varphi(a) + \varphi(b), \\ \varphi(a \cdot b) &= \varphi(a) \cdot \varphi(b). \end{aligned}$$

φ heißt ein ***Modulisomorphismus***, wenn φ ein Modulhomomorphismus und zusätzlich noch bijektiv ist.

18.3.5 Satz 2

Sei R ein Ring und seien M, N zwei R-Moduln.

Die Menge aller Modulhomomorphismen

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \;=\; \{\varphi : M \to N \mid \varphi \text{ ist Modulhomomorphismus}\}$$

mit der Verknüpfung

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) \;:=\; (\varphi_1)(x) + (\varphi_2)(x)$$

bildet eine additive Gruppe.

18.3.6 Definition

Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul und sei $N \subset M$.

N heißt ein ***R-Untermodul***, wenn gilt:

(1) $(N, +)$ ist eine kommutative Untergruppe von $(M, +)$.

(2) $r \cdot n \in N$ für alle $r \in R, n \in N$.

18.3.7 Satz 3

Ist R ein Körper, dann ist jeder R-Untermodul genau ein Untervektorraum.

18.3.8 Definition und Satz

Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul und sei $N \subset M$ ein R-Untermodul.

Die Quotientengruppe $(M/N, +)$ mit

$$\begin{array}{rcll} (a+b)N & := & (a+N)+(b+N) & \text{für alle } a,b \in M \\ r(m+N) & := & rm+N & \text{für alle } r \in R, m \in M \end{array}$$

bildet einen R-Modul.

18.3.9 Satz 4

Sei R ein Körper, sei V ein R-Modul und sei W ein R-Untermodul.

Dann ist die Quotientengruppe M/N die Menge aller affinen Teilräumen parallel zu W.

18.3.10 Definition und Satz

Sei R ein Ring und seien M, N zwei R-Moduln.

Dann ist

$$M \oplus N \;:=\; \{(m,n) \in M \times N \mid m \in M, n \in N\}$$

mit den Verknüpfungen

$$\begin{array}{rcl} (m_1,n_1)+(m_2,n_2) & := & (m_1+m_2, n_1+n_2), \\ r(m,n) & := & (rm, rn), \end{array}$$

dabei $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ und $r \in R$, ein R-Modul.

18.4 Aufgaben

18.4.1 Aufgabe 1

Sei $\mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen und sei $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ ein Restklassenring.

Berechne in diesem Restklassenring:

(1) $(\overline{7})^{1000} + \overline{1}$.

(2) $(\overline{5})^4 + (\overline{4})^{10}$.

(3) Löse die Gleichung $x^2 = \overline{30}$.

Lösung Teil 1

Es gilt

$$(\overline{7})^{1000} \;=\; (\overline{7})^{2^{500}} \;=\; (\overline{49})^{500} \;=\; (\overline{0})^{500} \;=\; (\overline{0}),$$

somit folgt $(\overline{7})^{1000} + \overline{1} = \overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$.

Lösung Teil 2

Es gilt

$$\begin{aligned}(\overline{5})^4 &= (\overline{5})^{2^2} = (\overline{25})^2 = (\overline{625}) = (\overline{37}) = (\overline{-12}),\\ (\overline{4})^{10} &= (\overline{16})^5 = (\overline{16})^2 \cdot (\overline{16})^2 \cdot (\overline{16}) = (\overline{11}) \cdot (\overline{11}) \cdot (\overline{16})\\ &= (\overline{319}) = (\overline{25}),\end{aligned}$$

somit folgt $(\overline{5})^4 + (\overline{4})^{10} = \overline{-12} + \overline{25} = \overline{13}$.

Lösung Teil 3

Es sind alle Elemente x aus $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, .., \overline{48}\}$ gesucht, für die $x^2 = \overline{30}$ gilt.

Man findet die zwei Lösungen $x_1 = \overline{18}$ und $x_2 = \overline{31}$.

18.4.2 Aufgabe 2

Berechne im Ring $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$ das Element

$$a = (\overline{189556} + \overline{1})^{221} + (\overline{30}^{2025} - \overline{1}) \cdot \overline{25}.$$

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned}a &= (\overline{189556} + \overline{1})^{221} + (\overline{30}^{2025} - \overline{1}) \cdot \overline{25}\\ &= (\overline{22} + \overline{1})^{221} + (\overline{-1}^{2025} - \overline{1}) \cdot \overline{25}\\ &= \left(\overline{23}^{13}\right)^{17} + (\overline{-1} - \overline{1}) \cdot \overline{25}\\ &= \overline{15}^{17} + \overline{-2} \cdot \overline{25}\\ &= \overline{23} + \overline{-19} = \overline{4}.\end{aligned}$$

18.4.3 Aufgabe 3

Berechne im Ring $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$ das Element

$$b = (\overline{25})^{-1}.$$

Lösung

Es gilt $b = (\overline{25})^{-1} = (\overline{-4})^{-1}$.

Für b muss also

$$(\overline{-4}) \cdot b = \overline{1}$$

gelten. Durch ausprobieren erhält man

$$(\overline{-4}) \cdot \overline{7} = \overline{-28} = \overline{1}.$$

Demnach gilt $b = \overline{7}$.

18.4.4 Aufgabe 4

Berechne im Restklassenring $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x+1)$ das Element

$$c \;=\; (\overline{x^2+x+1})^4.$$

Lösung

$\mathbb{F}_2$ ist der Körper aus den Elementen 0 und 1, somit ist $\mathbb{F}_2[x]$ der Polynomring über dem Körper $\mathbb{F}_2$ aus zwei Elementen.

Es gilt

$$\begin{aligned} c &= (\overline{x^2+x+1})^4 \\ &= (\overline{x^8+4x^7+10x^6+16x^5+19x^4+16x^3+10x^2+4x+1})_{\mathbb{F}_2} \\ &= \overline{x^8+x^4+1}. \end{aligned}$$

Um das Element c nun möglichst einfach darzustellen, ist der Rest folgender Polynomdivision über dem Körper $\mathbb{F}_2$ wichtig:

$$\begin{array}{rcccl} (x^8+x^4+1) & : & (x^3+x+1) & = & x^5-x^3-x^2+\frac{x^2+1}{x^3+x+1} \\ -\,(x^8+x^6+x^5) & & & & \\ \hline (-x^6-x^5+x^4+1) & & & & \\ -(-x^6-x^4-x^3) & & & & \\ \hline (-x^5+x^3+1) & & & & \\ -(-x^5-x^3-x^2) & & & & \\ \hline (x^2+1) & & & & \end{array}$$

Somit gilt nun $c = \overline{x^2+1}$.

18.4.5 Aufgabe 5

Berechne im Restklassenring $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x+1)$ das Element

$$d \;=\; (\overline{x+1})^{-1}.$$

Lösung

Für das Element d muss

$$\overline{x+1}\cdot d \;=\; \overline{1}$$

gelten. Durch ausprobieren erhält man

$$\begin{aligned} \overline{x+1}\cdot\overline{x^2+x} &= \overline{x^3+x^2+x^2+x} \;=\; \overline{x^3+x} \\ &= \overline{x^3+3-1}+\overline{1} \;=\; \overline{x^3+3+1}+\overline{1} \;=\; \overline{1}. \end{aligned}$$

Demnach gilt $d = \overline{x^2+x}$.

18.4.6 Aufgabe 6

Sei $W = \mathbb{R}(1,1,0,0) + \mathbb{R}(0,0,1,1)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$.

Prüfe, welche der folgenden Paare x und y dieselbe Restklasse $\overline{x} = \overline{y}$ im Quotientenvektorraum $\mathbb{R}^4/W$ ergeben.

(1) $(1,0,0,0)$ und $(0,0,0,1)$.

(2) $(3,-3,4,4)$ und $(4,-2,5,5)$.

(3) $(1,0,-1,0)$ und $(2,0,1,1)$.

Lösung

Es ist jeweils zu überprüfen, ob gilt:

$$y \in \{x + \lambda(1,1,0,0) + \mu(0,0,1,1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Teil 1

Sei $D := \{(1,0,0,0) + \lambda(1,1,0,0) + \mu(0,0,1,1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Es gibt kein λ und kein μ, so dass $y = (0,0,0,1) \in D$.

Demnach ergeben $\overline{x} = \overline{y}$ unterschiedliche Restklassen.

Teil 2

Sei $D := \{(3,-3,4,4) + \lambda(1,1,0,0) + \mu(0,0,1,1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Sei $\lambda = 1$ und $\mu = 1$. Dann gilt

$$(3,-3,4,4) + (1,1,0,0) + (0,0,1,1) \;=\; (3,-2,5,5) \;=\; y.$$

Somit ist $x \in D$, also ergeben $\overline{x} = \overline{y}$ dieselbe Restklasse.

Teil 3

Sei $D := \{(1,0,-1,0) + \lambda(1,1,0,0) + \mu(0,0,1,1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Es gibt kein λ und kein μ, so dass $y = (2,0,1,1) \in D$.

Demnach ergeben $\overline{x} = \overline{y}$ unterschiedliche Restklassen.

18.4.7 Aufgabe 7

Sei $W = \mathbb{R}(1,1,0,0) + \mathbb{R}(0,0,1,1)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$. Finde eine Basis für den Quotientenvektorraum $\mathbb{R}^4/W$.

Lösung

Nach der Dimensionsformel $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(W) + \dim(\mathbb{R}^4/W)$ hat $\mathbb{R}^4/W$ also die Dimension 2.

Seien $\overline{f_1} = f_1 + W$ und $\overline{f_2} = f_1 + W$ zwei linear unabhängige Vektoren im Quotientenvektorraum $\mathbb{R}^4/W$.

Damit $\overline{f_1}$ und $\overline{f_2}$ eine Basis bilden, ist nur zu beachten, dass f_1 und f_2 linear unabhängig zu $(1, 1, 0, 0)$ und zu $(0, 0, 1, 1)$ sind.

Somit bilder zum Beispiel $\{\overline{(0, 1, 1, 0)}, \overline{(1, 0, 0, 1)}\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4/W$.

18.4.8 Aufgabe 8

Sei $G = (\mathbb{R}, +)$ eine Gruppe, $X = \mathbb{R}$ eine Menge.

Prüfe, welche der Abbildungen $g : G \times X \to X$ Gruppenoperationen definieren.

(1) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (r, x) \mapsto r \cdot x.$

(2) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (r, x) \mapsto x.$

(3) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (r, x) \mapsto x - r.$

Lösung

Das Einselement e von $(\mathbb{R}, +)$ ist 0. Für eine Gruppenoperation muss also gelten:

(1) $(0, x) \mapsto x \quad$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(2) $(g_1 \cdot g_2) \circ x = g_1 \circ (g_2 \circ x) \quad$ für alle $g_1, g_2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$

Teil 1

Es gilt

$$(0, x) \;\mapsto\; 0 \cdot x \;=\; 0 \;\neq\; x.$$

Somit wird durch g keine Gruppenoperationen definiert.

Teil 2

Es gilt

$$\begin{aligned}(0, x) &\mapsto x,\\ (g_1 \cdot g_2) \circ x &= (g_1 + g_2) \circ x \;=\; x \;=\; g_2 \circ x \;=\; g_1 \circ (g_2 \circ x).\end{aligned}$$

Somit wird durch g eine Gruppenoperationen definiert.

Teil 2

Es gilt

$$\begin{aligned}(0,x) &\mapsto x-0 = x,\\ (g_1\cdot g_2)\circ x &= (g_1+g_2)\circ x = x-g_1-g_2 = x-g_2-g_1\\ &= g_1\circ(x-g_2) = g_1\circ(g_2\circ x).\end{aligned}$$

Somit wird durch g eine Gruppenoperationen definiert.

18.4.9 Aufgabe 9

Sei $R = K[x]$ der Polynomring über einem Körper K.

Prüfe, welche der folgenden Teilmengen $I \subset R$ Ideale sind.

(1) $I = \{f \in K[x] \mid \operatorname{grad}(f) \geq 1\}$.

(2) $I = \{f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_0 + a_1 = 0\}$.

(3) $I = \{f \in K[x] \mid f(1) = 0\}$.

(4) $I = \{f \in K[x] \mid f(0) + f(2) = 0\}$.

Lösung

Damit I ein Ideal von R ist, muss gezeigt werden:

(1) $(I, +)$ ist eine additive Untergruppe von R

(2) $f \cdot g \in I$ für alle $f \in I,\ g \in R$

(3) $g \cdot f \in I$ für alle $f \in I,\ g \in R$

I ist jeweils eine additive Untergruppe von R, dies muss also jeweils nicht mehr überprüft werden.

Teil 1

Sei $f \in I$ beliebig und sei $g \in R$ mit $g(x) = 0$.

Dann gilt $f(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot 0 = 0$, somit folgt $f\cdot g \notin I$, also ist I kein Ideal von R.

Teil 2

Sei $f \in I$ mit $f(x) = x - 1$ und sei $g \in R$ mit $g(x) = 2x$.

Dann gilt $f(x)\cdot g(x) = (x-1)\cdot 2x = 2x^2 - 2x$, somit gilt für $f \cdot g$

$$a_0 + a_1 = 0 + (-2) = -2 \neq 0.$$

Demnach ist $f \cdot g \notin I$, also ist I kein Ideal von R.

Teil 3

Sei $f \in I$ beliebig und sei $g \in R$ beliebig.

Dann gilt

$$f(1) \cdot g(1) \ = \ 0 \cdot g(1) \ = \ 0 \qquad \text{und} \qquad g(1) \cdot f(1) \ = \ g(1) \cdot 0 \ = \ 0.$$

Somit ist $f \cdot g \in I$ und $g \cdot f \in I$, also ist I ist ein Ideal von R.

Teil 4

Sei $f \in I$ mit $f(x) = -x^2 + x + 1$ und sei $g \in R$ mit $g(x) = x + 1$.

Dann gilt $f(x) \cdot g(x) = (-x^2 + x + 1) \cdot (x + 1) = -x^3 + 2x + 1$, somit folgt $(f \cdot g)(0) + (f \cdot g)(2) = 1 + (-3) = -2 \neq 0$. Demnach ist $f \cdot g \notin I$, also ist I kein Ideal von R.

18.4.10 Aufgabe 10

Sei $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$(f_1 + f_2)(x) \ := \ f_1(x) + f_2(x) \qquad \text{und} \qquad (f_1 \cdot f_2)(x) \ := \ f_1(x) \cdot f_2(x).$$

Sei $\alpha \in I$.

Zeige, dass $M_\alpha = \{f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \mid f(\alpha) = 0\}$ ein Ideal von $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ist.

Lösung

M_α ist offenbar eine additive Untergruppe von $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, es ist also noch zu zeigen, dass

$$M_\alpha \cdot \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \ \subset \ M_\alpha$$

gilt. Sei $f(x) \in M_\alpha$ beliebig und $g(x) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ beliebig.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & f(\alpha) \cdot g(\alpha) = 0 \cdot g(\alpha) = 0 \\ \Rightarrow \quad & f(x) \cdot g(x) \in M_\alpha \\ \Rightarrow \quad & M_\alpha \cdot \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \subset M_\alpha \\ \Rightarrow \quad & M_\alpha \text{ ist ein rechtsseitiges Ideal.} \end{aligned}$$

Da $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ kommutativ bezüglich Multiplikation ist, ist M_α sogar wie gefordert ein Ideal.

19 Bilinearformen

19.1 Grundlegende Definitionen

19.1.1 Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Die Abbildung

$$b : V \times V \to K$$

heißt ***Bilinearform***, wenn für alle $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V,\ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} b(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) &= \alpha_1 b(x_1, y) + \alpha_2 b(x_2, y) \\ b(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) &= \beta_1 b(x, y_1) + \beta_2 b(x, y_2) \end{aligned}$$

b heißt ***symmetrische*** Bilinearform, wenn

$$b(x, y) = b(y, x)$$

für alle $x, y \in V$ gilt.

b heißt ***schiefsymmetrische*** Bilinearform, wenn

$$b(x, y) = -b(y, x)$$

für alle $x, y \in V$ gilt.

b heißt ***alternierende*** Bilinearform, wenn

$$b(x, x) = 0$$

für alle $x \in V$ gilt.

Anschaulich definiert $b(x, x)$ gerade die "Länge" eines Vektors $x \in V$.

19.1.2 Definition

Sei $b : V \times V \to K$ eine beliebige Bilinearform.

b heißt ***positiv definit***, wenn für alle $u \in V$ mit $u \neq 0$ gilt: $b(u, u) > 0$.

b heißt ***negativ definit***, wenn für alle $u \in V$ mit $u \neq 0$ gilt: $b(u, u) < 0$.

b heißt ***indefinit***, wenn es $u, v \in V$ gibt mit $b(u, u) > 0$ und $b(v, v) < 0$.

Bemerkung

Ist eine Bilinearform b über einem reellen Vektorraum V symmetrisch und positiv definit, dann ist b ein Skalarprodukt.

Das heißt auch, dass alle Skalarprodukte Beispiele für symmetrische Bilinearformen sind (siehe Seite 96).

19.1.3 Beispiel

Die Abbildung $b : V \times V \to K$ mit $b(x, y) = 0$ ist die triviale Bilinearform.

19.1.4 Definition

Sei K ein beliebiger Körper mit Einselement 1 und sei $p \in K$.

Ist p mit der Eigenschaft

$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{\text{p-mal}} \;=\; 0$$

minimal, dann ist p die ***Charakteristik*** $\operatorname{char}(K)$ von K.

Gibt es kein solches p, dann gilt $\operatorname{char}(K) = 0$.

Bemerkung

Die Charakteristik $\operatorname{char}(K)$ eines Körpers K ist entweder gleich 0 oder gleich einer Primzahl p.

19.1.5 Satz 1

Sei b ein Bilinearform über einem Körper K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Dann gilt:

$$b \text{ ist schiefsymmetrisch} \;\Leftrightarrow\; b \text{ ist alternierend}$$

Beweis

Sei b schiefsymmetrisch. Dann gilt für alle $x \in V$ gerade

$$b(x, x) \;=\; -\, b(x, x),$$

also $2b(x, x) = 0$. Somit gilt $b(x, x) = 0$ und es folgt, dass b alternierend ist.

Sei nun umgekehrt b alternierend. Dann gilt für alle $x, y \in V$

$$\begin{aligned} 0 &= b(x + y, x + y) \\ &= b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y) \;=\; b(x, y) + b(y, x), \end{aligned}$$

was zeigt, dass b dann auch schiefsymmetrisch ist. □

19.1.6 Satz 2

Sei b ein Bilinearform über einem Körper K mit $\mathrm{char}(K) = 2$. Dann gilt

$$b \text{ ist schiefsymmetrisch} \ \Leftrightarrow\ b \text{ ist symmetrisch}$$

19.2 Symmetrische Bilinearformen

19.2.1 Satz 1

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V. Sei weiter

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \ldots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

eine $n \times n$ Matrix.

Dann gibt es genau eine Bilinearform $b : V \times V \to K$ mit

$$b(e_i, e_j) = \beta_{ij} \qquad \text{für} \quad i, j = 1, ..n.$$

Beweis

Seien $x, y \in V$ mit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ und $y = \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j e_j$ mit $\xi_1, \eta_1, .., \xi_n, \eta_n \in K$.

Dann gilt gerade

$$b(x, y) = b\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j b(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} \xi_i \eta_j.$$

Umgekehrt wird nun aber durch diese Rechnung auch b durch die Matrix B eindeutig festgelegt. □

19.2.2 Folgerungen

(1) b ist genau dann symmetrisch, wenn $B = B^t$ gilt.

(2) b ist genau dann schiefsymmetrisch, wenn $B = -B^t$ gilt.

(3) b ist genau dann alternierend, wenn $B = B^t$ gilt und $\beta_{ii} = 0$ falls $\mathrm{char}(K) = 2$ ist.

19.2.3 Satz 2

Sei b eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, sei $\{e_1, ..e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und sei $B = (\beta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ die zu b gehörige symmetrische Matrix, also $\beta_{ij} = b(e_i, e_j)$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) b ist positiv definit.

(2) $\det(\beta_{ij})_{1 \leq i,j \leq r} > 0$ für alle $r \in \{1, .., n\}$.

(3) Alle Eigenwerte von B sind > 0.

19.2.4 Satz 3

Sei b eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, sei $\{e_1, ..e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und sei $B = (\beta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ die zu b gehörige symmetrische Matrix, also $\beta_{ij} = b(e_i, e_j)$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) b ist negativ definit.

(2) $(-1)^r \cdot \det(\beta_{ij})_{1 \leq i,j \leq r} > 0$ für alle $r \in \{1, .., n\}$.

(3) Alle Eigenwerte von B sind < 0.

19.2.5 Beispiele

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist positiv definit und $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ist negativ definit.

19.2.6 Definition

Sei (V, b) ein Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform b. Die Abbildung

$$q : V \to K, \quad x \mapsto b(x, x)$$

heißt die von b induzierte ***quadratische Form***.

(V, q) heißt dann ***quadratischer Raum***.

Eine symmetrische Bilinearform legt also eindeutig die zugehörige quadratische Form fest.

Bemerkung

Sei $M \in \mathbb{M}(n, K)$ eine symmetrische Matrix über einem Vektorraum V. Dann wird auch durch

$$\begin{array}{rcl} q : V & \to & K \\ (x_1, .., x_n) & \mapsto & (x_1, .., x_n) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

eine quadratische Form gegeben. Da es aber zu jeder symmetrischen Matrix auch genau eine Bilinearform gibt, ist diese Aussage zur Definition von quadratischen Formen äquivalent.

19.2.7 Satz 4

Sei (V, q) ein quadratischer Raum.

Dann gilt für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$

$$\begin{array}{rcl} q(x+y) & = & q(x) + q(y) + 2b(x,y) \qquad \text{und} \\ q(\lambda x) & = & \lambda^2 q(x). \end{array}$$

Beweis

Es gilt gerade:

$$\begin{array}{rcl} q(x+y) & = & b(x+y, x+y) \\ & = & b(x, x+y) + b(y, x+y) \\ & = & b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y) \\ & = & q(x) + q(y) + 2b(x,y) \\ q(\lambda x) & = & b(\lambda x, \lambda x) \;=\; \lambda b(x, \lambda y) \;=\; \lambda b^2(x,y) \end{array}$$

□

19.2.8 Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^n$ und seien $x = (x_1, .., x_n)$, $y = (y_1, .., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Dann ist zu der Bilinearform

$$b(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{gerade} \qquad q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

die quadratische Form.

19.2.9 Satz 5

Sei nun umgekehrt (V, q) ein quadratischer Raum, dabei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

Dann wird die zughörige symmetrische Bilinearform gegeben durch

$$b(x, y) \;=\; \frac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big).$$

Dieses Verfahren ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 19.2.7 und heißt auch ***Polarisation***.

19.2.10 Beispiel

Sei Π_3 der Raum aller reellen Polynomfunktionen vom Grad ≤ 3. Dann wird durch

$$\begin{array}{rcl} q : \Pi_3 & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f^2(1) + f^2(2) \end{array}$$

eine quadratische Form gegeben. Man erhält nun durch Polarisation die zugehörige Bilinearform:

$$\begin{aligned} b(f, g) &= \frac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big((f+g)^2(1) + (f+g)^2(2) - f^2(1) - f^2(2) - g^2(1) - g^2(2)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(2(f \cdot g)(1) + 2(f \cdot g)(2)\Big) \\ &= (f \cdot g)(1) + (f \cdot g)(2) \end{aligned}$$

Die Probe zeigt sofort

$$b(f, f) \;=\; (f \cdot f)(1) + (f \cdot f)(2) \;=\; f^2(1) + f^2(2) \;=\; q(f).$$

19.2.11 Definition

Sei (V, b) ein Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform b.

$$\operatorname{rad}(V) \;=\; \{x \in V \mid b(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in V\}$$

heißt das ***Radikal*** des Raumes (V, b).

Das heißt, $\operatorname{rad}(V)$ besteht gerade aus den Vektoren aus V, die bezüglich der Bilinearform b auf allen anderen Vektoren aus V senkrecht stehen.

19.2.12 Satz 6

Sei (V, b) ein Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform b.

Dann ist $\operatorname{rad}(V)$ ein Untervektorraum von V.

Beweis

Es sind wieder die üblichen drei Axiome zu überprüfen.

Es ist klar, dass $0 \in \mathrm{rad}(V)$ gilt. Mit $x \in \mathrm{rad}(V)$ ist aber auch $\lambda x \in \mathrm{rad}(V)$, dies zeigt gerade

$$b(\lambda x, y) \;=\; \lambda b(x, y) \;=\; \lambda 0 \;=\; 0.$$

Weiter ist mit $x_1, x_2 \in \mathrm{rad}(V)$ durch

$$b(x_1 + x_2, y) \;=\; b(x_1, y) + b(x_2, y) \;=\; 0 + 0 \;=\; 0$$

auch $x_1 + x_2 \in \mathrm{rad}(V)$. □

19.2.13 Beispiele

(1) Sei (V, b) mit $b(x, y) = 0$ für alle $x, y \in V$.

Dann gilt $\mathrm{rad}(V) = V$.

(2) Sei $(\mathbb{R}^n, b)$ mit einem beliebigen Skalarprodukt b.

Dann gilt $\mathrm{rad}(V) = \{0\} = 0$.

19.2.14 Definition

Sei (V, b) ein Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform b.

(V, b) heißt ***nicht ausgeartet*** oder ***regulär***, wenn $\mathrm{rad}(V) = 0$ gilt.

(V, b) heißt ***ausgeartet***, wenn $\mathrm{rad}(V) \neq 0$ gilt.

19.2.15 Definition

Sei (V, b) ein Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform b und sei $W \subset V$ ein Untervektorraum von V.

$$W^\perp \;:=\; \{x \in V \mid b(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in W\}$$

heißt das ***orthogonale Komplement*** von W.

19.2.16 Satz 7

Das orthogonale Komplement $W^\perp$ ist ein Untervektorraum von V.

19.2.17 Satz 8

Sei (V, b) ein symmetrischer Raum, sei $W \subset V$ ein Untervektorraum und sei $(W, b|_W)$ ein symmetrischer Raum mit der auf W eingeschränkten Bilinearform b.

Dann gilt

$$W \cap W^{\perp} \;=\; \mathrm{rad}(W).$$

19.2.18 Satz 9

Sei (V, b) ein symmetrischer Raum und seien $W_1, W_2 \subset V$ zwei Untervektorräume von V mit $W_1 \subset W_2$.

Dann gilt

$$W_2^{\perp} \;\subset\; W_1^{\perp}.$$

19.2.19 Satz 10

Sei (V, b) ein symmetrischer Raum, dabei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und b sei nicht ausgeartet. Sei weiter V^* der Dualraum von V.

Es entsteht durch b die Abbildung

$$\begin{array}{rclcl} \varphi : V & \to & V^* & & \\ x & \mapsto & V & \to & K \\ & & y & \mapsto & b(x, y). \end{array}$$

Dabei ist φ ein Isomorphismus und es gilt $\ker(\varphi) = \mathrm{rad}(V)$.

19.2.20 Dimensionsformel

Sei (V, b) endlich dimensional und nicht ausgeartet und sei W ein Untervektorraum von V.

Dann gilt

$$\boxed{\dim(V) \;=\; \dim(W) + \dim(W^{\perp})} \;.$$

Beweis

Siehe 23.6.1 auf Seite 216.

19.2.21 Satz 11

Sei (V, b) endlich dimensional und nicht ausgeartet.

Dann gilt
$$(W^{\perp})^{\perp} \;=\; W.$$

19.2.22 Satz 12

Sei (V, b) endlich dimensional und nicht ausgeartet und sei $W \subset V$ ein Untervektorraum von V.

Dann gilt:

(1) $W^{\perp} \cap W \;=\; 0.$

(2) $W^{\perp} + W \;=\; V.$

19.2.23 Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^2$, seien $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ und sei b eine durch
$$b(x, y) \;:=\; x_1 y_2 + x_2 y_1$$
gegebene Bilinearform. Dann gilt
$$\begin{aligned} b(e_1, e_1) &= b((1,0),(1,0)) \;=\; 0 \qquad \text{und} \\ b(e_2, e_2) &= b((0,1),(0,1)) \;=\; 0. \end{aligned}$$

Sei nun
$$\mathbb{R}_{e_1} \;=\; \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\} \;=\; \{x = (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}\} \;\subset\; \mathbb{R}^2.$$

Dann gilt nach der Dimensionsformel
$$\dim(\mathbb{R}_{e_1}^{\perp}) \;=\; \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\mathbb{R}_{e_1}) \;=\; 2 - 1 \;=\; 1,$$
also folgt $(\mathbb{R}_{e_1}^{\perp}) = \mathbb{R}_{e_1}$. Somit steht $\mathbb{R}_{e_1}$ zu sich selber orthogonal.

19.2.24 Definition

Sei (V, b) ein Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform b. Mit geeigneten Untervektorräumen W_i von V für $i = 1, .., n$ ist
$$V \;=\; W_1 \perp \ldots \perp W_n$$
eine ***orthogonale Zerlegung*** von V.

Es stehen dann also alle Untervektorräume W_i paarweise bezüglich b orthogonal aufeinander und die Summe aller W_i ist gerade V.

19.2.25 Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^2$, seien $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ und sei

$$b(x, y) \;:=\; x_1 y_1 + x_2 y_2$$

eine Bilinearform.

Dann ist

$$\mathbb{R}^2 \;=\; \mathbb{R}(0,1) \perp \mathbb{R}(1,0)$$

eine orthogonale Zerlegung von $\mathbb{R}^2$, denn $W_1 = \mathbb{R} \cdot (0,1)$ und $W_2 = \mathbb{R} \cdot (1,0)$ sind zwei Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ und es gilt

$$b(\lambda \cdot (0,1),\, \mu \cdot (1,0)) \;=\; 0 \qquad \text{für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

19.2.26 Satz 13

Sei (V, q) ein quadratischer Raum.

Dann ist V eine orthogonale Summe eindimensionaler Untervektorräumen.

19.2.27 Definition und Satz

Sei (V, q) ein quadratischer Raum über einem reellen n dimensionalen Vektorraum V.

Dann gibt es eine Basis $\{e_1, .., e_n\}$ von V, so dass

$$V \;=\; \mathbb{R}e_1 \perp \mathbb{R}e_2 \perp \ldots \perp \mathbb{R}e_n$$

die orthogonale Summe eindimensionaler Untervektorräumen ist mit

$$\begin{aligned} q(e_i) &= +1 \qquad \text{für } i = 1, .., r \qquad \text{und} \\ q(e_i) &= -1 \qquad \text{für } i = r+1, .., n. \end{aligned}$$

Dieser Satz wird verallgemeinert im Satz von Sylvester auf Seite 166.

Beweisskizze

Jeder quadratische Raum kann in eine orthogonale Summe eindimensionaler Untervektorräumen zerlegt werden, also in

$$V \;=\; \mathbb{R}e_1 \perp \mathbb{R}e_2 \perp \ldots \perp \mathbb{R}e_n.$$

Sei nun b die zu q gehörige Bilinearform und B' die zu b gehörige symmetrische Matrix. Dann gibt es nach dem Spektralsatz eine Basis $\{e_1, .., e_n\}$ von V, so dass die Matrix B der Bilinearform b nur aus den Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_n$ dargestellt werden kann.

Sortiert man nun so um, dass $b(e_i, e_i) > 0$ für $i = 1, .., r$ und $b(e_i, e_i) < 0$ für $i = r + 1, .., n$ gilt, so erhält man durch

$$\tilde{e}_i \;=\; \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} e_i \qquad \text{für} \;\; i \;=\; 1, .., n$$

die geforderte Basis $\{\tilde{e}_1, .., \tilde{e}_n\}$.

19.3 Orthogonale Gruppen

Für die nun folgenden Definitionen und Sätze wird ein Charakteristik des Körpers K, über dem der Vektorraum V definiert ist, von $\neq 2$ vorausgesetzt.

Die einleitenden Definitionen und Sätze sind sehr ähnlich zu euklidischen Räumen, vergleicher dazu Kapitel 13. Auch die Beweise sind analog zu führen.

19.3.1 Definition

Seien (V, b) und (V', b') zwei quadratische Räume und sei $u : V \to V'$ eine lineare Abbildung.

u heißt eine ***Isometrie*** oder eine ***orthogonale Abbildung***, wenn für alle $x, y \in V$ gilt:

$$b'(u(x), u(y)) \;=\; b(x, y)$$

19.3.2 Definition

Die Menge aller bijektiven Isometrien über einem quadratischen Raum (V, b)

$$O(V, b) \;=\; \{u : (V, b) \to (V, b) \mid u \text{ ist Isometrie}\}$$

heißt ***orthogonale Gruppe***.

19.3.3 Satz 1

Sei V ein Vektorraum mit einer Basis $\{e_1, .., e_n\}$, sei b eine symmetrische Bilinearform auf V mit $G = (g_{ij}) = (b(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$, sei $u : V \to V$ eine lineare Abbildung und sei $A = \mathbb{M}(u, \{e_1, .., e_n\})$ die durch u und der Basis $\{e_1, .., e_n\}$ gegebenen Matrix.

Dann ist u genau dann eine Isometrie, wenn $A^t G A \;=\; G$ gilt.

19.3.4 Satz 2

Die Determinante der Matrix einer Isometrie ist ± 1. Dabei entspricht $+1$ einer Drehung und -1 einer Spiegelung.

19.3.5 Satz 3

Sei $u \in O(V, b)$ eine Isometrie, seien $W_1, W_2 \subset V$ zwei Untervektorräume von V und sei $W_1 \perp W_2$.

Dann gilt auch

$$u(W_1) \perp u(W_2).$$

19.3.6 Beispiel

Sei $(\mathbb{R}^n, b)$ ein symmetrischer Raum mit einem Skalarprodukt b.

Spiegelungen, Drehungen in der Ebene und Drehungen um eine Achse im Raum sind Beispiele für orthogonale Abbildungen.

19.3.7 Satz 4

Sei (V, b) ein quadratischer Raum, sei $V = W_1 \perp W_2$ eine orthogonale Zerlegung von V, sei $u : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $u(W_1) = W_1$ sowie $u(W_2) = W_2$ und seien $u|_{W_1},\ u|_{W_2}$ zwei Isometrien.

Dann ist auch u eine Isometrie.

19.3.8 Satz 5

Sei (V, b) ein quadratischer Raum und sei $a \in V$ mit $b(a, a) \neq 0$.

Dann ist

$$\begin{aligned} s_a : V &\to V \\ x &\mapsto x - 2 \cdot \frac{b(a, x)}{b(a, a)} a \end{aligned}$$

eine orthogonale Abbildung.

s_a ist eine Spiegelung an der Hyperebene $H = (K \cdot a)^{\perp}$.

19.3.9 Wittscher Fortsetzungssatz

Sei (V, b) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum, seien $W, W' \subset V$ zwei Untervektorräume von V, die bezüglich b nicht ausgeartet sind, und es sei $u : W \to W'$ eine Isometrie.

Dann gibt es auch eine Isometrie $\tilde{u} : V \to V$ mit $\tilde{u}|_W = u$.

Das heißt also, dass $\tilde{u}$ eine Fortsetzung von u auf ganz V ist.

19.3.10 Wittscher Kürzungssatz

Seien U, W, W' quadratische Räume, die bezüglich einer Bilinearform b nicht ausgeartet sind, und es gebe eine Isometrie

$$u : U \perp W \;\rightarrow\; U \perp W'.$$

Dann sind W und W' isometrisch.

19.3.11 Satz 6

Sei (V, b) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum, sei $\dim(V) = n$ und sei $u \in O(V, b)$ eine orthogonale Abbildung.

Dann ist u ein Produkt von maximal n Spiegelungen.

19.3.12 Definition

Sei (V, b) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum mit $\dim(V) = 2$.

Existiert ein $e \in V$ mit $e \neq 0$ und

$$b(e, e) \;=\; 0,$$

dann heißt (V, b) eine ***hyperbolische Ebene***.

19.3.13 Satz 7

Sei (V, b) eine hyperbolische Ebene.

Dann gibt es $e, f \in V$ mit

$$b(e, e) \;=\; b(f, f) \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad b(e, f) \;=\; b(f, e) \;=\; 1.$$

Beweis

Siehe 23.6.2 auf Seite 216.

19.3.14 Satz 8

Alle hyperbolischen Ebenen sind zueinander isometrisch.

19.3.15 Satz 9

Sei (V, b) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum und seien $e, f \in V$ mit $e, f \neq 0$ und $b(e, e) = b(f, f) = 0$.

Dann gibt es eine hyperbolische Ebene $H = K \cdot e + K \cdot f \;\subset\; V$ für die gilt:

$$V \;=\; H \perp H^{\perp}.$$

19.3.16 Definition und Satz

Sei (V, b) ein quadratischer Raum.

Dann gibt es eine orthogonale Zerlegung

$$V \;=\; (H_1 \perp \ldots \perp H_r) \perp W$$

aus r hyperbolischen Ebenen und dem so genannten ***anisotropen Raum*** W für den gilt:

$$b(w, w) \;=\; 0 \qquad \text{für alle } w \in W.$$

W ist ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter Untervektorraum von V und heißt auch ***anisotroper Kern*** von V.

19.3.17 Bemerkung

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei V ein Vektorraum über K.

Dann ist jeder anisotrope Kern von (V, b) eindimensional.

19.3.18 Definition

Sei (V, b) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum.

Ein Untervektorraum U von V mit $b|_{U \times U} = 0$ heißt ***isotroper Untervektorraum***.

Ist der Untervektorraum U maximal, so heißt U ***maximal isotroper Untervektorraum***.

19.3.19 Satz 10

Sei (V, b) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum.

Dann operiert die orthogonale Gruppe $O(V, b)$ transitiv auf der Menge der maximal isotropen Untervektorräumen.

19.3.20 Definition

Sei (V, b) ein quadratischer Raum und sei $U \subset V$ ein maximal isotroper Untervektorraum.

Die Dimension $\dim(U)$ heißt der ***Index*** von V.

19.3.21 Satz von Sylvester

Sei (V, b) ein endlich dimensionaler reeller nicht ausgearteter quadratischer Raum über einem Körper K.

Dann gibt es eine Basis $\{e_1, .., e_n\}$ von V, so dass

$$V \;=\; Ke_1 \perp Ke_2 \perp \ldots \perp Ke_n$$

die orthogonale Summe eindimensionaler Untervektorräumen ist mit

$$\begin{aligned} b(e_i, e_i) &= +1 \qquad \text{für } i = 1, .., r \qquad\qquad \text{und} \\ b(e_i, e_i) &= -1 \qquad \text{für } i = r+1, .., n. \end{aligned}$$

Dabei ist r eindeutig bestimmt und der Index von (V, b) ist $\min\{r, n-r\}$.

Das Zahlenpaar $(r, n-r)$ heißt die ***Signatur*** von (V, b).

Bemerkung

(1) Ist $\dim(V) = 2$ und gilt für die Signatur von V gerade $(1, 1)$, so ist V eine hyperbolische Ebene.

(2) Gilt für die Signatur von V gerade $(n, 0)$, so ist V ein euklidischer Vektorraum.

19.4 Alternierende Bilinearformen

Fast alle Definitionen und Sätze für symmetrische Bilinearformen lassen sich genauso oder sehr ähnlich auch auf alternierende Bilinearformen übertragen.

Sei V ein Vektorraum und b eine alternierende Bilinearform, es gilt also $b(x, x) = 0$ für alle $x \in V$. Dann heißt (V, b) ***symplektischer Raum***.

19.4.1 Gleiche Definitionen und Sätze

Sei (V, b) ein symplektischer Raum und sei $W \subset V$ ein Untervektorraum von V.

(1) $x, y \in V$ heißen orthogonal bezüglich b, wenn $b(x, y) = 0$ gilt.

(2) Das Radikal $\operatorname{rad}(V) = \{x \in V \mid b(x, y) = 0 \;\forall\; y \in V\}$ ist ein Untervektorraum von V.

(3) (V, b) heißt nicht ausgeartet, wenn $\operatorname{rad}(V) = \{0\} = 0$ gilt.

(4) $W^\perp := \{x \in V \mid b(x, w) = 0 \text{ für alle } w \in W\}$.

(5) Ist b nicht ausgeartet, so gilt $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$.

(6) Ist $b|_{W \times W}$ nicht ausgeartet, so gilt $V = W \perp W^\perp$.

19.4.2 Definition

Sei (V, b) ein nicht ausgearteter symplektischer Raum mit $\dim(V) = 2$ und sei $\{e, f\}$ eine Basis von V.

Gilt

$$b(e,e) \;=\; b(f,f) \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad b(e,f) \;=\; -\,b(f,e) \;=\; 1,$$

so heißt (V, b) eine ***hyperbolische Ebene***.

19.4.3 Satz 1

Sei (V, b) ein nicht ausgearteter symplektischer Raum mit $\dim(V) = 2$.

Dann existiert eine Basis $\{e, f\}$ von V, so dass (V, b) eine hyperbolische Ebene ist.

19.4.4 Satz 2

Sei (V, b) ein nicht ausgearteter symplektischer Raum mit $\dim(V) = n$.

Dann ist n gerade.

19.4.5 Satz 3

Sei (V, b) ein nicht ausgearteter symplektischer Raum.

Dann ist V orthogonale Summe hyperbolischer Ebenen, also

$$V \;=\; H_1 \perp \ldots \perp H_m$$

mit $2m = n = \dim(V)$.

19.4.6 Definition

Seien (V, b), (V', b') symplektische Räume und sei $u : V \to V'$ eine lineare Abbildung.

u heißt ***Isometrie***, wenn für alle $x, y \in V$ gilt:

$$b'(u(x), u(y)) \;=\; b(x, y)$$

19.4.7 Definition

Die Menge aller bijektiven Isometrien über einem symplektischen Raum (V, b)

$$Sp(V, b) = \{u : (V, b) \to (V, b) \mid u \text{ ist Isometrie}\}$$

heißt ***symplektische Gruppe***.

19.4.8 Satz 4

Sei (V, b) ein nicht ausgearteter symplektischer Raum mit $\dim(V) = 2$.

Dann gilt

$$Sp(V, b) \;=\; SL(V),$$

wobei $SL(V)$ die spezielle lineare Gruppe von V ist.

19.4.9 Satz 5

Sei V ein Vektorraum mit Basis $\{e_1, .., e_n\}$, sei b eine symplektische Bilinearform auf V mit $G = (g_{ij}) = (b(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$, sei $u : V \to V$ eine lineare Abbildung und sei $A = \mathbb{M}(u, \{e_1, .., e_n\})$ die durch u und der Basis $\{e_1, .., e_n\}$ gegebenen Matrix.

Dann gilt:

$$u \text{ ist eine Isometrie } \;\Leftrightarrow\; A^t G A \;=\; G$$

19.4.10 Satz 6

Die Determinante der Matrix einer Isometrie zwischen zwei symplektischen Räumen ist $+1$.

19.5 Aufgaben

19.5.1 Aufgabe 1

Gegeben sei eine symmetrische Bilinearform b auf dem $\mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} b(e_1, e_1) \;=\; b(e_2, e_2) \;=\; b(e_3, e_3) &\;=\; 1 \\ b(e_1, e_2) &\;=\; -2 \\ b(e_1, e_3) &\;=\; 1 \\ b(e_2, e_3) &\;=\; 0, \end{aligned}$$

dabei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

(1) Berechne $b(x, y)$ für $x = (1, -1, 1)$ und $y = (1, -2, 3)$.

(2) Bestimme eine Orthogonalbasis für $(\mathbb{R}^3, b)$.

Lösung

Die durch b definierte symmetrische Matrix $A = (b(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq 3}$ ist also

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teil 1

Es gilt

$$\begin{aligned} b(x,y) &= b((1,-1,1),\ (1,-2,3)) \\ &= b(e_1 - e_2 + e_3,\ e_1 - 2e_2 + 3e_3) \\ &= b(e_1,e_1) - 2b(e_1,e_2) + 3b(e_1,e_3) \\ &\quad -b(e_2,e_1) + 2b(e_2,e_2) - 3b(e_2,e_3) \\ &\quad +b(e_3,e_1) - 2b(e_3,e_2) + 3b(e_3,e_3) \\ &= 1+4+3+2+2-0+1-0+3 \\ &= 16. \end{aligned}$$

Teil 2

Gesucht sind also drei Vektoren $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3 \in \mathbb{R}^3$, die zueinander orthogonal bezüglich b sind.

Wir wissen bereits, dass e_2 und e_3 orthogonal zueinander stehen, also seien $\tilde{e}_2 = e_2$ und $\tilde{e}_3 = e_3$.

Gesucht ist nun also $\tilde{e}_1 = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ mit $b(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = 0$ und $b(\tilde{e}_1, \tilde{e}_3) = 0$.

$$\begin{aligned} b(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) &= b(ae_1 + be_2 + ce_3, e_2) \\ &= a \cdot b(e_1,e_2) + b \cdot b(e_2,e_2) + c \cdot b(e_3,e_2) \\ &= -2a + b \ = \ 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(\tilde{e}_1, \tilde{e}_3) &= b(ae_1 + be_2 + ce_3, e_3) \\ &= a \cdot b(e_1,e_3) + b \cdot b(e_2,e_3) + c \cdot b(e_3,e_3) \\ &= a + c \ = \ 0 \end{aligned}$$

Für $c = -1$ folgt $a = 1$ und $b = 2$.

Somit ist $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ mit $\tilde{e}_1 = (1,2,-1)$, $\tilde{e}_2 = e_2$ und $\tilde{e}_3 = e_3$ eine Orthogonalbasis von $(\mathbb{R}^3, b)$.

19.5.2 Aufgabe 2

Sei (V,b) ein quadratischer Raum und sei W ein Untervektorraum von V.

(1) Definiere das orthogonale Komplement $W^\perp$.

(2) Zeige, dass $W^\perp$ ein Untervektorraum von V ist.

(3) Zeige, dass $\dim(W^\perp) \leq \dim(V)$ gilt.

Lösung Teil 1

Es ist

$$W^\perp \;:=\; \{x \in V \mid b(x,y) = 0 \text{ für alle } y \in W\}.$$

Lösung Teil 2

Es gilt $0 \in W^\perp$.

Seien $w_1, w_2 \in W^\perp$. Es gilt nun für alle $y \in W$

$$b(w_1 + w_2, y) \;=\; b(w_1, y) + b(w_2, y) \;=\; 0 + 0 \;=\; 0,$$

somit gilt auch $w_1 + w_2 \in W^\perp$.

Sei $w \in W^\perp$ und $\lambda \in K$. Es gilt nun für alle $y \in W$

$$b(\lambda \cdot w, y) \;=\; \lambda \cdot b(w, y) \;=\; \lambda \cdot 0 \;=\; 0,$$

somit gilt auch $\lambda \cdot w \in W^\perp$.

Demnach ist $W^\perp$ ein Untervektorraum von V.

Lösung Teil 3

Es gilt die Dimensionsformel

$$\dim(V) \;=\; \dim(W) + \dim(W^\perp)$$

und somit folgt die Behauptung.

19.5.3 Aufgabe 3

Sei (V, b) ein quadratischer Raum und sei V^* der Dualraum von V.

(1) Definiere die durch b gegebene kanonische Abbildung $\varphi_b : V \to V^*$.

(2) Zeige, dass φ_b injektiv ist, wenn (V, b) nicht ausgeartet ist.

Lösung Teil 1

Gemeint ist folgende Abbildung:

$$\begin{array}{rcllcl} \varphi_b : V & \to & V^* & & & \\ x & \mapsto & \varphi_b(x) : & V & \to & K \\ & & & y & \mapsto & b(x,y) \end{array}$$

Lösung Teil 2

Zunächst einmal gilt:

(1) $\dim(V) = \dim(V^*)$

(2) $\dim(V) = \dim(\ker(\varphi_b)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi_b))$

Da (V, b) nicht ausgeartet ist, folgt $\mathrm{rad}(V) = 0$, also gilt $b(x, y) = 0$ nur für $x = 0$. Damit ist aber $\ker(\varphi_b) = 0$, also auch $\dim(\ker(\varphi_b)) = 0$. Nach der Dimensionsformel folgt nun $\dim(\mathrm{Im}(\varphi_b)) = \dim(V)$ und somit ist φ_b injektiv.

19.5.4 Aufgabe 4

Sei $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, die durch

$$b((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \; = \; a_1 b_1 + a_2 b_2 - 6(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

gegeben wird.

Finde ein bezüglich b orthogonale Zerlegung des $\mathbb{R}^2$.

Lösung

Es sind zwei linear unabhängige Vektoren $a = (a_1, a_2)$ und $b = (b_1, b_2)$ geschucht, für die

$$b(a, b) \; = \; 0$$

gilt.

Sei $a = (0, 1)$. Dann folgt:

$$b(a, b) \; = \; 0 + b_2 - 6(0 + b_1) \; = \; b_2 - 6b_1$$

Wähle $b = (1, 6)$. Dann sind a und b linear unabhängig und es gilt $b(a, b) = 0$. Somit bildet

$$\langle(0, 1)\rangle \perp \langle(1, 6)\rangle$$

eine orthogonale Zerlegung des $\mathbb{R}^2$ bezüglich b.

19.5.5 Aufgabe 5

Sei $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform, die gegeben wird durch die zugehörige Matrix

$$B \; = \; (b(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq 4} \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\{e_1, .., e_4\}$.

Bestimme den anisotropen Kern $W \subset \mathbb{R}^4$ von $(\mathbb{R}^4, b)$.

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} b(e_3,e_3) &= 0 = b(e_4,e_4) \\ \tfrac{1}{2}b(e_3,e_4) &= 1 = \tfrac{1}{2}b(e_4,e_3), \end{aligned}$$

somit ist

$$H = \mathbb{R}\cdot e_3 + \mathbb{R}\cdot e_4 \subset \mathbb{R}^4$$

eine hyperbolische Ebene bezüglich b.

Weiter gilt

$$\mathbb{R}^4 = H \perp H^{\perp},$$

und da $\dim(H) = 2$ ist auch $\dim(H^{\perp}) = 2$. Das heißt entweder ist $H^{\perp}$ eine weitere hyperbolische Ebene oder der gesuchte anisotrope Kern.

Zur Berechnung von $H^{\perp}$:

Sei $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 \in H^{\perp}$ beliebig. Dann gilt

$$b(H,x) = 0,$$

und es folgt:

$$\begin{aligned} b(H,x) &= b(\mathbb{R}\cdot e_3 + \mathbb{R}\cdot e_4,\, x) \\ &= \mathbb{R}\cdot b(e_3,x) + \mathbb{R}\cdot b(e_4,x) \\ &= \sum_{i=1}^{4}\lambda_i b(e_3,e_i) + \sum_{i=1}^{4}\lambda_i b(e_4,e_i) = 0 \end{aligned}$$

Demnach folgen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 b(e_3,e_1) + \lambda_2 b(e_3,e_2) + \lambda_3 b(e_3,e_3) + \lambda_4 b(e_3,e_4) &= -3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 b(e_4,e_1) + \lambda_2 b(e_4,e_2) + \lambda_3 b(e_4,e_3) + \lambda_4 b(e_4,e_4) &= 5\lambda_1 - 6\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

$\tilde{e}_1 = (\lambda_1,..,\lambda_4) = (0,2,6,-1)$ und $\tilde{e}_2 = (\lambda_1,..,\lambda_4) = (2,0,-5,3)$ sind zwei beliebige lineare unabhängige Vektoren, für die diese beiden Gleichungen gelten. Damnach ist

$$H^{\perp} = \mathbb{R}\cdot\tilde{e}_1 + \mathbb{R}\cdot\tilde{e}_2$$

der zunächst gesuchte Raum. Sei nun

$$A = \begin{pmatrix} b(\tilde{e}_1,\tilde{e}_1) & b(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2) \\ b(\tilde{e}_2,\tilde{e}_1) & b(\tilde{e}_2,\tilde{e}_2) \end{pmatrix}$$

die zu $(H^{\perp},b)$ gehörige Matrix. Ist $b|_A$ positiv definit, so ist $H^{\perp}$ keine hyperbolische Ebene sondern der gesuchte anisotrope Kern W.

Zur Berechnung von A:

$$\begin{aligned} b(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1) &= b(2e_2 + 6e_3 - e_4,\, 2e_2 + 6e_3 - e_4) \\ &= 4\,b(e_2, e_2) + 12\,b(e_2, e_3) - 2\,b(e_2, e_4) \\ &\quad +12\,b(e_3, e_2) + 36\,b(e_3, e_3) - 6\,b(e_3, e_4) \\ &\quad -2\,b(e_4, e_2) - 6\,b(e_4, e_3) + b(e_4, e_4) \\ &= 16 + 12 + 12 + 12 - 12 + 12 - 12 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Analog folgt

$$b(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \;=\; b(\tilde{e}_2, \tilde{e}_1) \;=\; -\,46 \qquad \text{und} \qquad b(\tilde{e}_2, \tilde{e}_2) \;=\; 64.$$

Es ergibt sich also die Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 40 & -46 \\ -46 & 64 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $b(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1) = 40 > 0$ und $\det(A) = 444 > 0$, somit ist A positiv definit und

$$W \;=\; H^{\perp} \;=\; \mathbb{R} \cdot \tilde{e}_1 + \mathbb{R} \cdot \tilde{e}_2$$

ist der anisotorpe Kern von $(\mathbb{R}^4, b)$.

20 Quadriken

Quadriken Q sind Kegelschnitte – also die Schnittmenge von einer Ebene mit einem Kegel. Dabei entstehen Kreise, Ellipsen, Hyperbeln und Parablen.

Für feste Parameter a und b gibt es Quadriken in folgenden Normalformen:

$$Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1\right\} \qquad \text{ist eine Ellipse}$$

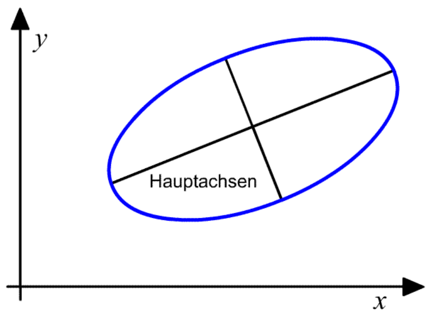
$$Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{y^2}{b^2} = 1\right\} \qquad \text{ist eine Hyperbel}$$

$$Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - ay = 0\right\} \qquad \text{ist eine Parabel}$$

Jede Quadrik Q der Form

$$Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0\right\}$$

lässt sich durch Hauptachsentransformation in einer der oben angegebenen Form darstellen. a und b sind dabei genau die Längen der Hauptachsen einer Ellipse oder einer Hyperbel.



Beispiel einer Quadrik im $\mathbb{R}^2$: Ellipse

Abbildung 5

20.1 Beispielaufgaben

20.1.1 Beispiel 1

Bestimme die Hauptachsen und deren Länge für

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 21x^2 - 16xy + 9y^2 + 42x - 16y = 4\}.$$

Lösung

Aus einer Quadrik der Form

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0\}$$

ergeben sich folgende Matrix M, Vektoren m und s und der Wert g:

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix} \\ m &= \begin{pmatrix} d/2 \\ e/2 \end{pmatrix} \\ M \cdot s &= -m \\ g &= m^T \cdot s + f \end{aligned}$$

Das heißt in unserem Beispiel ist

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 21 & -8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}, \\ m &= \begin{pmatrix} 21 \\ -8 \end{pmatrix}, \\ s &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ g &= (21, \; -8) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \;=\; -25. \end{aligned}$$

Um die Hauptachsen der gegebenen Quadrik zu bestimmen, müssen die Eigenwerte und -vektoren von M bestimmt werden.

Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 21-\lambda & -8 \\ -8 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (21-\lambda)(9-\lambda) - 64 \\ &= \lambda^2 - 30\lambda + 125 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 15 + \sqrt{225 - 125} &= 25 \\ \lambda_2 &= 15 - \sqrt{225 - 125} &= 5 \end{aligned}$$

Berechnung der Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} (M - \lambda_1 E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} -4x - 8y &= 0 \\ -8x - 16y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = -2y$$

Somit ist $x_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} (M - \lambda_2 E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 16x - 8y &= 0 \\ -8x - 4y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = 2x$$

Somit ist $x_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Demnach sind $\lambda \cdot x_1$ und $\lambda \cdot x_2$ die Hauptachsen von Q mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Die Matrix $A = (\tilde{x_1}, \tilde{x_2})$ ergibt sich nun aus den normierten Eigenvektoren x_1 und x_2:

$$A = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Um die Hauptachsentransformation durchzuführen, muss $A^t \cdot M \cdot A$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 & -8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ = & \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -50 & 25 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ = & \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus $(u, v) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ folgt nun unsere Quadrik Q in ihrer Normalform:

$$\begin{aligned} & 25u^2 + 5v^2 + g = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 25u^2 + 5v^2 - 25 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 25u^2 + 5v^2 = 25 \\ \Leftrightarrow \quad & u^2 + \frac{v^2}{5} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{u^2}{1^2} + \frac{v^2}{\sqrt{5}^2} = 1. \end{aligned}$$

Q ist also eine Ellipse und es sind 1 und $\sqrt{5}$ die Längen der Hauptachsen.

20.1.2 Beispiel 2

Bestimme die Hauptachsen und deren Länge für

$$Q \;=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 7x^2-4xy+2xz+7y^2+2yz+4z^2+18x-18y=0\}.$$

Lösung

Aus einer Quadrik der Form

$$Q \;=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+iz+j=0\}$$

ergeben sich folgende Matrix M, Vektoren m und s und der Wert g:

$$\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix} \\
m &= \begin{pmatrix} g/2 \\ h/2 \\ i/2 \end{pmatrix} \\
M\cdot s &= -m \\
g &= m^T\cdot s + j
\end{aligned}$$

Das heißt in unserem Beispiel ist

$$\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \\
m &= \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
s &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
g &= (9,\ -9,\ 0)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \;=\; -18.
\end{aligned}$$

Um die Hauptachsen der gegebenen Quadrik zu bestimmen, müssen die Eigenwerte und -vektoren von M bestimmt werden.

Berechnung der Eigenwerte:

$$\det(M-\lambda E) \;=\; \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 7-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (7-\lambda)(7-\lambda)(4-\lambda)+(-2)+(-2)\\
&\quad -(7-\lambda)-(7-\lambda)-4(4-\lambda)\\
&= \lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 3\\
\lambda_2 &= 6\\
\lambda_3 &= 9
\end{aligned}
$$

Berechnung der Eigenvektoren:

$$
\begin{aligned}
(M-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1\\ -2 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
4x-2y+z &= 0\\
-2x+4y+z &= 0\\
x+y+z &= 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 2x=2y=-z
$$

Somit ist $x_1 = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$ und es folgt analog $x_2 = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ sowie $x_3 = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$.

Demnach sind $\lambda\cdot x_1$, $\lambda\cdot x_2$ und $\lambda\cdot x_3$ die Hauptachsen von Q mit $\lambda\in\mathbb{R}$.

Die Matrix $A=(\tilde{x_1},\tilde{x_2},\tilde{x_3})$ ergibt sich nun aus den normierten Eigenvektoren x_1, x_2 und x_3:

$$
A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2}\\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}
$$

Um die Hauptachsentransformation durchzuführen, muss $A^t\cdot M\cdot A$ berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1\\ -2 & 7 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot A\\
=&\begin{pmatrix} 3/\sqrt{6} & 3/\sqrt{6} & -6/\sqrt{6}\\ 6/\sqrt{3} & 6/\sqrt{3} & 6/\sqrt{3}\\ 9/\sqrt{2} & -9/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2}\\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} 18/6 & 0 & 0 \\ 0 & 18/3 & 0 \\ 0 & 0 & 18/2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Aus $(u, v, w) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ folgt nun unsere Quadrik Q in ihrer Normalform:

$$\begin{aligned} & 3u^2 + 6v^2 + 9w^2 + g \ = \ 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 3u^2 + 6v^2 + 9w^2 - 18 \ = \ 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 3u^2 + 6v^2 + 9w^2 \ = \ 18 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{u^2}{6} + \frac{v^2}{3} + \frac{w^2}{2} \ = \ 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{u^2}{\sqrt{6}^2} + \frac{v^2}{\sqrt{3}^2} + \frac{w^2}{\sqrt{2}^2} \ = \ 1. \end{aligned}$$

Q ist also eine Ellipsoid und es sind $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{6}$ die Längen der Hauptachsen.

21 Projektive Geometrie

In der projektiven Geometrie werden Untervektorräume eines n dimensionalen Vektorraum auf eine $n-1$ dimensionale Hyperebende projiziert.

Am Beispiel von $V = \mathbb{R}^3$ können also alle Geraden und Ebenen, die den Nullpunkt enthalten, stets auf eine Ebene E projiziert werden, die den Nullpunkt nicht enthält.

Eine Gerade wird projiziert auf den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene E, eine Ebene auf die Schnittgerade mit E.

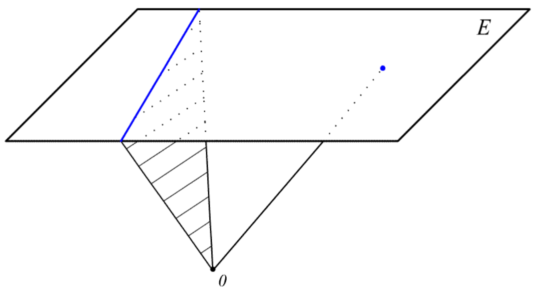


Abbildung 6

Alle Punkte werden durch ***projektive Koordinaten*** der Form $[x_1 : x_2 : x_3]$ dargestellt. Dabei ist $\lambda \cdot (x_1, x_2, x_3)$ genau die dazugehörige Gerade. Es gilt also

$$[x_1 : x_2 : x_3] \;=\; [y_1 : y_2 : y_3],$$

wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$ gibt, so dass $x_i = \lambda \cdot y_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt.

Das heißt $[1 : 1 : 1]$ und $[2 : 2 : 2]$ sind in der projektiven Ebene äquivalent.

Die Menge

$$g = \{[x_1 : x_2 : x_3] \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\} \quad \text{mit} \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$$

beschreibt genau die Gerade in der projektiven Ebene, die durch die eindeutig bestimmten Ebene iduziert wird, die g enthält und durch den Nullpunkt geht.

Eine Besonderheit jeder projektiven Ebene ist es, dass sie unendlich ferne

Geraden und Punkte enthält. Alle Geraden durch den Nullpunkt, die parallel zu E sind, werden auf einen unendlich fernen Punkt projiziert – die Ebene, die durch den Nullpunkt geht und parallel zu E ist, wird auf die Gerade mit unendlicher Ferne projizert.

Welche Ebene E der Überlegung zugrunde liegt ist dabei ganz egal, wichtig ist nur, dass sie nicht den Nullpunkt enthält.

Verallgemeinern lässt sich das Problem in folgenden Definitionen und Sätzen.

21.1 Definitionen und Sätze

21.1.1 Definition

Sei V ein $n+1$ dimensionaler Vektorraum.

Der zugehörige projektive Raum ist

$$\mathbb{P}(V) \;:=\; \{L \mid L \text{ ist Untervektorraum von } V \text{ mit } \dim(L) = 1\}.$$

Somit ist $\mathbb{P}(V)$ die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt und die Dimension von $\mathbb{P}(V)$ ist n.

21.1.2 Definitionen und Schreibweisen

Sei $V = K^{n+1}$ ein $n+1$ dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Der projektive Raum wird vereinfacht bezeichnet mit

$$\mathbb{P}^n(K) \;:=\; \mathbb{P}(K^{n+1}).$$

So wird $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ zum Beispiel mit $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ bezeichnet.

Die Punkte $L \in \mathbb{P}(V)$ der projektiven Ebene werden geschrieben als

$$L \;=\; [x] \;=\; [x_1 : \,..\, : x_n : x_{n+1}].$$

21.1.3 Bemerkung

In der projektiven Ebene

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \;=\; \{[\xi_1 : \ldots : \xi_{n+1}] \mid \text{nicht alle } \xi_{1,..,n+1} = 0\}$$

sei H die durch $\xi_{n+1} = 0$ gegebene unendlich ferne Gerade.

Dann sind $x_i := \xi_i/\xi_{n+1}$ für $i = 1,..,n$ die affinen Kooridnaten für den zu $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ gehörigen affine Raum.

21.1.4 Beispiel

Sei $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ die projektive Standardebene mit $\xi_2 = 0$ als unendlich ferne Gerade und seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $r > 0$.

Dann gehört

$$Q \;=\; \{[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid (\xi_0 - a\xi_2)^2 + (\xi_1 - b\xi_2)^2 = r^2\xi_2^2\}$$

zu dem affinen Kreis

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\},$$

da gerade $x = \xi_0/\xi_2$ und $y = \xi_1/\xi_2$ gilt.

21.1.5 Definition

Sei $\mathbb{P}(V)$ ein n dimensionaler projektiver Raum zum Vektorraum V und sei $W \subset V$ ein $d + 1$ dimensionaler Untervektorraum von V.

$$X \;=\; \{L \in \mathbb{P}(V) \mid L \subset W \text{ ist eindimensionaler Untervektorraum von W}\}$$

ist der d dimensionale projektive Teilraum X von $\mathbb{P}(V)$.

21.1.6 Beispiel

Die projektive Gerade $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ ist ein eindimensionaler projektiver Teilraum von $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ mit $n \geq 2$ gegeben durch einen zweidimensionalen Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n+1}$.

21.1.7 Satz 1

Seien $A, B \in \mathbb{P}(V)$ zwei Punkte in einem projektiven Raum und es gelte $A \neq B$.

Dann gibt eine eindeutig bestimmte Gerade g mit $A, B \in g$.

Beweis

Sei V ein K-Vektorraum und seien

$$A \;=\; [x] \;=\; K \cdot x \qquad \text{und} \qquad B \;=\; [y] \;=\; K \cdot y$$

die beiden Punkte in $\mathbb{P}(V)$. Dann sind also $x, y \in V$ und da $A \neq B$ gilt, sind x und y linear unabhängig. Sei nun

$$W \;=\; K \cdot x + K \cdot y,$$

dann ist W gerade ein zweidimensionaler Untervektorraum von V und somit bildet $g = \mathbb{P}(W)$ die gesuchte eindeutig bestimmt projektive Gerade in $\mathbb{P}(V)$.
□

21.1.8 Satz 2

Sei $X \subset \mathbb{P}(V)$ ein projektiver Teilraum, seien $A, B \in X$ mit $A \neq B$ und sei g die Gerade, die A und B enthält.

Dann gilt

$$g \subset X.$$

Beweis

Sei V wieder ein K-Vektorraum und seien

$$A = [x] = K \cdot x \qquad \text{und} \qquad B = [y] = K \cdot y$$

die beiden Punkte in $X = \mathbb{P}(W)$. Dann ist nach Definition eines projektiven Teilraums W ein Untervektorraum von V und es sind $x, y \in W$. Es gilt dann auch

$$U = K \cdot x + K \cdot y \subset W.$$

Dies zeigt, dass $g = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(W) = X$ gilt. □

21.1.9 Definition

Seien $\mathbb{P}(W_1)$ und $\mathbb{P}(W_2)$ projektive Teilräume von $\mathbb{P}(V)$.

Dann bezeichnet

$$\mathbb{P}(W_1) \vee \mathbb{P}(W_2)$$

den kleinsten projektiven Teilraum, der W_1 und W_2 enthält.

21.1.10 Satz 3

Seien $\mathbb{P}(W_1)$ und $\mathbb{P}(W_2)$ projektive Teilräume von $\mathbb{P}(V)$.

Dann ist der Durchschnitt $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2)$ wieder ein projektiver Teilraum von $\mathbb{P}(V)$ und es gilt

$$\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2).$$

21.1.11 Satz 4

Seien $\mathbb{P}(W_1)$ und $\mathbb{P}(W_2)$ projektive Teilräume von $\mathbb{P}(V)$.

Dann gilt

$$\mathbb{P}(W_1) \vee \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2).$$

21.1.12 Satz 5

Seien X_1 und X_2 projektive Teilräume von $\mathbb{P}(V)$. Gilt

$$\dim(X_1) + \dim(X_2) \geq \dim(\mathbb{P}(V)),$$

dann ist $X_1 \vee X_2 \neq \{0\}$.

Beweis

Sei $X_1 = \mathbb{P}(W_1)$ und sei $X_2 = \mathbb{P}(W_2)$. Dann gilt

$$\dim(X_1) \;=\; \dim(W_1) - 1 \qquad \text{und} \qquad \dim(X_2) \;=\; \dim(W_2) - 1.$$

Weiter gilt die Dimensionsformel

$$\dim(W_1 \cap W_2) \;=\; \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2)$$

sowie

$$\dim(W_1 + W_2) \;\leq\; \dim(V) \;=\; n + 1.$$

Zusammen folgt nun

$$\begin{aligned} \dim(W_1 \cap W_2) &\geq (\dim(X_1) + 1) + (\dim(X_2) + 1) - \dim(V) \\ &\geq (\dim(\mathbb{P}(V)) + 2) - (n + 1) \\ &= (n + 2) - (n + 1) \;=\; 1. \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{P}(W_1 \cap W_2) = X_1 \vee X_2$ nicht leer. □

21.1.13 Beispiel

Seien g und H zwei projektive Teilräume von $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, dabei g eine Gerade und H ein Hyperebene, also $\dim(H) = n - 1$. Weiter gelte $g \not\subset H$.

Zeige, dass sich dann g und H in genau einem Punkt schneiden.

Lösung

Sei $g = \mathbb{P}(W_1)$ und sei $H = \mathbb{P}(W_2)$. Da g nicht in H enthalten ist, folgt $W_1 + W_2 = V$.

Nach der Dimensionsformel gilt nun

$$\begin{aligned} \dim(W_1 \cap W_2) &= \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) \\ &= 2 + n - (n + 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Das heißt, W_1 und W_2 schneiden sich in einer Geraden. Demnach ist $g \cap H$ ein Punkt.

21.1.14 Satz 6

Seien $P_1, .., P_r \in \mathbb{P}(V)$.

Dann gilt

$$\dim(P_1 \vee \ldots \vee P_r) \;\leq\; r - 1.$$

Beweis

Es sei V ein K-Vektorraum und es seien

$$P_i \;=\; K \cdot x_i \qquad \text{für} \;\; i = 1, .., r.$$

Dann gilt offenbar

$$\dim \left(\sum_{i=1}^{r} K \cdot x_i \right) \;\leq\; r$$

und somit folgt

$$\dim \left(\mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^{r} K \cdot x_i \right) \right) \;\leq\; r - 1,$$

was gerade die Behauptung zeigt. □

21.1.15 Definition

$P_1, .., P_r \in \mathbb{P}(V)$ heißen ***unabhängig***, wenn

$$\dim(P_1 \vee \ldots \vee P_r) \;=\; r - 1$$

gilt. Andernfalls heißen die Punkte $P_1, .., P_r$ ***abhängig***.

21.2 Das Dualitätsprinzip

21.2.1 Dualitätsprinzip

Jeder für ein n dimensionalen projektiven Raum allgemein geltende Satz geht über in einen zugehöhrigen neuen allgemeinen Satz.

Dabei entsprechen r dimensionale projektive Teilräume $n-r$ dimensionalen projektiven Teilräumen, also speziell entsprechen Punkten Hyperebenen sowie Durchschnitte geeigneten Verbindungsräumen. Inklusionsrelationen kehren sich dabei um.

21.2.2 Satz von Desargues

Seien a, b, c Geraden durch einen Punkt P in einem projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$.

Seien $\triangle(A, B, C)$ und $\triangle(A', B', C')$ zwei Dreiecke mit

$$\begin{array}{ll} A, A' \in a & A \neq A' \\ B, B' \in b & B \neq B' \\ C, C' \in c & C \neq C'. \end{array}$$

Dann liegen die Schnittpunkte

$$\begin{array}{lcl} (A \vee B) & \cap & (A' \vee B') \\ (A \vee C) & \cap & (A' \vee C') \\ (B \vee C) & \cap & (B' \vee C') \end{array}$$

alle auf einer Geraden g.

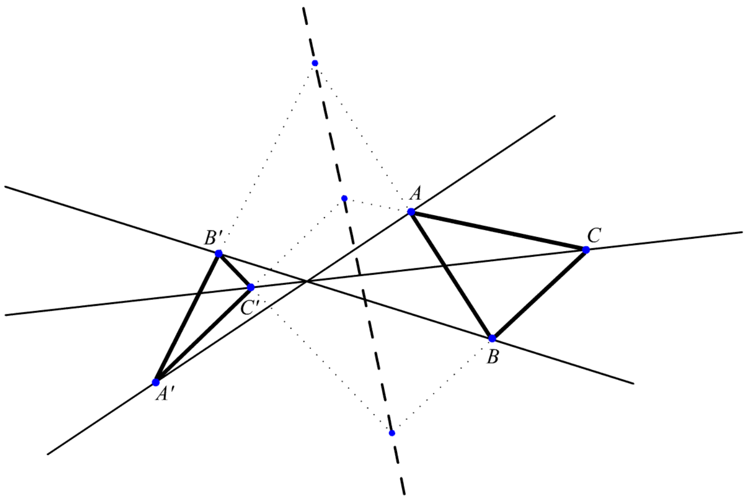


Abbildung 7

Durch das Dualitätsprinzip gilt nun auch folgender Satz:

21.2.3 Satz 1

Seien A, B, C drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden G in einer projektiven Ebene $\mathbb{P}(V)$.

Seien a, a', b, b', c, c' jeweils paarweise verschiedene Geraden durch A, B, C.

Seien

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} A_1 & = & b_1 \cap c_1 & A_2 & = & b_2 \cap c_2 \\ B_1 & = & a_1 \cap c_1 & B_2 & = & a_2 \cap c_2 \\ C_1 & = & a_1 \cap b_1 & C_2 & = & a_2 \cap b_2 \end{array}$$

die Schnittpunkte der jeweiligen Geraden.

Dann gehen die Verbindungsgeraden

$$\begin{array}{lcl} a & = & A_1 \vee A_2 \\ b & = & B_1 \vee B_2 \\ c & = & C_1 \vee C_2 \end{array}$$

alle durch einen Punkt P.

21.2.4 Satz von Pappos

Seien g, g' zwei verschiedene Geraden in einer projektiven Ebene $\mathbb{P}(V)$.

Seien $A, B, C \in g$ und $A', B', C' \in g'$.

Dann liegen die Schnittpunkte

$$\begin{array}{ccc} (A \vee B') & \cap & (A' \vee B) \\ (A \vee C') & \cap & (A' \vee C) \\ (B \vee C') & \cap & (B' \vee C) \end{array}$$

alle auf einer Geraden.

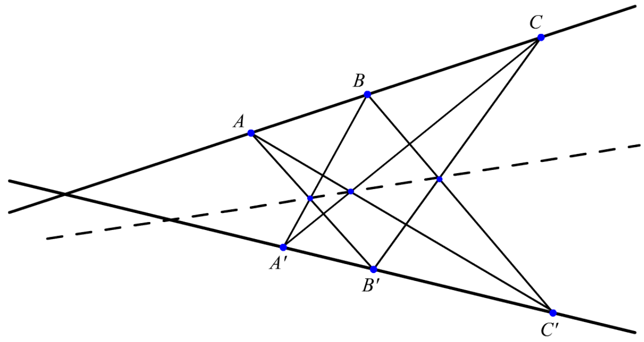


Abbildung 8

21.2.5 Satz von Brianchon

Seien P, P' zwei verschiedene Punkte in einer projektiven Ebene $\mathbb{P}(V)$.

Seien a, b, c paarweise verschiedene Punkte durch P und seien a', b', c' paarweise verschiedene Punkte durch P'.

Dann gehen die Verbindungsgeraden

$$\begin{array}{ccc} (a \cap b') & \vee & (a' \cap b) \\ (a \cap c') & \vee & (a' \cap c) \\ (b \cap c') & \vee & (b' \cap c) \end{array}$$

alle durch einen Punkt.

21.3 Projektive Abbildungen

21.3.1 Definition

Seien V, W zwei $n+1$ dimensionale Vektorräume mit den zugehörigen projektiven Räumen $\mathbb{P}(V)$ und $\mathbb{P}(W)$.

Eine bijektive Abbildung

$$\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$$

heißt eine ***Projektivität*** oder eine ***projektive Abbildung***, wenn es einen Isomorphismus

$$\tilde{\varphi} : V \to W$$

gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{P}(V)$ gilt:

$$\varphi(x) \ = \ \tilde{\varphi}(x)$$

Bemerkung

$\tilde{\varphi}$ ist durch eine gegebene projektive Abbildung φ nicht eindeutig bestimmt, denn es gilt für $\tilde{\varphi}$

$$(\lambda\tilde{\varphi})(x) \ = \ \tilde{\varphi}(x).$$

21.3.2 Satz 1

Seien V, W zwei $n+1$ dimensionale Vektorräume.

Weiter seien $P_1, .., P_{n+2} \in \mathbb{P}(V)$ so gegeben, dass je $n+1$ Punkte $\mathbb{P}(V)$ aufspannen und es seien $Q_1, .., Q_{n+2} \in \mathbb{P}(W)$ so gegeben, dass je $n+1$ Punkte $\mathbb{P}(W)$ aufspannen.

Dann gibt es genau eine projektive Abbildung $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ mit

$$\varphi(P_i) \ = \ Q_i \qquad \text{für} \ \ i \ = \ 1, .., n+1.$$

21.3.3 Satz 2

Produkte projektiver Abbildungen und die inverse Abbildung einer projektiven Abbildung sind wieder projektive Abbildungen.

Dies folgt aus den entsprechenden Aussagen über lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen.

21.3.4 Satz 3

Sei $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ eine Abbildung zwischen zwei projektiven Räumen und sei $X \subset \mathbb{P}(V)$ ein projektiver Teilraum mit der Dimension d.

Dann ist auch $\varphi(X) \subset \mathbb{P}(W)$ ein projektiver Teilraum mit der Dimension d.

Beweis

Durch die Abbildung $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ wird auch ein Isomorphismus

$$\tilde{\varphi} : V \to W$$

gegeben. Weiter sei $\mathbb{P}(U) = X$, dann ist U ein $d+1$ dimensionaler Untervektorraum von V. Somit ist dann auch

$$Y \;=\; \tilde{\varphi}(U) \;\subset\; W$$

ein $d+1$ dimensionaler Untervektorraum von W. Dann ist $\mathbb{P}(Y) = \varphi(X)$ ein projektiver Teilraum der Dimension d. □

21.3.5 Definition

Sei $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ eine Abbildung zwischen zwei projektiven Räumen.

Bildet eine Gerade g durch $P_1, P_2 \in \mathbb{P}(V)$ auf eine Gerade $\varphi(g)$ durch $\varphi(P_1)$ und $\varphi(P_2)$ ab, so heißt φ eine ***Kollineation***.

Jede projektive Abbildung ist also eine Kollineation, eine Kollineation ist aber "noch nicht ganz" eine projektive Abbildung.

21.3.6 Definition

Sei K ein beliebiger Körper und sei $\mathbb{P}^1(K) = \mathbb{P}(K^2)$ eine projektive Gerade.

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{P}^1(K)$ paarweise verschieden, dann heißt

$$D(a,b,c,d) \;=\; \frac{c-a}{c-b} \Big/ \frac{d-a}{d-b} \;\in\; K \cup \{\infty\}$$

das ***Doppelverhältnis*** bezüglich a, b, c und d.

21.3.7 Definition und Satz

Seien X, Y zwei projektive Geraden und sei $\varphi : X \to Y$ eine projektive Abbildung.

Seien $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ paarweise verschieden, $y_1, y_2, y_3, y_4 \in Y$ paarweise verschieden und $\varphi(x_i) = y_i$ für $i = 1, .., 4$.

Dann gilt

$$D(x_1, x_2, x_3, x_4) \;=\; D(y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Das Doppelverhältnis ist also eine so genannte ***Invariante***, es bleibt unverändert gegenüber einer projektiven Abbildung.

21.3.8 Bemerkung

Das Doppelverhältnis kann auch auf projektive Räume mit einer höheren Dimension übertragen werden.

$D(H_1, H_2, H_3, H_4)$ ist dann das Doppelverhältnis von vier Hyperebenen, die alle einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

21.4 Zentralprojektion

21.4.1 Definition und Satz

Sei V ein $n+1$ dimensionaler Vektorraum mit dem zugehörigen projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$, seien $\mathbb{P}(W_1)$ und $\mathbb{P}(W_2)$ zwei m dimensionale projektive Teilräume von $\mathbb{P}(V)$ und sei $X \subset \mathbb{P}(V)$ ebenfalls ein projektiver Teilraum. Es gelte:

(1) $X \cap \mathbb{P}(W_1) = X \cap \mathbb{P}(W_2) = \emptyset$

(2) $X \vee \mathbb{P}(W_1) = X \vee \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(V)$

Dann besteht für alle $P \in \mathbb{P}(W_1)$

$$(X \vee P) \ \cap \ \mathbb{P}(W_2)$$

aus genau einem Punkt P'.

Die Zuordnung

$$\varphi : \mathbb{P}(W_1) \to \mathbb{P}(W_2) \qquad \text{mit} \qquad \varphi(P) \ = \ P'$$

heißt ***Zentralprojektion*** mit Zentrum X.

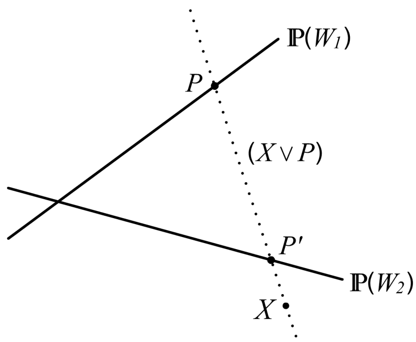


Abbildung 9

21.4.2 Satz 1

Eine Zentralprojektion ist eine projektive Abbildung.

21.5 Hauptsatz

21.5.1 Definition

Sei K ein beliebiger Körper, sei $\sigma : K \to K$ ein Automorphismus und seien V, W zwei Vektorräume über dem Körper K.

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt σ-linear, wenn gilt:

(1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ für alle $a, b \in V$.

(2) $f(\lambda a) = \sigma(\lambda) f(a)$ für alle $a \in V,\ \lambda \in K$.

21.5.2 Hauptsatz der projektiven Geometrie

Sei K ein beliebiger Körper, seien V, W zwei Vektorräume über dem Körper K mit einer Dimension ≥ 3 und seien $\mathbb{P}(V)$ und $\mathbb{P}(W)$ die zugehörigen mindestens zweidimensionalen projektiven Räume.

Teil 1

Jeder σ-lineare Isomorphismus $\tilde{\varphi} : V \to W$ zu einem Automorphismus $\sigma : K \to K$ definiert eine bijektive Kollineation $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$, indem definiert wird:

$$\varphi(x) := \tilde{\varphi}(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{P}(V).$$

Teil 2

Zu jeder bijektiven Kollineation $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ gibt es einen Automorphismus $\sigma : K \to K$ und einen σ-linearen Isomorphismus $\tilde{\varphi} : V \to W$ mit

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{P}(V).$$

21.5.3 Satz 1

Für die Körper $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{R}$ der rationalen und reellen Zahlen ist die Identität der einzige Automorphismus.

21.5.4 Satz 2

Für den Körper $K = \mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist neben der Identität auch noch die komplexe Konjugation ein Automorphismus.

21.5.5 Satz 3

Seien V, W zwei reelle Vektorräume mit einer Dimension größer als 2 und sei $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ eine Kollineation.

Dann ist φ eine projektive Abbildung.

21.6 Aufgaben

21.6.1 Aufgabe 1

In der projektiven Ebene

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \;=\; \{[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2] \mid \text{nicht alle } \xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0\}$$

sei H die durch $\xi_2 = 0$ gegebene unendlich ferne Gerade.

Dann sind $x = \xi_0/\xi_2$ und $y = \xi_1/\xi_2$ Kooridnaten für die zugehörige affine Ebene E.

Sei $c \in \mathbb{R}$ und sei $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ eine Gerade mit der affinen Gleichung $x+y = c$.

Berechne die Schnittmenge von L und H.

Lösung

Die Gerade L wird gegeben durch die affine Gleichung $x + y = c$. Demnach gilt

$$\begin{aligned} x + y \;=\; c \quad &\Leftrightarrow \quad \xi_0/\xi_2 + \xi_1/\xi_2 \;=\; c \\ &\overset{\xi_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \xi_0 + \xi_1 \;=\; \xi_2 \cdot c. \end{aligned}$$

Gesucht wird der Durchschnitt von L und H, also alle Punkte aus L, für die $\xi_2 = 0$ gilt:

$$\xi_0 + \xi_1 \;=\; \xi_2 \cdot c \quad \Rightarrow \quad \xi_0 + \xi_1 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_0 \;=\; -\xi_1$$

Somit ergibt sich die Schnittmenge $L \cap H = \{[1 : -1 : 0]\}$.

21.6.2 Aufgabe 2

In der projektiven Ebene

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \;=\; \{[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2] \mid \text{nicht alle } \xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0\}$$

sei H die durch $\xi_2 = 0$ gegebene unendlich ferne Gerade.

Dabei sind also $x = \xi_0/\xi_2$ und $y = \xi_1/\xi_2$ Kooridnaten für die zugehörige affine Ebene E.

Seien

$$\begin{aligned} Q_1 \;&:=\; \{[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid \xi_0^2 - \xi_1^2 = \xi_2^2\} \\ Q_2 \;&:=\; \{[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid \xi_0\xi_1 = \xi_2^2\} \end{aligned}$$

(1) Bestimme die zu Q_1 gehörige affine Kurve in E und bestimme $Q_1 \cap H$.

(2) Bestimme die zu Q_2 gehörige affine Kurve in E und bestimme $Q_2 \cap H$.

Lösung Teil 1

Es gilt

$$\begin{array}{rrcl} & x = \xi_0/\xi_2 & \Leftrightarrow & \xi_0 = x\xi_2 \\ & y = \xi_1/\xi_2 & \Leftrightarrow & \xi_1 = y\xi_2 \\ \Rightarrow & \xi_0^2 - \xi_1^2 \ = \ \xi_2^2 & \Leftrightarrow & (x\xi_2)^2 - (y\xi_2)^2 \ = \ \xi_2^2 \\ & & \Leftrightarrow & x^2\xi_2^2 - y^2\xi_2^2 \ = \ \xi_2^2 \\ & & \Leftrightarrow & x^2 - y^2 \ = \ 1 \end{array}$$

Die gesuchte affine Kurve in E ist also eine Hyperbel und wird gegeben durch $x^2 - y^2 = 1$.

Es ist weiter der Durchschnitt von Q_1 und H zu bestimmen, also alle Punkte aus Q_1, für die $\xi_2 = 0$ gilt:

$$\xi_0^1 - \xi_1^2 \ = \ \xi_2^2 \quad \Rightarrow \quad \xi_0^1 - \xi_1^2 \ = \ 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_0^1 \ = \ \xi_1^2$$

Es ergibt sich somit die Schnittmenge $Q_1 \cap H = \{[1:1:0],\ [-1:1:0]\}$.

Lösung Teil 2

Es gilt

$$\begin{array}{rrcl} & x = \xi_0/\xi_2 & \Leftrightarrow & \xi_0 = x\xi_2 \\ & y = \xi_1/\xi_2 & \Leftrightarrow & \xi_1 = y\xi_2 \\ \Rightarrow & \xi_0\xi_1 \ = \ \xi_2^2 & \Leftrightarrow & (x\xi_2)(y\xi_2) \ = \ \xi_2^2 \\ & & \Leftrightarrow & \xi_2^2 xy \ = \ \xi_2^2 \\ & & \Leftrightarrow & xy \ = \ 1 \end{array}$$

Die gesuchte affine Kurve in E ist also eine Hyperbel und wird gegeben durch $xy = 1$.

Es ist weiter der Durchschnitt von Q_2 und H zu bestimmen, also alle Punkte aus Q_2, für die $\xi_2 = 0$ gilt:

$$\xi_0\xi_1 \ = \ \xi_2^2 \quad \Rightarrow \quad \xi_0\xi_1 \ = \ 0$$

Es ergibt sich somit die Schnittmenge $Q_2 \cap H = \{[0:1:0],\ [1:0:0]\}$.

21.6.3 Aufgabe 3

In der projektiven Ebene

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \ = \ \{[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2] \mid \text{nicht alle } \xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0\}$$

Sei H die durch $\xi_2 = 0$ gegebene unendlich ferne Gerade.

Dabei sind dann $x = \xi_1/\xi_0$ und $y = \xi_2/\xi_0$ Kooridnaten für die zugehörige affine Ebene E.

Seien

$$\begin{aligned} Q_1 &:= \{[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid \xi_0^2 - \xi_1^2 = \xi_2^2\} \\ Q_2 &:= \{[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid \xi_0\xi_1 = \xi_2^2\} \end{aligned}$$

(1) Bestimme die zu Q_1 gehörige affine Kurve in E und bestimme $Q_1 \cap H$.

(2) Bestimme die zu Q_2 gehörige affine Kurve in E und bestimme $Q_2 \cap H$.

Lösung Teil 1

Es gilt

$$\begin{aligned} x = \xi_1/\xi_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \xi_1 = x\xi_0 \\ y = \xi_2/\xi_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \xi_2 = y\xi_0 \\ \Rightarrow \quad \xi_0^2 - \xi_1^2 = \xi_2^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \xi_0^2 - (x\xi_0)^2 = (y\xi_0)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \xi_0^2 - x^2\xi_0^2 = y^2\xi_0^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - x^2 = y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

Die gesuchte affine Kurve in E wird also gegeben durch den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$.

Es ist weiter der Durchschnitt von Q_1 und H zu bestimmen, also alle Punkte aus Q_1, für die $\xi_0 = 0$ gilt:

$$\xi_0^1 - \xi_1^2 = \xi_2^2 \quad \Rightarrow \quad -\xi_1^2 = \xi_2^2$$

Es ergibt sich somit die Schnittmenge $Q_1 \cap H = \{\emptyset\}$.

Lösung Teil 2

Es gilt

$$\begin{aligned} x = \xi_1/\xi_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \xi_1 = x\xi_0 \\ y = \xi_2/\xi_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \xi_2 = y\xi_0 \\ \Rightarrow \quad \xi_0\xi_1 = \xi_2^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \xi_0(x\xi_0) = (y\xi_0)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \xi_0^2 x = y^2\xi_0^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = y^2 \end{aligned}$$

Die gesuchte affine Kurve in E ist also eine Parabel und wird gegeben durch $x = y^2$.

Es ist weiter der Durchschnitt von Q_2 und H zu bestimmen, also alle Punkte aus Q_2, für die $\xi_0 = 0$ gilt:

$$\xi_0\xi_1 \ = \ \xi_2^2 \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot \xi_1 \ = \ \xi_2$$

Es ergibt sich somit die Schnittmenge $Q_2 \cap H = \{[0 : 1 : 0]\}$.

21.6.4 Aufgabe 4

Seien $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ und $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ die reellen bzw. komplexen projektiven Standardebenen und sei H die durch $\xi_2 = 0$ gegebene unendlich ferne Gerade.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, sei $c > 0$ und seien

$$\begin{aligned} Q_{\mathbb{R}} &= \{[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid (\xi_0 - a\xi_2)^2 + (\xi_1 - b\xi_2)^2 = r^2\xi_2^2\}, \\ Q_{\mathbb{C}} &= \{[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid (\xi_0 - a\xi_2)^2 + (\xi_1 - b\xi_2)^2 = r^2\xi_2^2\}. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} x = \xi_0/\xi_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \xi_0 = x\xi_2 \\ y = \xi_1/\xi_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \xi_1 = y\xi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\xi_0 - a\xi_2)^2 + (\xi_1 - b\xi_2)^2 \ = \ r^2\xi_2^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (x\xi_2 - a\xi_2)^2 + (y\xi_2 - b\xi_2)^2 \ = \ r^2\xi_2^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 \ = \ r^2 \end{aligned}$$

Demnach ist

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

der affine Kreis zu $Q_{\mathbb{R}}$ um $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit dem Radius r.

Berechne $Q_{\mathbb{C}} \cap H$.

Lösung

Gesucht wird der Durchschnitt von $Q_{\mathbb{C}}$ und H, also alle Punkte aus $Q_{\mathbb{C}}$, für die $\xi_2 = 0$ gilt:

$$(\xi_0 - a\xi_2)^2 + (\xi_1 - b\xi_2)^2 = r^2\xi_2^2 \quad \Rightarrow \quad \xi_0^2 + \xi_1^2 \ = \ 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_0^2 \ = \ -\xi_1^2$$

In der komplexen projektiven Standardebene folgt also

$$Q_{\mathbb{C}} \cap H \ = \ \{[1 : i : 0], \ [-1 : i : 0]\}.$$

21.6.5 Aufgabe 5

Berechne alle Fixpunkte der projektiven Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, die gegeben ist durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -12 & 7 & -12 \\ -8 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Lösung

Gesucht sind also alle Punkte $[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, für die

$$\varphi([x_1 : x_2 : x_3]) \; = \; [x_1 : x_2 : x_3]$$

gilt. Da alle Punkte einer Geraden $\mathbb{R}(x_1, x_2, x_3) \subset \mathbb{R}^3$ zu demselben Punkt $[x_1 : x_2 : x_3]$ in der projektiven Ebene gehören, sind also alle $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ gesucht, für die

$$A \cdot (x_1, x_2, x_3) \; = \; \lambda \cdot (x_1, x_2, x_3) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

gilt – also genau alle Eigenvektoren der Matrix A.

Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ -12 & 7-\lambda & -12 \\ -8 & 4 & -5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(7-\lambda)(-5-\lambda) + 96 + 48(1-\lambda) - 16(7-\lambda) \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 \\ &= 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 3 \end{aligned}$$

Berechnung der Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -12 & 7 & -12 \\ -8 & 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich $x_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und es folgt analog $x_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $x_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alle gesuchten Fixpunkte sind also

$$[1:2:0], \; [1:3:1], \; [-1:0:1] \; \in \; \mathbb{P}^2(\mathbb{R}).$$

21.6.6 Aufgabe 6

Berechne alle Fixpunkte der projektiven Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, die gegeben ist durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -9 & 0 & 9 \\ 6 & -8 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung

Gesucht sind also wie in der Aufgabe zuvor alle Punkte $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, für die

$$\varphi([x_1 : x_2 : x_3 : x_4]) \;=\; [x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$$

gilt. Da alle Punkte einer Geraden $\mathbb{R}(x_1, x_2, x_3, x_4) \subset \mathbb{R}^4$ zu demselben Punkt $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$ in dem projektiven Raum gehören, sind also alle $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ gesucht, für die

$$A \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) \;=\; \lambda \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

gilt – also genau alle Eigenvektoren der Matrix A.

Berechnung der Eigenwerte (siehe 11.3.2 auf Seite 85):

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -2, \quad \lambda_4 = 2 \end{aligned}$$

Berechnung der Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7 & -9 & 0 & 9 \\ 6 & -8 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \\ -2x_3 \\ -2x_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit

$$x_{\lambda_1} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und es folgt analog

$$x_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{\lambda_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle gesuchten Fixpunkte sind also

$$[0:1:-2:1],\ [3:2:0:0],\ [1:1:0:0],\ [0:1:-1:1] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}).$$

21.6.7 Aufgabe 7

Zeige, dass jede projektive Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ mindestens einen Fixpunkt hat.

Lösung

Alle Fixpunkte von $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ werden durch die Eigenvektoren der zu φ gehörigen 3×3 Matrix gegeben.

Da das charakteristische Polynom von einer 3×3 Matrix vom Grad 3 ist, gibt es mindestens einen reellen Eigenwert und somit mindestens einen Eigenvektor.

Das heißt also, dass φ einen, zwei oder drei Fixpunkte haben muss.

22 Tensoralgebra

22.1 Das Tensorprodukt

22.1.1 Einleitung

Seien V und W zwei Vektorräume über einem Körper K.

Das Tensorprodukt ist die allgemeinste bilineare Produktbildung zwischen Vektoren aus V und W und wird mit $V \otimes W$ bezeichnet.

Aufgrund der geforderten Bilinearität des Tensorproduktes muss also für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in K$

$$\begin{aligned}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \otimes w &= \lambda_1 (v_1 \otimes w) + \lambda_2 (v_2 \otimes w) \quad \text{und} \\ v \otimes (\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) &= \mu_1 (v \otimes w_1) + \mu_2 (v \otimes w_2)\end{aligned}$$

gelten.

Sei nun $\{e_1, .., e_n\}$ eine Basis von V, sei $\{f_1, .., f_m\}$ eine Basis von W und seien

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in V \qquad \text{und} \qquad y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j f_j \in W$$

beliebig.

Dann gilt wegen der Bilineartität

$$x \otimes y = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j f_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j (e_i \otimes f_j).$$

Die Vektoren $u_{ij} = (e_i \otimes f_j)$ mit $i = 1, .., n$ und $j = 1, .., m$ bilden also eine Basis von $V \otimes W$.

Nach dieser Konstruktion hängt das Tensorproduktes von Vektoren nicht von den ursprünglich gewählten Basen $\{e_1, .., e_n\}$ und $\{f_1, .., f_m\}$ ab.

22.1.2 Herleitung

Um nicht auf die Basen der Vektorräume V und W angewiesen zu sein, definiert man das Tensorprodukt etwas abstrakter:

Sei

$$\mathrm{Abb}^{(c)}(V \times W,\, K) \;=\; \{f : V \times W \to K \mid f(v,w) = 0 \text{ für fast alle } (v,w)\},$$

dabei heißt fast alle für alle bis auf endlich viele.

$\mathrm{Abb}^{(c)}(V \times W,\, K)$ bildet mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation einen Vektorraum über dem Körper K.

$$\begin{array}{rcl} f_{(v,w)} : V \times W & \to & K \\ (v',w') & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{für } (v',w') \neq (v,w) \\ 1 & \text{für } (v',w') = (v,w) \end{cases} \end{array}$$

ist demnach eine Basis von $\mathrm{Abb}^{(c)}(V \times W,\, K)$.

Es sollen nun die Abbildungen $f_{(v,w)}$ jeweils das Tensorprodukt $v \otimes w$ repräsentieren. Da aber offensichtlich nicht wie gefordert z.B.

$$\lambda\, f_{(v,w)} \;=\; f_{(\lambda v,w)}$$

gilt, wird diese Gleichheit durch einen geeigneten Quotientenvektorraum erzwungen.

Sei X der Untervektorraum von $\mathrm{Abb}^{(c)}(V \times W,\, K)$ der durch die Vektorren erzeugt wird, für die gelten:

$$\begin{array}{rcl} f_{(v_1+v_2,w)} & = & f_{(v_1,w)} + f_{(v_2,w)}, \\ f_{(v,w_1+w_2)} & = & f_{(v,w_1)} + f_{(v,w_2)}, \\ f_{(\lambda v,w)} & = & \lambda f_{(v,w)} \quad \text{oder} \\ f_{(v,\mu w)} & = & \mu f_{(v,w)}. \end{array}$$

Es ergibt sich nun folgende Definition des Tensorproduktes:

22.1.3 Definition

Seien V, W zwei Vektorräume über einem Körper K.

Das Tensorprodukt $V \otimes W$ wird gegeben durch den Quotientenvektorraum

$$\mathrm{Abb}^{(c)}(V \times W,\, K)\,/\,X.$$

Dabei ist X der oben beschriebene Untervektorraum.

Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \otimes : V \times W & \to & V \otimes W \\ (v,w) & \mapsto & v \otimes w \end{array}$$

ist demnach wie gefordert bilinear.

22.1.4 Satz 1

Sei R ein kommutativer Ring und seien M und N zwei R Moduln.

Dann lässt sich die Konstruktion des Tensorproduktes von Vektorräumen wörtlich auf R Moduln übertragen, d.h. auf

$$M \otimes_R N.$$

22.1.5 Beispiel

Es gilt

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \;=\; 0.$$

22.2 Definitionen und Sätze

22.2.1 Satz 1

Seien V, W zwei Vektorräume über einem Körper K, sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine Basis von V und sei $\{f_1, .., f_m\}$ eine Basis von W.

Dann ist $\{e_i \otimes f_j\}_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$ eine Basis von $V \otimes W$.

22.2.2 Satz 2

Seien V, W zwei Vektorräume über einem Körper K.

Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V \otimes W & \to & W \otimes V \\ v \otimes w & \mapsto & w \otimes v \end{array}$$

eine Isomorphismus.

22.2.3 Satz 3

Seien V, W zwei Vektorräume über einem Körper K.

Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \psi : V \otimes \mathrm{Hom}_K(V, W) & \to & W \\ (v \otimes \varphi) & \mapsto & \varphi(v) \end{array}$$

linear.

22.2.4 Satz 4

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei V^* der Dualraum von V.

Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : V \otimes V^* &\to K \\ (v \otimes \varphi) &\mapsto \varphi(v) \end{aligned}$$

linear.

22.2.5 Definition

Seien $V_1, .., V_r$ Vektorräume über einem Körper K.

Das r fache Tensorprodukt $V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$ wird induktiv definiert durch

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_r \; := \; (V_1 \otimes \ldots \otimes V_{r-1}) \otimes V_r .$$

Bemerkung

Natürlich kann man die Klammern bei der Definition des r fachen Tensorproduktes auch anders setzten – es sind jedoch alle Möglichkeiten isomorph zueinander.

22.3 Tensoralgebren

Durch das Tensorprodukt von Vektorräumen können nun verschiedene Tensoralgebren definiert werden.

22.3.1 Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $n \geq 0$.

Dann gelten folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} V^{\otimes 0} &:= K \\ V^{\otimes 1} &:= V \\ V^{\otimes 2} &:= V \otimes V \\ &\vdots \\ V^{\otimes n} &:= V \otimes \ldots \otimes V \qquad \text{n-mal} \end{aligned}$$

22.3.2 Definition und Satz

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

Dann bildet

$$T(V) \;=\; \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n} \;=\; (K \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \ldots)$$

die ***Tensoralgebra*** des Vektorraums V.

22.3.3 Satz 1

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\dim(V) = 1$.

Dann ist $T(V)$ isomorph zu dem Polynomring $K[x]$, es gibt eine lineare und bijektive Abbildung

$$\varphi : T(V) \to K[x].$$

22.3.4 Definition und Satz

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, sei

$$T(V) \;=\; \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$$

die Tensoralgebra über V und es ist

$$I \;=\; \{x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in V\}$$

ein Ideal in $T(V)$.

Dann bildet

$$S(V) \;=\; T(V)/I$$

die ***symmetrische Tensoralgebra*** des Vektorraums V.

$S(V)$ ist eine kommutative Algebra über dem Körper K.

22.3.5 Definition und Satz

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, sei

$$T(V) \;=\; \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$$

die Tensoralgebra über V und es ist

$$I \;=\; \{x \otimes x \mid x \in V\}$$

ein Ideal in $T(V)$.

Dann bildet

$$\Lambda(V) \;=\; T(V)/I$$

die ***Graßmannalgebra*** oder ***äußere Algebra*** des Vektorraums V.

Für das Produkte zweier Vektoren $x, y \in V$ in der Graßmannalgebra schreibt man auch $x \wedge y$.

Es gilt

$$\dim_K \Lambda(V) \;=\; 2^m.$$

22.3.6 Definition und Satz

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien $x, y \in V$.

Dann gilt

$$x \wedge y + y \wedge x \;=\; 0.$$

Die Graßmannalgebra ist also ***antikommutativ***.

Beweis

In der Graßmannalgebra gilt

$$\begin{aligned} 0 \;=\; (x+y)\wedge(x+y) \;&=\; (x\wedge x) + (x\wedge y) + (y\wedge x) + (y\wedge y) \\ &=\; 0 + (x\wedge y) + (y\wedge x) + 0 \\ &=\; (x\wedge y) + (y\wedge x). \end{aligned}$$

□

22.3.7 Satz 2

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit einer Basis $\{e_1, .., e_n\}$ und seien $x_1, .., x_n \in V$ mit

$$x_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j.$$

Dann gilt

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \;=\; \underbrace{\det(\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n}}_{\in K} \cdot (e_1 \wedge \ldots \wedge e_n).$$

23 Beweise

23.1 Vektorräume und Dimension

23.1.1 Satz über die Summe von Untervektorräumen

Seien W_1 und W_2 zwei Untervektorräume von V.

Dann gibt es einen kleinsten Untervektorraum W von V, der W_1 und W_2 enthält.

Beweis

Sei zunächst V ein Vektorraum über einem Körper K und sei

$$W \;=\; \{w \in V \mid \text{es gibt } w_1 \in W_1,\; w_2 \in W_2 \text{ mit } w = w_1 + w_2\}.$$

Nach dieser Definition gilt offenbar $W_1 \subset W$ und $W_2 \subset W$. Es muss also nur gezeigt werden, dass W auch wirklich ein Untervektorraum von V ist. Dazu werden die drei Axiome geprüft:

(1) Da $0 \in W_1$ und $0 \in W_2$ ist auch $0 + 0 = 0$ in W.

(2) Seien $w_1, w_1' \in W_1$ und $w_2, w_2' \in W_2$ beliebig. Dann sind $x = w_1 + w_2$ und $y = w_1' + w_2'$ in W. Es gilt

$$x + y \;=\; (w_1 + w_2) + (w_1' + w_2') \;=\; (w_1 + w_1') + (w_2 + w_2').$$

Da $(w_1 + w_1') \in W_1$ und $(w_2 + w_2') \in W_2$ gilt, ist somit für alle $x, y \in W$ auch $x + y \in W$.

(3) Sei $w_1 \in W_1$, sei $w_2 \in W_2$ und sei $\lambda \in K$. Dann ist $x = w_1 + w_2 \in W$ und es gilt

$$\lambda x \;=\; \lambda(w_1 + w_2) \;=\; \lambda w_1 + \lambda w_2.$$

Da $\lambda w_1 \in W_1$ und $\lambda w_2 \in W_2$ gilt, ist auch $\lambda x \in W$. □

23.1.2 Eindeutigkeit der Linearkombination

Sei V ein Vektorraum und sei $\{x_1,..,x_r\}$ ein System von linear unabhängigen Vektoren aus V.

Dann ist die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$$

eines Vektors $x \in V$ eindeutig bestimmt.

Beweis

Seien

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \qquad \text{und} \qquad x = \sum_{i=1}^{r} \mu_i x_i$$

zwei Darstellungen von $x \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i x_i \\ 0 &= \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i - \mu_i) x_i. \end{aligned}$$

Da $\{x_1,..,x_r\}$ aber gerade linear unabhängig ist, folgt demnach

$$\lambda_i - \mu_i = 0 \qquad \text{für alle } i = 1,..,r.$$

Somit gilt auch $\lambda_i = \mu_i$ für alle $i = 1,..,r$ und dies zeigt gerade, dass die Darstellung von x eindeutig ist. □

23.1.3 Dimensionsformel für Vektorräume

Sei V ein Vektorraum und seien $W_1, W_2 \subset V$ Untervektorräume von V.

Dann gilt

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2).$$

Beweis

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und wähle eine Basis $B = \{b_1,..,b_n\}$ von V. Dann gibt es auch eine Teilmenge $B_1 \subset B$, die eine Basis von W_1 ist, sowie eine Teilmenge $B_2 \subset B$, die eine Basis von W_2 ist.

Es soll nun zunächst gezeigt werden, dass $B_1 \cap B_2$ eine Basis von $W_1 \cap W_2$ ist. Auch $B_1 \cap B_2 \subset B$ besteht als Teilmenge einer Basis aus linear unabhängigen

Vektoren, daher ist nur zu zeigen, dass $W_1 \cap W_2$ von $B_1 \cap B_2$ erzeugt wird. Sei dazu $x \in W_1 \cap W_2$. Dann gilt $x \in W_1$, daher gibt es $\lambda_1, .., \lambda_n$ mit

$$x = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n \qquad \text{mit } \lambda_i = 0 \text{ für alle } i \text{ mit } b_i \notin B_1.$$

Analog gilt $x \in W_2$ und man erhält $\mu_1, .., \mu_n$ mit

$$x = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n \qquad \text{mit } \mu_i = 0 \text{ für alle } i \text{ mit } b_i \notin B_2.$$

Weil aber die Vektoren $\{b_1, .., b_n\}$ linear unabhängig sind, folgt $\lambda_i = \mu_i$ für alle $i = 1, ..n$ und demnach gilt auch

$$\lambda_i = \mu_i = 0 \qquad \text{für alle } i \text{ mit } b_i \notin B_1 \cap B_2.$$

Dies zeigt genau, dass $W_1 \cap W_2$ von $B_1 \cap B_2$ erzeugt wird, dass also $B_1 \cap B_2$ eine Basis von $W_1 \cap W_2$ ist.

Weiter soll nun gezeigt werden, dass $B_1 \cup B_2$ eine Basis von $W_1 + W_2$ ist. Auch $B_1 \cup B_2 \subset B$ besteht als Teilmenge einer Basis aus linear unabhängigen Vektoren. Da nun W_1 von B_1 und W_2 von B_2 erzeugt werden, wird auch gerade $W_1 + W_2$ von $B_1 \cup B_2$ erzeugt. Somit ist $B_1 \cup B_2$ eine Basis von $W_1 + W_2$.

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} \dim(W_1) &= |B_1|, \qquad & \dim(W_1 \cap W_2) &= |B_1 \cap B_2|, \\ \dim(W_2) &= |B_2|, \qquad & \dim(W_1 + W_2) &= |B_1 \cup B_2|. \end{aligned}$$

Demnach folgt

$$|B_1 \cap B_2| + |B_1 \cup B_2| = |B_1 \cap B_2| + |B_1 \setminus B_2| + |B_2| = |B_1| + |B_2|,$$

was gerade die Dimensionsformel zeigt. □

23.2 Lineare Abbildungen und Matrizen

23.2.1 Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)).$$

Beweis

Es wird wieder angenommen, dass die beiden Vektorräume V und W endlich dimensional sind.

Sei nun $\{b_1, .., b_r\}$ eine Basis von $\ker(\varphi)$ und wähle $v_1, .., v_s \in V$ so, dass $\{\varphi(v_1), .., \varphi(v_s)\}$ eine Basis von $\mathrm{Im}(\varphi)$ ist. Es soll nun gezeigt werden, dass

$$B = \{b_1, .., b_r, v_1, .., v_s\}$$

eine Basis von V ist. Dazu muss B gerade ein System aus linear unabhängigen Vektoren sein, die auch noch V erzeugen.

Zur linearen Unabhängigkeit: Sei

$$0 = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_s v_s$$

mit $\lambda_1, .., \lambda_r, \mu_1, .., \mu_s \in K$. Dann folgt aufgrund der Linearität von φ gerade

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(0) \\ &= \lambda_1\varphi(b_1) + \ldots + \lambda_r\varphi(b_r) + \mu_1\varphi(v_1) + \ldots + \mu_s\varphi(v_s) \\ &= \mu_1\varphi(v_1) + \ldots + \mu_s\varphi(v_s), \end{aligned}$$

da $b_1, .., b_r \in \ker(\varphi)$. Es gilt somit

$$\mu_1 = \ldots = \mu_s = 0,$$

da $\{\varphi(v_1), .., \varphi(v_s)\}$ linear unabhängig sind. Es gilt auch

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0,$$

da $\{b_1, .., b_r\}$ linear unabhängig sind. Dies zeigt, dass B ein System aus linear unabhängigen Vektoren ist.

Zum Erzeugendensystem: Sei $v \in V$ beliebig. Dann gibt es $\mu_1, .., \mu_s \in K$ mit

$$\varphi(v) = \mu_1\varphi(v_1) + \ldots + \mu_s\varphi(v_s),$$

da ja gerade $\{\varphi(v_1), .., \varphi(v_s)\}$ eine Basis von $\mathrm{Im}(\varphi)$ ist. Aufgrund der Linearität von φ folgt nun

$$\varphi(v - \mu_1 v_1 - \ldots - \mu_s v_s) = 0,$$

also ist $(v - \mu_1 v_1 - \ldots - \mu_s v_s) \in \ker(\varphi)$. Es gilt also

$$v - \mu_1 v_1 - \ldots - \mu_s v_s = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r$$

mit $\lambda_1, .., \lambda_r \in K$, da $\{b_1, .., b_r\}$ eine Basis von $\ker(\varphi)$. Somit erhält man durch

$$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_s v_s$$

eine Linearkombination von v mit Vektoren aus B. □

23.3 Determinanten

23.3.1 Rechenregeln für Endomorphismen

Seien $\varphi, \psi : V \to V$ zwei Endomorphismen. Dann gilt:

(1) $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \cdot \det(\psi)$.

(2) $\det(id) = 1$.

(3) $\varphi : V \to V$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\det(\varphi) \neq 0$ gilt.

(4) Existiert φ^{-1}, dann gilt $\det(\varphi^{-1}) = \det(\varphi)^{-1}$.

Beweis Teil 1

Sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine Basis von V.

Dann gilt nach Definition 10.4.2

$$\begin{aligned} \det(\varphi \circ \psi) \cdot f(e_1, .., e_n) &= f((\varphi \circ \psi)(e_1), .., (\varphi \circ \psi)(e_n)) \\ &= f(\varphi(\psi(e_1)), .., \varphi(\psi(e_n))) \\ &= \det(\varphi) \cdot f(\psi(e_1), .., \psi(e_n)) \\ &= \det(\varphi) \cdot \det(\psi) \cdot f(e_1, .., e_n). \end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung. □

Beweis Teil 2

Sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine Standardbasis von V.

Dann gilt nach Definition 10.4.2

$$\det(id) \cdot f(e_1, .., e_n) = f(id(e_1), .., id(e_n)) = f(e_1, .., e_n).$$

Da gerade $f(e_1, .., e_n) = 1$ gilt, folgt sofort die Behauptung. □

Beweis Teil 3

Sei zunächst φ ein Isomorphismus. Dann gibt es auch eine Umkehrfunktion φ^{-1} von φ und es folgt

$$\det(\varphi) \cdot \det(\varphi^{-1}) = \det(\varphi \circ \varphi^{-1}) = \det(id) = 1.$$

Somit gilt $\det(\varphi) \neq 0$.

Sei nun $\det(\varphi) \neq 0$. Dann gibt es ein $c = \det(\psi)$ mit $\det(\varphi) \cdot c = 1$ und es folgt

$$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \cdot \det(\psi) = \det(\varphi) \cdot c = 1 = \det(id).$$

Demnach gilt nun $(\varphi \circ \psi) = id$ und somit ist ψ eine Umkehrfunktion von φ. Dies zeigt, dass φ ein Isomorphismus ist. □

Beweis Teil 4

Es gilt nun

$$\det(id) \;=\; \det(\varphi \circ \varphi^{-1}) \;=\; \det(\varphi) \cdot \det(\varphi^{-1}) \;=\; 1.$$

Somit folgt die Behauptung. □

23.3.2 Rechenregeln für Matrizen

Seien $A, B \in \mathbb{M}(n, K)$ und $\lambda \in K$. Dann gilt:

(1) $\det(A) \;=\; \det(A^t)$

(2) $\det(A \cdot B) \;=\; \det(A) \cdot \det(B)$

(3) $\det(\lambda A) \;=\; \lambda^n \det(A)$

Beweis Teil 1

Sei $A = (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ und sei $A^t = (\alpha'_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.
Zunächst einmal gilt:

(1) $\alpha_{\pi(i)i} = \alpha_{j\pi^{-1}(j)}$ mit $j = \pi(i)$.

(2) $\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi^{-1})$ für alle $\pi \in S_n$.

Mit diesen Erkenntnissen und nach der Leibnitz-Formel folgt nun

$$\begin{aligned}
\det(A^t) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \alpha'_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha'_{n\pi(n)} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \alpha_{\pi(1)1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{\pi(n)n} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \alpha_{1\pi^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) \cdot \alpha_{1\pi^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\pi^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) \cdot \alpha_{1\pi^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)} \\
&= \det(A).
\end{aligned}$$

□

Beweis Teil 2

Sei φ die zu A und sei ψ die zu B bezüglich der Standardbasis $\{e_1, .., e_n\}$ gehörige lineare Abbildung.

Dann gilt nach Definition und nach Beweis 23.3.1 gerade

$$\det(A \cdot B) \;=\; \det(\varphi \circ \psi) \;=\; \det(\varphi) \cdot \det(\psi) \;=\; \det(A) \cdot \det(B).$$

□

Beweis Teil 3

Seien a_j sind die j-ten Spalten von A.

Dann gilt

$$\det(\lambda A) \;=\; f(\lambda a_1, .., \lambda a_n) \;=\; \lambda^n f(a_1, .., a_n) \;=\; \lambda^n \det(A).$$

□

23.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

23.4.1 Satz 1

Sei V ein n dimensionaler Vektorraum und sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit n verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_n$.

Dann gibt es eine Basis von V, die nur aus den Eigenvektoren zu $\lambda_1, .., \lambda_n$ besteht, so dass gerade gilt:

$$\mathbb{M}(\varphi, \{\lambda_1, .., \lambda_n\}) \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Beweis

Da es zu jedem Eigenwert auch ein Eigenvektor gibt, findet man für alle $i = 1, .., n$ gerade n Vektoren $e_i \in V$, die alle ungleich 0 sind, und für die $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$ gilt.

Es soll nun gezeigt werden, dass $\{e_1, .., e_n\}$ eine Basis von V ist. Dazu muss die lineare Unabhängigkeit geprüft werden.

Angenommen $\{e_1, .., e_n\}$ ist linear abhängig, dann wähle eine Teilmenge $\{e_1, .., e_r\}$ so von $\{e_1, .., e_n\}$, dass r minimal ist und dass

$$\mu_1 e_1 + \ldots + \mu_r e_r \;=\; 0$$

mit $\mu_1, .., \mu_r \neq 0$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned}\varphi(\mu_1 e_1 + \ldots + \mu_r e_r) &= \mu_1 \varphi(e_1) + \ldots + \mu_r \varphi(e_r) \\ &= \mu_1 \lambda_1 e_1 + \ldots + \mu_r \lambda_r e_r \;=\; 0.\end{aligned}$$

Es gilt aber auch durch Multiplikation mit λ_1

$$\mu_1 \lambda_1 e_1 + \mu_2 \lambda_1 + \ldots + \mu_r \lambda_1 e_r \;=\; 0,$$

somit erhält man durch Substraktion gerade

$$(\mu_2 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1) e_2 + \ldots + (\mu_r \lambda_r - \mu_r \lambda_1) e_r \;=\; 0.$$

Da r nun aber minimal gewählt wurde, muss für diese Relation gerade

$$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1) \;=\; \ldots \;=\; \mu_r(\lambda_r - \lambda_1) \;=\; 0$$

gelten. Da die n Eigenwektoren $\lambda_1, .., \lambda_n$ aber paarweise verschieden sind, folgt

$$\mu_2 \;=\; \ldots \;=\; \mu_r \;=\; 0.$$

Nun folgt $\mu_1 e_1 = 0$ und da $e_1 \neq 0$ ist, muss $\mu_1 = 0$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch und somit kann $\{e_1, .., e_n\}$ nicht linear abhängig sein. □

23.5 Gruppen und Ringe

23.5.1 Untergruppen der ganzen Zahlen

Alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ sind von der Form $n\mathbb{Z} = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Beweis

Sei H eine nicht triviale Untergruppe von $\mathbb{Z}$.

Sei nun $n \in H$ mit $n \neq 0$ und mit $|n|$ minimal. Weiter sei $h \in H$ beliebig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien n und h größer als 0. Durch Division mit Rest erhält man nun

$$h \;=\; k \cdot n + r$$

mit $r, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und mit $0 \leq r < n$. Da h und n Elemente aus H sind, ist auch $r \in H$. Wegen der Minimalität von n folgt somit $r = 0$. Demnach ist $h = k \cdot n$, also ist auch $H = n\mathbb{Z}$. □

23.5.2 Satz über zwei Nebenklassen

Zwei Linksnebenklassen $g_1 H$ und $g_2 H$ sind entweder gleich oder disjunkt.

Beweis

Angenommen es gilt $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$, dann gibt es h_1 und ein h_2 in H mit $g_1h_1 = g_2h_2$. Es folgt dann aber auch $g_1 = g_2h_2h_1^{-1} = g_2(h_2h_1^{-1})$. Für ein beliebiges $h \in H$ gilt dann aber auch $g_1h = g_2(h_2h_1^{-1}h)$. Da h beliebig gewählt wurde, folgt somit $g_2H \subset g_1H$. Analog erhält man nun auch $g_1H \subset g_2H$ und somit gilt $g_1H = g_2H$, falls diese beiden Mengen nicht disjunkt sind. □

23.5.3 Satz von Lagrange

Sei G eine endliche Gruppe und sei $H \subset G$ eine Untergruppe von G.

Dann ist $|H|$ ein Teiler von $|G|$.

Beweis

Es müssen dazu auch die vorherigen Sätze bewiesen werden.

Sei gH eine Linksnebenklasse von H in G. Dann ist die Abbildung

$$f : H \to gH \qquad \text{mit} \qquad f(h) \;=\; gh$$

offenbar surjektiv und auch injektiv, denn es gilt:

$$gh \;=\; gh' \quad \Rightarrow \quad g^{-1}gh \;=\; g^{-1}gh' \quad \Rightarrow \quad h \;=\; h'$$

Somit ist f bijektiv und es folgt $|H| = |gH|$. Insbesondere sind also alle disjunkten Linksnebenklassen gleich mächtig.

Sei nun G/H die Menge aller Nebenklassen von H in G. Dann gilt wegen der disjunkten Zerlegung gerade

$$G \;=\; \bigcup_{G/H} gH.$$

Da alle Linksnebenklassen gH aber gleich mächtig sind und die Ordnung von H besitzen, folgt

$$|G| \;=\; |G/H| \cdot |H|.$$

Somit ist $|H|$ auch ein Teiler von $|G|$. □

23.5.4 Primideale und maximale Ideale

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement 1. Dann gilt:

(1) P ist Primideal $\Leftrightarrow$ R/P ist ein Integritätsring.

(2) M ist maximales Ideal $\Leftrightarrow$ R/M ist ein Körper.

(3) Jedes maximale Ideal ist auch ein Primideal.

Beweis Teil 1

In diesem Beweis wird gezeigt, dass wenn P kein Primideal ist auch R/P kein Integritätsring sein kann und umgekehrt. Durch diese beiden Feststellungen ist P also genau dann ein Primideal wenn R/P ein Integritätsring ist.

Angenommen P ist kein Primideal, dann gibt es $a, b \in R$ mit $a, b \notin P$ aber $a \cdot b \in P$. In diesem Falle gilt dann aber in R/P

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \;=\; (a+P) \cdot (b+P) \;=\; a \cdot b + P \;=\; \overline{0}.$$

Also ist R/P kein Integritätsring.

Sei nun umgekehrt R/P kein Integritätsring, dann gibt es $\overline{a} = (a+P)$ und $\overline{b} = (b+P)$ in R/P mit $\overline{a}, \overline{b} \neq \overline{0}$ aber $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$. Nun gilt $a \cdot b \in P$, wobei $a, b \notin P$, demnach ist P kein Primideal. □

Beweis Teil 2

R/M ist auf jeden Fall ein kommutativer Ring mit 1, es muss daher zu jedem Element $\overline{r} = r + M \in R/M$ mit $\overline{r} \neq \overline{0}$ ein inverses Element $\overline{s} \in R/M$ gefunden werden.

Sei nun M ein maximales Ideal und sei $\overline{r} = r + M \in R/M$ mit $\overline{r} \neq \overline{0}$. Dann ist $r \notin M$ und da M maximal ist, gilt

$$R \cdot r + M \;=\; R,$$

also gibt es eine Darstellung $s \cdot r + m = 1$ mit $s \in R$ und $m \in M$. Dann gilt aber auch

$$\overline{r} \cdot \overline{s} \;=\; (r+M) \cdot (s+M) \;=\; r \cdot s + M \;=\; 1 + M \;=\; \overline{1}.$$

Dies zeigt, dass es zu jedem $\overline{r}$ ein inverses Element $\overline{s}$ gibt.

Sei nun umgekehrt R/M ein Körper und sei $r \notin M$ beliebig. Dann gibt es zu $\overline{r} = (r+M) \in R/M$ ein inverses Element $\overline{s} = (s+M) \in R/M$. Somit gilt wieder

$$\overline{r} \cdot \overline{s} \;=\; (r+M) \cdot (s+M) \;=\; r \cdot s + M \;=\; 1 + M \;=\; \overline{1}.$$

Dies zeigt aber, dass $R \cdot r + M$ das Einselement 1 enthält und somit alle Elemente aus R. Es ist also jedes Ideal der Form $R \cdot r + M$ mit $r \notin M$ bereits der ganze Ring R, daher muss M ein maximales Ideal sein. □

Beweis Teil 3

Da jeder Körper auch ein Integritätsring ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus Teil 1 und Teil 2. □

23.6 Bilinearformen

23.6.1 Dimensionsformel für Bilinearformen

Sei (V, b) endlich dimensional und nicht ausgeartet und sei W ein Untervektorraum von V.

Dann gilt
$$\dim(W^\perp) \;=\; \dim(V) - \dim(W).$$

Beweis

Sei $\{e_1, .., e_r\}$ eine Basis von W, die zu einer Basis $\{e_1, .., e_n\}$ von V ergänzt wird. Sei weiter $\{f'_1, .., f'_n\}$ die zu $\{e_1, .., e_n\}$ gehörige duale Basis des V^*, es gilt dann also
$$f'_i(e_j) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases} .$$
Nach Satz 19.2.19 ist
$$\varphi : V \to V^*$$
ein Isomorphismus, somit gibt es auch eine Basis $\{f_1, .., f_n\}$ von V, so dass
$$\varphi(f_i) \;=\; f'_i \qquad \text{für} \;\; i = 1, .., n$$
gilt. Dann ist aber gerade
$$B \;=\; (\beta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \;=\; E_n \qquad \text{mit} \qquad \beta_{ij} \;=\; b(e_i, f_j)$$
die $n \times n$ Einheitsmatrix. Es folgt nun
$$W^\perp \;=\; K \cdot f_{r+1} + \ldots + K \cdot f_n$$
und es ergibt sich
$$\dim(W^\perp) \;=\; n - r \;=\; \dim(V) - \dim(W).$$

□

23.6.2 Satz über hyperbolische Ebenen

Sei (V, b) eine hyperbolische Ebene.

Dann gibt es $e, f \in V$ mit
$$b(e, e) \;=\; b(f, f) \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad b(e, f) \;=\; b(f, e) \;=\; 1.$$

Beweis

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, sei $b(e,e) = 0$ und sei

$$V \;=\; K \cdot e + K \cdot \tilde{f}.$$

Da (V, b) nach Definition einer hyperbolischen Ebene nicht ausgeartet ist, folgt

$$b(e, \tilde{f}) \;=\; c \;\neq\; 0.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $c = 1$, dazu muss ggf. $\tilde{f}$ mit einem Skalaren aus K multipliziert werden.

Sei nun

$$f \;=\; \lambda \cdot e + \tilde{f}.$$

Dann gilt

$$b(f,e) \;=\; b(e,f) \;=\; b(e,\lambda e) + b(e,\tilde{f}) \;=\; \lambda b(e,e) + b(e,\tilde{f}) \;=\; 1.$$

Nun soll $\lambda \in K$ so gewählt werden, dass auch $b(f,f) = 0$ gilt:

$$b(f,f) \;=\; 2\lambda b(e,\tilde{f}) + b(\tilde{f},\tilde{f}).$$

Setzt nun $\lambda = -\frac{1}{2} b(\tilde{f},\tilde{f})$. Dann gilt auch

$$b(e,e) \;=\; b(f,f) \;=\; 0,$$

was die Behauptung zeigt. □

Literaturverzeichnis

[1] Fischer, G. (2000): "Lineare Algebra". 12. Auflage, Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden.

[2] Merziger, G., Wirth, T. (2002): "Repetitorium der höheren Mathematik". 4. Auflage, Binomi, Hannover.

[3] Kersten, I. (2001): "Analytische Geometrie und Lineare Algebra". Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2000/2001. Mathematisches Institut, Göttingen.

[4] Scholz, D. (2004): "Analytische Geometrie und Lineare Algebra I und II". Vorlesungsmitschrift im Wintersemester 2003/2004 und SoSe 2004 bei Prof. U. Stuhler, Universität Göttingen.

[5] Smith, L. (1998): "Linear Algebra". 3. Auflage, Springer Verlag, New York.

[6] Stuhler, U. (2004): "Analytische Geometrie und Lineare Algebra I". Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2003/2004. Mathematisches Institut, Göttingen.

[7] Stuhler, U. (1999): "Analytische Geometrie und Lineare Algebra II". Skript zur Vorlesung im Sommersemester 2004. Unverändeter Nachdruck. Mathematisches Institut, Göttingen.

[8] Wille, D. (2001): "Repetitorium der Linearen Algebra Teil 1". 4. Auflage, Binomi, Hannover.

Index