Dynamische Systeme

26. Juni 2006

Vortrag von Daniel Scholz

Grundlagen und Beispiele

Grundlagen

Definition

Ein dynamisches System besteht aus einem **Zustandsraum** S und aus einer stetigen Selbstabbildung $f : S \to S$.

Wir untersuchen die Folgen

$$x_0 \to f(x_0) \to f(f(x_0)) \to f(f(f(x_0))) \to f(f(f(f(x_0)))) \to \ldots,$$

und schreiben

$$x_0 \to f(x) \to f^2(x) \to f^3(x) \to f^4(x) \to \ldots.$$

Diese Folgen können wir rekursiv durch $x_n = f(x_{n-1})$ definieren. Wir nennen sie eine **Bahn** oder ein **Orbit** zum Startzustand $x = x_0$.

Grundlagen

Fragestellungen

1. Wenn wir den Anfang einer Bahn kennen, können wir dann weitere Zustände hervorsagen?
2. Wie sehen die Bahnen in entfernter Zukunft aus, also zum Zeitpunkt $t \longrightarrow \infty$?
3. Was können wir über Fixpunkte von f oder oder über periodische Bahnen aussagen?
4. Wann verhält sich ein System *chaotisch*?

Beispiele

Geradlinige Bewegung

Sei $S = \mathbb{R}^3$. Zu beliebigen reellen Zahlen a, b und c definieren wir ein **geradliniges System** durch

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + a, x_2 + b, x_3 + c).$$

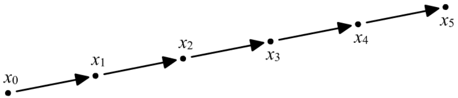

Abbildung: Beispiel einer geradlinigen Bewegung.

Beispiele

Rotation auf dem Einheitskreis

Sei $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der Einheitskreis und

$$f : S \to S \qquad \text{mit} \qquad f(z) \;=\; z \cdot e^{i\theta},$$

dabei ist $\theta \in [0, 2\pi)$. Es ergibt sich sofort

$$f^n(z) \;=\; z \cdot e^{in\theta}.$$

Wir können dieses System somit als Uhr ansehen: Zu jeden Zeitpunkt wird der Zustand um den gleichen Winkel weitergedreht.

Beispiele

Rotation als Verschiebung im Intervall

Sei $S = [0,1)$ und sei für ein $a \in [0,1)$

$$f(x) = (x+a)(\mathrm{mod}\,1).$$

Durch dieses System wird ein Zustand x jeweils um a nach rechts verschoben.

Wir der Folgezustand dadurch größer gleich 1, so zeihen wir 1 ab.

Beispiele

Bernoulli Zufallsvariablen

Wir betrachten weiterhin $S = [0,1)$ und untersuchen nun

$$f(x) = 2x(\operatorname{mod} 1) = \begin{cases} 2x & \text{für} \quad 0 \leq x < 1/2 \\ 2x-1 & \text{für} \quad 1/2 \leq x < 1 \end{cases} .$$

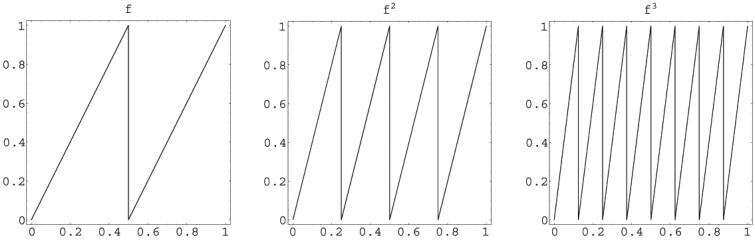

Abbildung: Verdeutlichung der Funktionen f^n.

Beispiele

Wir führen nun eine weitere Funktion, eine **Testfunktion**, ein:

$$\phi(x) = 1_{[1/2,1)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq x < 1/2 \\ 1 & \text{für} \quad 1/2 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Dies Funktion wenden wir auf die Bahn zu einem Startzustand x an. Damit erhalten wir die Folge

$$\phi(x) \to \phi(f(x)) \to \phi(f^2(x)) \to \phi(f^3(x)) \to \phi(f^4(x)) \to \ldots.$$

Dieses Beispiel wird auch beim Ergodensatz wieder aufgegriefen.

Beispiele

Logistische Funktion

Sei weiterhin $S = [0, 1]$ und sei

$$f(x) = ax(1 - x).$$

Für alle $0 \leq a \leq 4$ ist f eine Selbstabbildung, also wird für diese Werte für a auch eine dynamisches System definiert.

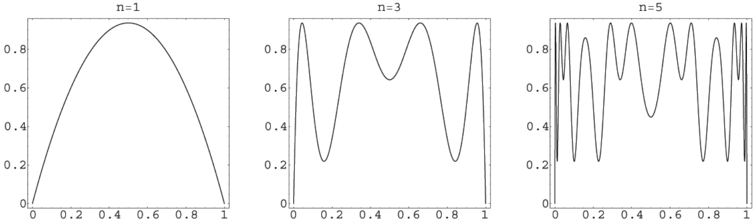

Abbildung: Verdeutlichung der logistischen Funktion f^n für $a = 3.75$.

Beispiele

Interpretation

Wir nehmen an, dass für einen Vermehrungsfaktor a

$$N_{n+1} = a \cdot N_n$$

gilt. Durch Futtermangel reduziere sich a auf

$$a - abN_n = a(1 - bN_n),$$

da die Futterreduktion proportional zur Zahl N_n der Futterverbraucher ist. Damit erhalten wir

$$N_{n+1} = aN_n(1 - bN_n).$$

Durch die Normierung $x = bN \leq 1$ erhalten wir schließlich

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n).$$

Fixpunkte dynamischer Systeme

Fixpunkte

Definition

Ein Zustand $x \in S$ heißt ein **Fixpunkt** oder ein **stabiler Punkt** des dynamischen Systems $f : S \to S$, wenn $f(x) = x$ gilt.

Für einen Fixpunkt x_0 gilt natürlich auch

$$x_n = f^n(x_0) = x_0.$$

Fixpunkte

Beispiel

Für $a = 2$ erhalten wir die logistische Funktion

$$f(x) = 2x(1-x) = -2x^2 + 2x.$$

Der Zustand $x = 1/2$ ist ein Fixpunkt, denn es gilt

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Periodische Bahnen

Definition

Die Bahn $x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to \dots$ heißt **periodische Bahn** zum dynamischen System $f : S \to S$, wenn es eine natürliche Zahl p gibt, so dass

$$x_{k+p} \;=\; f^{k+p}(x_0) \;=\; f^k(x_0) \;=\; x_k$$

gilt für alle $k \in \mathbb{N}$.

Eine periodische Bahn besucht also jeden Zustand alle p Zeiteinheiten.

Periodische Bahnen

Beispiel

Sei $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der Einheitskreis und

$$f : S \to S \qquad \text{mit} \qquad f(z) \;=\; z \cdot \mathrm{e}^{ia},$$

dabei sei $a = 2\pi \cdot m/n$ und m, n sind natürliche Zahlen. Dann erhalten wir zu einem beliebigen Startzustand $z \in S$ die periodische Bahn

$$z \;\to\; z\mathrm{e}^{ia} \;\to\; z\mathrm{e}^{2ia} \;\to\; \dots \;\to\; z\mathrm{e}^{(n-1)ia}.$$

Reelle Funktionen

Definition

Ein Fixpunkt $x \in S$ heißt **abstoßend**, wenn sich jede Bahn mit Startzuständen in einer Umgebung von x von diesem Startpunkt entfernt.

Ein Fixpunkt $x \in S$ heißt **anziehend**, wenn sich jede Bahn mit Startzuständen in einer Umgebung von x dem Fixpunkt x annähert.

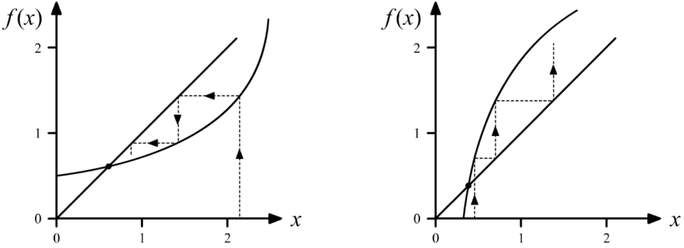

Abbildung: Anziehender und abstoßender Fixpunkt.

Reelle Funktionen

Verhalten bei reellwertigen Funktionen

Sei nun $f : S \to S$ ein reellwertiges Problem. Dann ist ein Fixpunkt x abstoßend, wenn

$$|f'(x)| > 1$$

gilt, und anziehend für

$$|f'(x)| < 1.$$

Dies folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Für denn Fall $|f'(x)| = 1$ kann keine Aussage getroffen werden.

Beispiel

Logistische Funktion

Wie betrachten wieder die logistische Funktion

$$f(x) = ax(1-x)$$

für $0 \leq a \leq 4$. Wir erhalten

$$f'(x) = a(1-2x) = a - 2ax.$$

Da wir uns nur für Fixpunkte $x \in [0,1]$ interessierten, betrachten wir für $a \leq 1$ den Fixpunkt 0 und für $a > 1$ die beiden Fixpunkte

$$0 \quad \text{und} \quad \frac{a-1}{a}.$$

Beispiel

1. Für $0 \leq a < 1$ gilt $f'(0) = a$, also ist 0 ein anziehender Fixpunkt.
2. Für $1 < a < 3$ gilt $f'(0) = a$, also ist 0 ein abstoßender Fixpunkt. Weiter gilt $f'((a-1)/a) = 2 - a$, also ist der zweite Fixpunkt anziehend.
3. Für $3 < a \leq 4$ sind beide Fixpunkte abstoßend. Für $a < a_F$ mit $a_F \approx 3.57$ erhalten wir für fast alle Startzustände eine Bahn, die 2^k Häufungspunkte aufweist. Für Werte von $a > a_F$ verhält sich das System *chaotisch*.

   Der Zahlenwert $a_F \approx 3.57$ heißt **Feigenbaumkonstante**.

Beispiel

Feigenbaumdiagramm

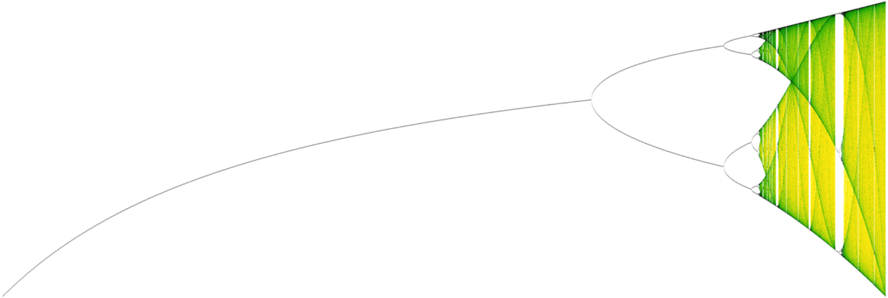

Abbildung: Eingefärbtes Feigenbaumdiagramm für $1 \leq a \leq 4$.

Beispiel

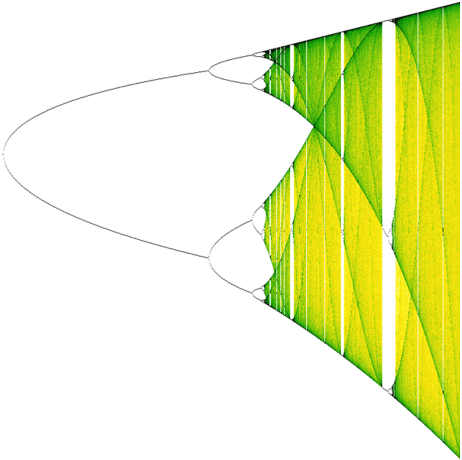

Abbildung: Eingefärbtes Feigenbaumdiagramm für $3 \leq a \leq 4$.

Dynamische Systeme in ihren Anwendungen

Newtonverfahren

Wir betrachten die Funktion

$$\varphi(z) \; = \; z^3 - 1$$

und wollen die Nullstellen dieser Funktion numerisch bestimmen. Das Newtonverfahren liefert die Iterationsvorschrift

$$z_{n+1} \; = \; z_n - \frac{\varphi(z_n)}{\varphi'(z_n)}.$$

Wir betrachten entsprechend das dynamische System $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) \; = \; z - \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)} \; = \; z - \frac{z^3 - 1}{3z^2} \; = \; \frac{3z^3 - z^3 + 1}{3z^2} \; = \; \frac{2}{3}z + \frac{1}{3z^2}$$

und wollen untersuchen, für welchen Startwerte $x_0 \in \mathbb{C}$ die zugehörige Bahn überhaupt und wenn ja gegen welche Nullstelle konvergiert.

Newtonverfahren

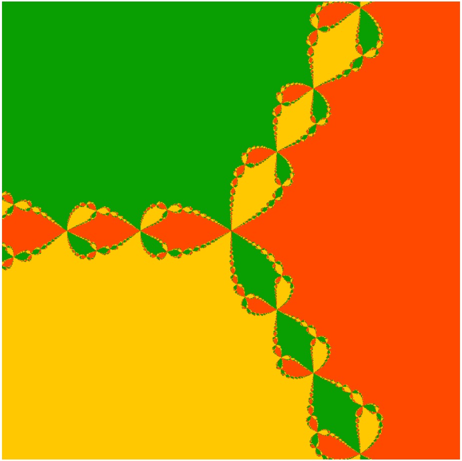

Abbildung: Einzugsbereich beim Newtonverfahren für $x^3 - 1$.

Eulerverfahren

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$z' \ = \ \frac{z^3 - z}{z^2 + (2+2i)z + 1} \ := \ g(z).$$

Für jede Anfangsbedingung $z(0) = z_0 \in \mathbb{C}$ erhalten wir eine eindeutig bestimmt Lösungsfunktion. Diese Lösungsfunktion kann mit dem Eulerverfahren approximiert werden, es gilt dann

$$z(t_k) \ \approx \ z_k \qquad \text{mit} \qquad z_k \ := \ z_{k-1} + h \cdot g(z_{k-1}),$$

dabei ist $h > 0$ eine beliebig kleine Schrittweite. Als Startwert wählen wir $z_0 = z(0)$. Wir erhalten das dynamische System

$$f_h(z) \ = \ z + h \cdot \frac{z^3 - z}{z^2 + (2+2i)z + 1}.$$

Eulerverfahren

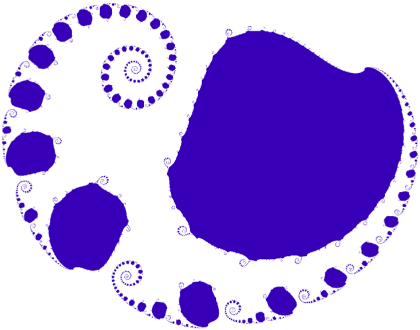

Abbildung: Konvergenz beim Eulerverfahren für $f_h(z)$ mit $h = 0.33$.

Chaotische dynamische Systeme

Grundgedanke

Vorläufige Definition

Wenn kleine Abweichungen vom Startwert x_0 auch nur kleine Änderungen in der zufünftigen Entwicklung des Systems verursachen, nennen wir das System **stabil**. Ergibt sich hingegen bei einer kleinen Änderung von x_0 ein völlig andere Bahn, so nennen wir das System **chaotisch**.

Eine exakte Definition von Chaos werden wir später besprechen.

Beispiele

Apfelmännchen

Wie betrachten die Funktionen

$$p_c : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{mit} \qquad p_c(z) \ = \ z^2 + c$$

für alle $c \in \mathbb{C}$. Zu jeder dieser von c abhängigen Funktionen betrachten wir das dynamische System

$$p_c(z) \ = \ z^2 + c$$

mit dem Startwert $z_0 = 0$. Zu jeder Funktion p_c untersuchen wir also genau eine Bahn hinsichtlich Konvergenz.

Beispiele

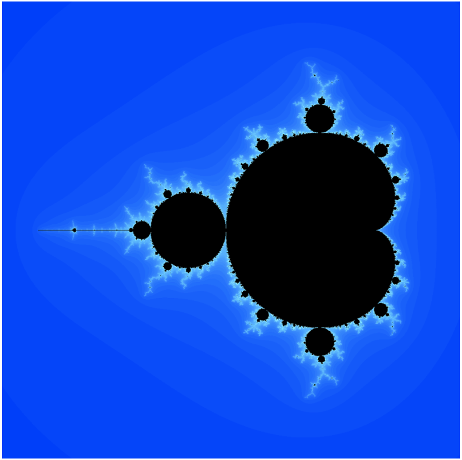

Abbildung: Eingefärbtes Apfelmännchen.

Beispiele

Juliamengen

Nun untersuchen wir wieder nur eine einzige Funktion, aber diese Funktion für alle Startwerte $z_0 \in \mathbb{C}$.

Wir wählen ein festes $d \in \mathbb{C}$ und betrachten das dynamische System

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad \text{mit} \qquad f(z) \;=\; z^2 + d$$

für alle Startwerte z_0.

Beispiele

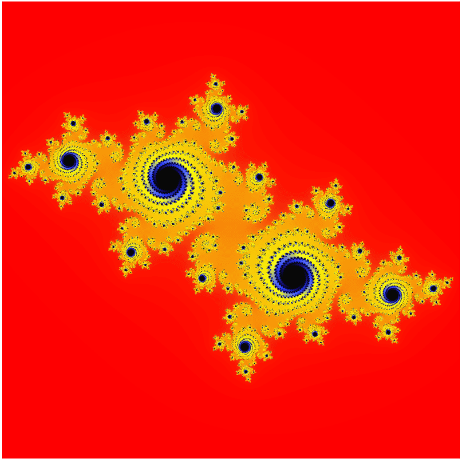

Abbildung: Eingefärbte Juliamenge für $d = -0.46 - 0.555\, i$.

Liapunov Exponent

Definition

Zwei Startzustände seien durch Δx_0 voneinander verschieden. Gibt es dann ein $\lambda > 0$, so dass $\Delta x_n \sim \mathrm{e}^{\lambda n}$ ist, so heißt das System **chaotisch**. Der Faktor λ heißt der **Liapunov Exponent** bezüglich des dynamischen Systems $f : S \to S$.

Der Liapunov Exponent lässt sich nach dieser Definition berechnen durch

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{\mathrm{d}f^n}{\mathrm{d}x}(x_0) \right| .$$

Dieser Grenzwert existiert für fast alle Startzustände x_0.

Beispiel

Logistische Funktion

Für die logistische Funktion erhalten wir den von a abhängigen Liapunov Exponent

$$\lambda(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \left| \frac{\mathrm{d}f_a}{\mathrm{d}x} \left(f_a^k(x_0) \right) \right|$$

mit

$$f_a(x) = ax(1-x).$$

Beispiel

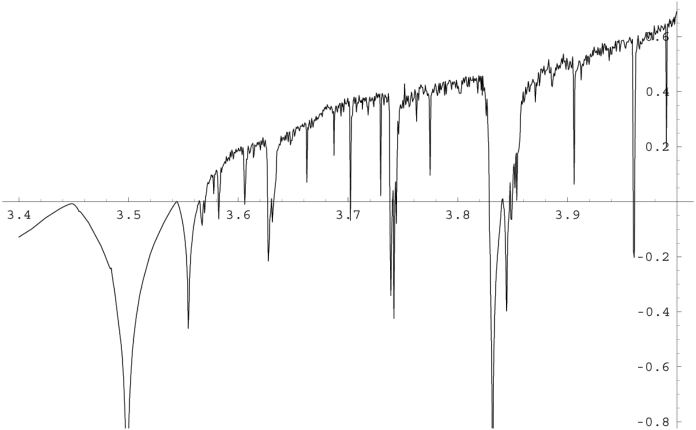

Abbildung: Liapunov Exponent der logistische Funktion.

Beispiel

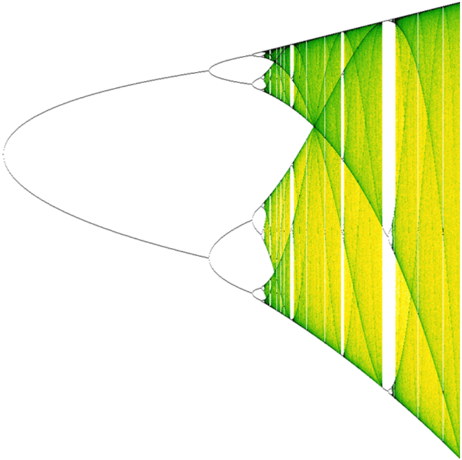

Abbildung: Liapunov Exponent der logistische Funktion.

Literaturverzeichnis

Literaturverzeichnis

Demtröder, W.:
Experimentalphysik 1 – Mechanik und Wärme.
4. Auflage. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 2005

Denker, M. ; Woyczynski, W.A.:
Introductory Statistics and Random Phenomena.
1. Auflage. Birkhäuser, 1998

Kriete, H.:
Rational flows and the dynamics of the Euler's method.
2000. unpublished