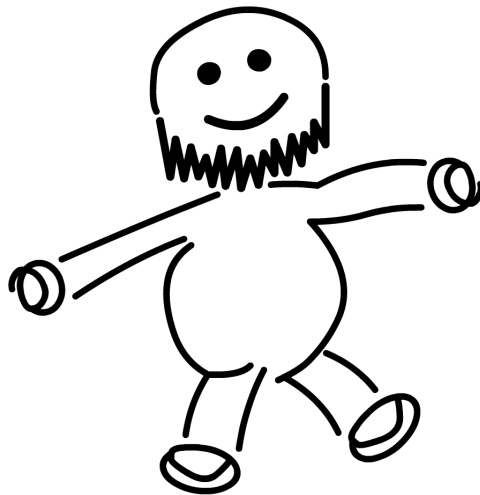


Differential- und Integralrechnung I und II



Daniel Scholz im Sommer und Winter 2004

Inhaltsverzeichnis

Einführung in die Analysis	7
1 Bezeichnungen	8
1.1 Mathematische Schreibweisen	8
2 Beweistechniken	9
2.1 Direkter Beweis	9
2.2 Indirekter Beweis	9
2.3 Vollständige Induktion	10
2.4 Äquivalente Aussagen und Gleichheit	10
2.5 Widerlegen	10
3 Vollständige Induktion	11
3.1 Die Idee	11
3.2 Das Prinzip	11
3.3 Erklärendes Beispiel	12
3.4 Aufgaben	13
4 Mengenlehre und Abbildungen	21
4.1 Grundlegende Definitionen	21
4.2 Geordnete Mengen	22
4.3 Abbildungen	24
4.4 Äquivalenzrelationen	27
4.5 Mächtigkeit	27
5 Natürliche bis komplexe Zahlen	30
5.1 Natürliche Zahlen	30
5.2 Ganze Zahlen	31
5.3 Rationale Zahlen	31
5.4 Reelle Zahlen	32
5.5 Komplexe Zahlen	35
5.6 Aufgaben	38

6	Mathematische Methoden	42
6.1	Gaußsches Eliminationsverfahren	42
6.2	Partialbruchzerlegung (PBZ)	43
6.3	Horner-Schema	44
	Eindimensionale Analysis	47
7	Folgen	48
7.1	Konvergente Folgen	48
7.2	Rechnen mit Folgen	52
7.3	Häufungspunkte	54
7.4	Rekursive Folgen	55
7.5	Aufgaben	57
8	Fundamentale Funktionen	63
8.1	Logarithmus	63
8.2	Arkustangens	65
8.3	Exponentialfunktion	67
8.4	Sinus und Cosinus	68
8.5	Sinushyperbolicus und Cosinushyperbolicus	71
8.6	Aufgaben	72
9	Metrische Räume	76
9.1	Definitionen	76
9.2	Metrische Räume und Folgen	77
9.3	Aufgaben	79
10	Reihen	80
10.1	Definitionen und Sätze	80
10.2	Konvergenzkriterien	82
10.3	q -adische Zahlensysteme	84
10.4	Aufgaben	85
11	Stetigkeit	92
11.1	Definitionen und Sätze	92
11.2	Stetigkeit in metrischen Räumen	94
11.3	Stetige Funktionen	95
11.4	Zwischenwertsatz und Umkehrfunktionen	97
11.5	Aufgaben	100
12	Funktionenfolgen	102
12.1	Grenzwert einer Funktion	102
12.2	Konvergenz von Funktionenfolgen	106
12.3	Banachraum und Funktionenfolgen	108

12.4 Aufgaben	109
13 Differentiation	116
13.1 Definitionen und Sätze	116
13.2 Differentiationsregeln	119
13.3 Regel von l'Hospital	120
13.4 Mittelwertsatz	121
13.5 Aufgaben	123
14 Integration	127
14.1 Integrationstheorie	127
14.2 Stammfunktion	131
14.3 Rechenregeln	132
14.4 Integrationsregeln	132
14.5 Hauptsatz der Analysis	137
14.6 Uneigentliche Integration	139
14.7 Fourierreihen und Fouriertransformation	140
14.8 Aufgaben	142
15 Taylorreihen	149
15.1 Höhere Ableitungen	149
15.2 Definitionen und Sätze	150
15.3 Erklärendes Beispiel	152
15.4 Konvergenzradien	153
15.5 Aufgaben	154
Mehrdimensionale Analysis	157
16 Normierte Räume	158
16.1 Definitionen und Sätze	158
16.2 Hilberträume	160
16.3 Aufgaben	162
17 Topologische Räume	163
17.1 Definitionen	163
17.2 Von der Norm zur Topologie	164
18 Topologie	165
18.1 Offene Mengen	165
18.2 Abgeschlossene Mengen	166
18.3 Beschränkte Mengen	167
18.4 Das Innere und der Abschluß	168
18.5 Hausdorffscher Raum	169
18.6 Zusammenhängende Mengen	169

18.7 Wegzusammenhängende Mengen	171
18.8 Kompakte Mengen	173
18.9 Aufgaben	175
19 Stetige Abbildungen	180
19.1 Definitionen und Sätze	180
19.2 Kartesisches Produkt	181
19.3 Stetige Fortsetzbarkeit	183
19.4 Umkehrabbildung mit mehreren Variablen	185
19.5 Aufgaben	186
20 Differentiation	190
20.1 Partielle Ableitung	190
20.2 Richtungsableitung	191
20.3 Totale Ableitung	192
20.4 Kettenregel	195
20.5 Konvexe Mengen	197
20.6 Mittelwertsätze	199
20.7 Umkehrabbildungen und Differenzierbarkeit	200
20.8 Exkurs normierte Algebren	201
20.9 Aufgaben	202
21 Höhere Ableitungen	210
21.1 Zweite partielle Ableitung	210
21.2 Höhere Ableitung	213
21.3 Aufgaben	217
22 Extrema	221
22.1 Lineare Algebra	221
22.2 Lokale Extrema	222
22.3 Extrema mit Nebenbedingungen	223
22.4 Aufgaben	225
23 Taylorreihen	231
23.1 Definitionen und Sätze	231
23.2 Aufgaben	236
24 Implizite Funktionen	238
24.1 Definitionen und Sätze	239
24.2 Differentialgleichungen	240
24.3 Implizite Funktionen	242
24.4 Umkehrsatz und Satz vom Rang	246
24.5 Aufgaben	248

25	Integrationstheorie	251
25.1	Elementarintegrale	251
25.2	Treppenfunktion	252
25.3	Lebesgue Integral	254
25.4	Konvergenzsätze	256
25.5	Rechenregeln	258
25.6	Zusammenfassung	259
25.7	Aufgaben	260
26	Integration	262
26.1	Integrationsregeln	262
26.2	Transformationsformel	264
26.3	Volumenberechnung im Raum	265
26.4	Parameterintegrale	268
26.5	Aufgaben	270
27	Beweise	277
27.1	Zahlensysteme	277
27.2	Folgen und Funktionalgleichungen	279
27.3	Reihen	282
27.4	Stetigkeit	287
27.5	Differentiation	290
27.6	Integration	297
27.7	Topologie	299
27.8	Mehrdimensionale Differentiation und Integration	302
28	Anhang	308
28.1	Potenzreihen	308
28.2	Geometrische Reihen	308
28.3	Wichtige Grenzwerte	308
28.4	Ableitungen und Stammfunktionen	309
28.5	Vertauschen von Summe, Integral und Grenzwert	310
L	Literaturverzeichnis	311
S	Stichwortverzeichnis	312

Einführung in die Analysis

1 Bezeichnungen

1.1 Mathematische Schreibweisen

1.1.1 Schreibweisen

$\Rightarrow$	heißt "daraus folgt"
$x \Rightarrow y$	heißt "aus x folgt y "
$\Leftrightarrow$	heißt "genau dann wenn"
$x : y$	heißt " x für das gilt y "

1.1.2 Quantoren

$\forall$	heißt "für alle"
$\exists$	heißt "es existiert ein" oder "es gibt ein"
$\exists!$	heißt "es existiert genau ein"

1.1.3 Einschränkung

Sei $f : A \rightarrow B$ eine beliebige Abbildung und sei M eine Teilmenge von A .

$$f|_M \quad :\Leftrightarrow \quad f : M \rightarrow B$$

ist die auf M eingeschränkte Funktion f .

1.1.4 Beispiele

$\forall n \in A : n < 1$	heißt "für alle n Element von A gilt n kleiner 1".
$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$	heißt "für alle ε größer 0 gibt es ein N aus $\mathbb{N}$ ".

2 Beweistechniken

Jeder Beweis sollte in drei Teile gegliedert werden:

(1) Voraussetzung Was ist gegeben?

(2) Behauptung Was wird behauptet?

(3) Beweis Aus den Voraussetzungen wird die Behauptung gezeigt.

Der eigentliche Beweis kann dabei gut strukturiert werden, indem man auch hier weitere Unterteilungen vornimmt:

zu zeigen (1), zu zeigen (2), zu zeigen (3), ...

Im gesamten Beweis sollten weder zu viele noch zu wenig Kommentare und Erläuterungen vorkommen.

2.1 Direkter Beweis

Durch das Ausnutzen bekannter Definitionen und Sätze kann die Behauptung sofort gezeigt werden:

Voraussetzung Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$.

Behauptung Es gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Beweis Es ist $(a - b)^2 \geq 0 \dots$

2.2 Indirekter Beweis

Bei dem indirekten Beweis oder auch Beweis durch Widerspruch wird eine Annahme gemacht, die dem exakten Gegenteil der Behauptung entspricht. Danach wird gezeigt, dass die Annahme stets falsch ist. Daraus folgt, dass das Gegenteil der Annahme gelten muss, was wiederum der Behauptung entspricht:

Voraussetzung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ und $a \neq b$.

Behauptung: Es gilt $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

Beweis: Angenommen es gilt $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab}$.

Dann folgt, dass $(a-b)^2 \leq 0$ gilt, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Somit ist die Annahme falsch und es muss die Behauptung gelten.

2.3 Vollständige Induktion

Ausführliche Beschreibung siehe Seite 11.

2.4 Äquivalente Aussagen und Gleichheit

(1) Eine Behauptung der Art

$$\text{Aussage } A \Leftrightarrow \text{Aussage } B$$

wird bewiesen, indem man

$$A \Rightarrow B \quad \text{und} \quad A \Leftarrow B$$

zeigt.

(2) Eine Behauptung der Art

$$\text{Menge } A = \text{Menge } B$$

wird bewiesen, indem man

$$A \subseteq B \quad \text{und} \quad A \supseteq B$$

zeigt.

2.5 Widerlegen

Widerlegen heißt ein explizites Gegenbeispiel zu finden.

3 Vollständige Induktion

3.1 Die Idee

Die Idee der vollständigen Induktion ist die Gültigkeit von Aussagen (in der Regel Gleichungen oder Ungleichungen) mit einer Unbekannten n für jeden Wert dieser Unbekannten zu beweisen.

Beispiel einer Gleichung: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Beispiel einer Ungleichung: $n < 2^{n-1}$

Bei der Unbekannten handelt es sich um eine natürliche Zahl, also $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Das Prinzip

Der Beweis gliedert sich in drei Teile:

3.2.1 Induktionsvoraussetzung (IV)

Hier wird angenommen, dass die Aussage für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte.

3.2.2 Induktionsanfang (IA)

Hier wird das kleinste $n \in \mathbb{N}$ gesucht, für das eine wahre Aussage entsteht und dies wird auch gezeigt.

3.2.3 Induktionsschritt (IS)

Hier wird zunächst noch einmal die Behauptung aufgeschrieben, nur wird jedes n durch $(n + 1)$ ersetzt. Es entsteht eine neue Behauptung, dessen Gültigkeit nun zu zeigen ist. Es folgt der eigentliche Beweis, dabei wird auf die Induktionsvoraussetzung zurückgegriffen.

Im Induktionsanfang wurde die Gültigkeit für das kleinst mögliche n gezeigt, in der Induktionsvoraussetzung sollte die Behauptung für ein beliebiges n gelten. Nun wird gezeigt, dass die Aussage auch für den Nachfolger von n gilt und somit für alle n , die größer sind als das kleinste n aus dem Induktionsanfang.

3.3 Erklärendes Beispiel

3.3.1 Behauptung

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3.3.2 Beweis

Beweis durch Vollständige Induktion:

Induktionsvoraussetzung

Die Behauptung gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang

Die Behauptung gilt für $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

Induktionsschritt

Von n auf $(n+1)$ schließen:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 + 2 + \dots + n + (n+1) & \left| \begin{array}{l} \text{auf (IV) zurückgreifen} \\ \text{auf Hauptnenner bringen} \end{array} \right. \\ = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) & \\ = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} & \left| \begin{array}{l} (n+1) \text{ ausklammern} \end{array} \right. \\ = \frac{(n+1)(n+2)}{2} & \\ = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} & \end{aligned}$$

Die Induktionsannahme gilt somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

□

3.4 Aufgaben

3.4.1 Aufgabe 1

Prüfe, für welche $n \in \mathbb{N}$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$$

gilt.

Lösung

(IV) Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

(IA) Es gilt

$$1 = 1^2 = 1.$$

(IS) Es gilt

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) &\stackrel{\text{(IV)}}{=} n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2. \end{aligned}$$

Die Aussage gilt somit also für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.4.2 Aufgabe 2

Prüfe, für welche $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{mit} \quad q \neq 1$$

gilt.

Lösung

(IV) Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

(IA) Es gilt

$$\sum_{i=0}^0 q^i = q^0 = 1 = \frac{1 - q}{1 - q} = \frac{1 - q^1}{1 - q}.$$

(IS) Es gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n q^i &= \sum_{i=0}^{n-1} q^i + q^n \\
 &\stackrel{\text{(IV)}}{=} \frac{1 - q^n}{1 - q} + q^n \\
 &= \frac{1 - q^n}{1 - q} + \frac{q^n(1 - q)}{1 - q} \\
 &= \frac{1 - q^n}{1 - q} + \frac{q^n - q^{n+1}}{1 - q} \\
 &= \frac{1 - q^n + q^n - q^{n+1}}{1 - q} \\
 &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.
 \end{aligned}$$

Die Aussage gilt somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.4.3 Aufgabe 3

Prüfe, für welche $n \in \mathbb{N}$

$$n \leq 2^{n-1}$$

gilt.

Lösung

(IV) Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

$$n \leq 2^{n-1}.$$

(IA) Es gilt

$$1 \leq 1 = 2^0 = 2^{1-1}.$$

(IS) Es gilt

$$(n+1) \leq n + n = 2n \stackrel{\text{(IV)}}{=} 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Die Aussage gilt somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.4.4 Aufgabe 4

Prüfe, für welche $n \in \mathbb{N}$

$$5^n + 6^n \leq 7^n$$

gilt.

Lösung**(IV)** Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

$$5^n + 6^n \leq 7^n.$$

(IA) Es gilt

$$5^3 + 6^3 = 341 \leq 343 = 7^3.$$

Für $n < 3$ entsteht keine wahre Aussage.**(IS)** Es gilt

$$\begin{aligned} 5^{n+1} + 6^{n+1} &= 5 \cdot 5^n + 6 \cdot 6^n \leq 6(5^n + 6^n) \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{=} 6 \cdot 7^n \leq 7 \cdot 7^n = 7^{n+1}. \end{aligned}$$

Die Aussage gilt somit für alle $n \geq 4$.**3.4.5 Aufgabe 5**Prüfe, für welche $n \in \mathbb{N}$

$$2^{n-1} \leq n!$$

gilt.

Lösung**(IV)** Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

$$2^{n-1} \leq n!.$$

(IA) Es gilt

$$2^{1-1} = 1 \leq 1 = 1!.$$

(IS) Es gilt

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \stackrel{\text{(IV)}}{\leq} 2 \cdot n! \leq (n+1) \cdot n! = (n+1)!.$$

Die Aussage gilt somit für alle $n \in \mathbb{N}$.**3.4.6 Aufgabe 6**Prüfe, für welche $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

gilt.

Lösung**(IV)** Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

(IA) Es gilt

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}.$$

(IS) Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\ \stackrel{(IV)}{=} & \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ = & \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ = & \frac{n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ = & \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\ = & \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\ = & \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\ = & \frac{n+1}{2n+3}. \end{aligned}$$

Die Aussage gilt somit für alle $n \in \mathbb{N}$.**3.4.7 Aufgabe 7**Prüfe, für welche $n \in \mathbb{N}$

$$n! \leq n^n$$

gilt.

Lösung**(IV)** Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

$$n! \leq n^n.$$

(IA) Es gilt

$$1! = 1 \leq 1 = 1^1.$$

(IS) Es gilt

$$\begin{aligned}(n+1)! &= n! \cdot (n+1) \stackrel{\text{(IV)}}{\leq} n^n \cdot (n+1) \\ &\leq (n+1)^n \cdot (n+1) = (n+1)^{n+1}.\end{aligned}$$

Die Aussage gilt somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.4.8 Aufgabe 8

Prüfe, für welche $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

gilt.

Lösung

(IV) Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(IA) Es gilt

$$\sum_{i=1}^i i^2 = 1 = \frac{1}{6}6 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3.$$

(IS) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n^2 + 2n + 1) \\ &= \frac{1}{6}(n(n+1)(2n+1) + 6(n^2 + 2n + 1)) \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).\end{aligned}$$

Die Aussage gilt somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.4.9 Aufgabe 9

Prüfe, für welche $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=0}^n (1 - a_k) \geq 1 - \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{mit} \quad a_k > 0$$

gilt.

Lösung

(IV) Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=0}^n (1 - a_k) \geq 1 - \sum_{k=0}^n a_k.$$

(IA) Es gilt

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^1 (1 - a_k) &= (1 - a_0)(1 - a_1) = 1 - a_1 - a_0 + a_0 a_1 \\ &\geq 1 - a_1 - a_0 = 1 - (a_0 + a_1) = 1 - \sum_{k=0}^1 a_k. \end{aligned}$$

(IS) Es gilt

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n+1} (1 - a_k) &= \left(\prod_{k=0}^n (1 - a_k) \right) (1 - a_{n+1}) \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{\geq} \left(1 - \sum_{k=0}^n a_k \right) (1 - a_{n+1}) \\ &= 1 - a_{n+1} - \sum_{k=0}^n a_k + \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) (a_{n+1}) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^n a_k - a_{n+1} + \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) (a_{n+1}) \\ &\geq 1 - \sum_{k=0}^n a_k - a_{n+1} \\ &= 1 - \left(\sum_{k=0}^n a_k + a_{n+1} \right) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n+1} a_k. \end{aligned}$$

Die Aussage gilt somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.4.10 Aufgabe 10

Prüfe, für welche $n \in \mathbb{N}$

$$133 \text{ ein Teiler von } 11^{n+1} + 12^{2n-1}$$

ist.

Lösung

(IV) Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$, dass

$$133 \text{ ein Teiler von } 11^{n+1} + 12^{2n-1}$$

ist.

(IA) Es gilt

$$11^{1+1} + 12^{2-1} = 121 + 12 = 133.$$

(IS) Es gilt

$$\begin{aligned} 11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} &= 11^{n+2} + 12^{2n+1} \\ &= 11 \cdot 11^{n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11 \cdot 11^{n+1} + (133 + 11) \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11 \cdot 11^{n+1} + 11 \cdot 12^{2n-1} + 133 \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11 \cdot \underbrace{(11^{n+1} + 12^{2n-1})}_{\text{teilt } 133 \text{ (IV)}} + \underbrace{133 \cdot 12^{2n-1}}_{\text{teilt } 133}. \end{aligned}$$

Die Aussage gilt somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.4.11 Aufgabe 11

Sei $f(x) = e^{ax+b}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Prüfe, für welche $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = a^n \cdot e^{ax+b}$$

gilt.

Lösung

(IV) Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = a^n \cdot e^{ax+b}.$$

(IA) Es gilt

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = a \cdot e^{ax+b} = a^1 \cdot e^{ax+b}.$$

(IS) Es gilt

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' \stackrel{\text{(IV)}}{=} \left(a^n \cdot e^{ax+b}\right)' = a^{n+1} \cdot e^{ax+b}.$$

Die Aussage gilt somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.4.12 Aufgabe 12

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prüfe, für welche $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Lösung

(IV) Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(IA) Es gilt

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(IS) Es gilt

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A \stackrel{\text{(IV)}}{=} 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Aussage gilt somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

4 Mengenlehre und Abbildungen

4.1 Grundlegende Definitionen

4.1.1 Definition

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Dingen, den *Elementen*, zu einem Ganzen.

4.1.2 Definition

Seien A, B zwei Mengen.

$A \subset B$ heißt, dass A eine *Teilmenge* von B ist. Es gilt also für alle $a \in A$ auch $a \in B$.

Die leere Menge ist die Menge, die gar keine Elemente enthält.

Schreibweise: $M = \emptyset$.

Beispiel

Es gilt für eine beliebige Menge M :

(1) $\emptyset \subset M$

(2) $M \subset M$

4.1.3 Definition

Seien A, B zwei Mengen.

$A \cap B$ heißt der *Durchschnitt* von A und B und ist die Menge, die alle Elemente enthält, die in A und B enthalten sind.

$A \cup B$ heißt die *Vereinigung* von A und B und ist die Menge, die alle Elemente enthält, die in A oder B enthalten sind.

$A \setminus B$ ist die *Differenzmenge* von A und B und ist die Menge, die alle Elemente enthält, die in A , aber nicht in B enthalten sind.

4.1.4 DeMorgansche Regel

Seien M, A, B beliebige Mengen.

Dann gilt

$$\begin{aligned} M \setminus (A \cup B) &= (M \setminus A) \cap (M \setminus B) \quad \text{und} \\ M \setminus (A \cap B) &= (M \setminus A) \cup (M \setminus B). \end{aligned}$$

4.1.5 Definition

Seien A, B zwei Mengen.

A und B heißen **disjunkt**, wenn

$$A \cap B = \emptyset$$

gilt.

4.1.6 Definition

Sei I eine beliebige Indexmenge und seien A_i mit $i \in I$ beliebige Mengen.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &:= \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\} \quad \text{und} \\ \bigcap_{i \in I} A_i &:= \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}. \end{aligned}$$

4.1.7 Definition

Sei M eine beliebige Menge.

$$P(M) := \{N \mid N \text{ ist Teilmenge von } M\}$$

ist die Menge aller Teilmengen von M und heißt **Potenzmenge** von M .

4.2 Geordnete Mengen

4.2.1 Definition

Sei M eine beliebige Menge.

M heißt (total) **geordnet**, wenn eine **Relation** $\leq$ auf M definiert ist, so dass für alle $a, b, c \in M$ gilt:

(1) $a \leq a$

(2) aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$

(3) aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$

(4) für alle $a, b \in M$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$

4.2.2 Satz 1

Teilmengen geordneter Mengen sind wieder geordnete Mengen.

4.2.3 Definition

Sei M eine geordnete Menge und sei $B \subset M$ eine Teilmenge.

B heißt **oben beschränkt** $:\Leftrightarrow \exists c \in M \forall x \in B : x \leq c$.

B heißt **unten beschränkt** $:\Leftrightarrow \exists c \in M \forall x \in B : x \geq c$.

c heißt dann **obere** bzw. **untere Schranke** von B .

4.2.4 Definition

Sei M eine geordnete Menge und sei $B \subset M$ eine Teilmenge.

$c \in M$ heißt **Supremum** von B $:\Leftrightarrow c$ ist die kleinste obere Schranke von B .

$c \in M$ heißt **Infimum** von B $:\Leftrightarrow c$ ist die größte untere Schranke von B .

Schreibweise: $c = \sup\{B\}$ bzw. $c = \inf\{B\}$.

4.2.5 Satz 2

Sei M eine geordnete Menge und sei $B \subset M$ eine nicht leere Teilmenge.

B hat ein Supremum $\Leftrightarrow B$ ist nach oben beschränkt.

B hat ein Infimum $\Leftrightarrow B$ ist nach unten beschränkt.

4.2.6 Definition

Sei M eine geordnete Menge und sei $B \subset M$ eine nicht leere Teilmenge.

c heißt **Maximum** von B $:\Leftrightarrow c$ ist das Supremum von B und $c \in B$.

c heißt **Minimum** von B $:\Leftrightarrow c$ ist das Infimum von B und $c \in B$.

4.2.7 Bemerkung

Existiert ein Supremum, Infimum, Maximum oder Minimum einer Menge, so ist dieses eindeutig bestimmt.

4.3 Abbildungen

4.3.1 Definitionen

Seien A, B zwei Mengen.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

heißt das **kartesische Produkt** von A und B .

$f \subset A \times B$ sei eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ ein $b \in B$ zuordnet.

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) = b \\ &\text{oder} \\ A &\xrightarrow{f} B \end{aligned}$$

heißt eine **Abbildung** von A nach B , wenn gilt:

- (1) für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$ so dass gilt: $(a, b) \in f$
- (2) aus $(a, b), (a, c) \in f$ folgt $b = c$

A heißt dabei der **Definitionsbereich** von f und B heißt der **Zielbereich** oder **Wertevorrat**.

Ist $B = \mathbb{R}$ oder $B = \mathbb{C}$, so heißt f eine **Funktion**.

4.3.2 Definition

Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung.

Die Menge

$$\text{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

bezeichnet das **Bild** von f und ist eine Teilmenge von B .

Die Menge

$$f^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\}$$

bezeichnet das **Urbild** von f und ist eine Teilmenge von A .

4.3.3 Rechenregeln für Urbilder

Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung und seien $D_1, D_2 \subset B$ zwei Teilmengen.

Dann gilt:

- (1) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
- (2) $f^{-1}(B) = A$

$$(3) \quad f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$$

$$(4) \quad f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$$

$$(5) \quad f^{-1}(D_1 \setminus D_2) = f^{-1}(D_1) \setminus f^{-1}(D_2)$$

Diese Rechenregeln gelten nur für Urbilder und nicht für Bilder von Abbildungen.

Beweisskizze

Man nehme zum Beispiel ein $a \in A$ mit $a \in f^{-1}(D_1 \cap D_2)$ und zeige, dass dann auch $a \in f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$ gilt. Andersherum nehme man ein $a \in A$ mit $a \in f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$ und zeige, dass dann $a \in f^{-1}(D_1 \cap D_2)$ folgt.

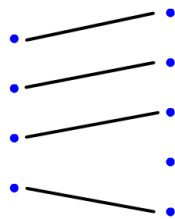
4.3.4 Definition

Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung.

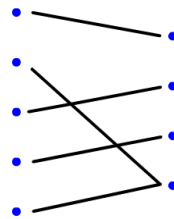
f heißt **injektiv**, wenn für alle $a, b \in A$ mit $f(a) = f(b)$ folgt $a = b$.

f heißt **surjektiv**, wenn es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$.

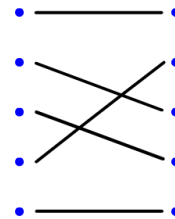
f heißt **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.



injektiv, aber
nicht surjektiv



surjektiv, aber
nicht injektiv



bijektiv, also
injektiv und surjektiv

Abbildung 1

4.3.5 Beispiele

(1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ ist bijektiv.

(2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv.

(3) $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ mit $f(x) = x^2$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

4.3.6 Satz und Definition

Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung.

Ist f bijektiv, so existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $g : B \rightarrow A$ mit

$$f(a) = b \quad \Leftrightarrow \quad g(b) = a.$$

Dabei heißt g die **Umkehrung** oder **Umkehrabbildung** von f .

4.3.7 Definition

Seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ zwei Abbildungen.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & g \circ f & & \end{array}$$

Abbildung 2

Dann heißt

$$(g \circ f)(a) := g(f(a))$$

die **Verknüpfung** oder **Komposition** von f auf g .

4.3.8 Definition

Die Abbildung $f : A \rightarrow A$ mit $a \mapsto a$ heißt die **Identität** auf der Menge A . Schreibweise: id_A .

4.3.9 Satz 1

Seien A, B zwei nicht leere Mengen und sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung.

f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g : B \rightarrow A$ gibt mit

$$\text{id}_A = g \circ f : A \rightarrow A.$$

f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $g : B \rightarrow A$ gibt mit

$$\text{id}_B = f \circ g : B \rightarrow B.$$

Beweisskizze

Man definiere sich die Abbildungen g gerade so, dass die geforderten Eigenschaften zutreffen.

4.4 Äquivalenzrelationen

4.4.1 Definition

Sei M eine beliebige nicht leere Menge.

Eine **Relation** $R \subset M \times M$ auf M ist eine **Äquivalenzrelation** $\sim$, wenn gilt:

- (1) für alle $a \in M$ gilt $(a, a) \in R$
- (2) für alle $(a, b) \in R$ folgt $(b, a) \in R$
- (3) für alle $(a, b) \in R$ und für alle $(b, c) \in R$ folgt $(a, c) \in R$

Für $(a, b) \in R$ schreibt man auch $a \sim b$ oder aRb .

Die Mengen

$$a/\sim := \{b \in M \mid a \sim b\} \subset M$$

heißen **Äquivalenzklassen**.

4.4.2 Satz 1

Jede Äquivalenzrelation auf einer Menge M ergibt eine Zerlegung von M in disjunkte Äquivalenzklassen.

4.4.3 Beispiel

Sei $M = \mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen. Dann definiert

$$a \sim b \iff a \text{ und } b \text{ haben den selben Rest bei Division durch } 5$$

eine Äquivalenzrelation.

4.5 Mächtigkeit

4.5.1 Definition

Zwei Mengen A, B heißen **gleich mächtig** oder haben gleiche **Kardinalität**, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ gibt.

$\#$ bezeichnet dabei die Mächtigkeit der Mengen.

4.5.2 Satz 1

Es gilt

$$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \#\mathbb{Q}.$$

Zwischen je zwei dieser Zahlenmengen gibt es also eine bijektive Abbildung.

Beweisskizze

Zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gibt es zum Beispiel eine bijektive Abbildung, die durch

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2n & 2n+1 & \dots \\ \uparrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \dots & \uparrow & \downarrow & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots & n & -n & \dots \end{array}$$

gegeben wird. Zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ erhält man eine bijektive Abbildung, indem man $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in einem Rechteck aufschreibt:

$$\begin{array}{cccc} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \dots \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \dots \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Eine Abbildungsvorschrift ist dann zum Beispiel

$$f(n, m) = n + \frac{(n+m-1)(n+m-2)}{2}.$$

Bei der Menge $\mathbb{Q}$ geht man ähnlich vor.

4.5.3 Satz von Schröder-Bernstein

Seien A, B zwei Mengen und es gebe zwei injektive Abbildungen

$$f : A \rightarrow B \quad \text{und} \quad g : B \rightarrow A.$$

Dann sind A und B gleich mächtig.

Beweisskizze

Es muss eine bijektive Abbildung zwischen A und B gefunden werden.

Sei dazu $P(A)$ die Potenzmenge von A . Es wird folgende Abbildung definiert:

$$\begin{aligned} T : P(A) &\rightarrow P(A) \\ C &\mapsto A \setminus g(B \setminus f(C)) \end{aligned}$$

Es gilt dann für alle $C, D \in P(A)$ mit $C \subset D$ auch $T(C) \subset T(D)$. Sei nun

$$M = \{C \in P(A) \mid C \subset T(C)\}$$

und sei N die Vereinigung aller Mengen aus M . Es ergibt sich dann $T(N) = T(T(N))$ und durch $T(N) \subset N$ folgt $N = T(N)$.

Die Abbildung f bildet nun $N \subset A$ bijektiv auf $f(N)$ ab und die Abbildung g bildet $B \setminus f(N) \subset B$ bijektiv auf $g(B \setminus f(N)) = A \setminus N$ ab. Zusammen erhält man eine bijektive Abbildung von A nach B .

4.5.4 Definition

Eine Menge M heißt **abzählbar**, wenn M gleich mächtig zu $\mathbb{N}$ ist.

4.5.5 Satz 2

$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

4.5.6 Definition

$a \in \mathbb{C}$ heißt **algebraisch**, wenn es ein Polynom f mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ gibt, die nicht alle 0 sind, und für das $f(a) = 0$ gilt.

4.5.7 Definition

Alle

$$x \in \underbrace{\mathbb{R} \setminus \underbrace{\{\text{algebraische Zahlen}\}}_{\text{abzählbar}}}_{\text{nicht abzählbar}}$$

heißen **transzendente** Zahlen.

Beispiel

π und e sind transzendente Zahlen.

5 Natürliche bis komplexe Zahlen

Bei der Einführung der Zahlenmengen wird die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als intuitive Zahlenmenge vorausgesetzt. Alle anderen Zahlenmenge ergeben eine Teilmenge oder einer Erweiterung von $\mathbb{R}$.

5.1 Natürliche Zahlen

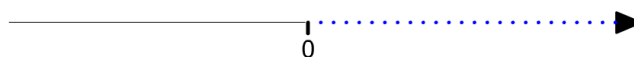


Abbildung 3

5.1.1 Nat-Menge

Charakterisierung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ durch Eigenschaften:

- (1) $1 \in \mathbb{N}$
- (2) mit $n \in \mathbb{N}$ ist auch $n + 1 \in \mathbb{N}$

5.1.2 Satz 1

Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

- (1) $n \geq 1$
- (2) $n + m \in \mathbb{N}$
- (3) $n \cdot m \in \mathbb{N}$

5.1.3 Satz 2

Jede nicht leere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ hat ein Minimum.

5.1.4 Satz von Archimedes

Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n , so dass x kleiner als n ist:

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : x < n$$

5.2 Ganze Zahlen

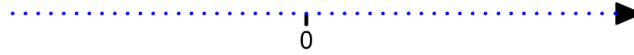


Abbildung 4

5.2.1 Definition

Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ wird definiert durch

$$\mathbb{Z} := -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

5.2.2 Satz 1

Für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

- (1) $-n \in \mathbb{Z}$
- (2) $n + m \in \mathbb{Z}$
- (3) $n \cdot m \in \mathbb{Z}$

5.2.3 Gaußklammer

Zu jeder reellen Zahl x gibt es genau eine ganze Zahl m mit

$$m \leq x < m + 1.$$

$[x] := m$ heißt die Gaußklammer von x .

5.3 Rationale Zahlen

5.3.1 Definition

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ wird definiert durch

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

5.3.2 Satz 1

Zu je zwei reellen Zahlen a, b mit $a < b$ gibt es eine rationale Zahl r mit

$$a < r < b.$$

5.4 Reelle Zahlen

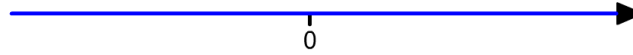


Abbildung 5

5.4.1 Definitionen

Potenzen

Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gelte

$$a^1 := a \quad \text{und} \quad a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Summen

Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gelte

$$\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + \dots + a_n.$$

Produkte

Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gelte

$$\prod_{i=1}^n a_i := a_1 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Fakultät

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gelte

$$0! := 1 \quad \text{und} \quad n! := \prod_{i=1}^n i.$$

Binomialkoeffizient

Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Dann gelte

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

5.4.2 Endliche geometrische Reihe

Zeige, dass für eine reelle Zahl q gilt:

$$\sum_{i=0}^n q^i = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{für } q \neq 1 \\ n+1 & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

Lösung

Für $q = 1$ ist die Lösung leicht einsichtig. Für $q \neq 1$ gilt aber gerade

$$(q-1) \cdot \sum_{i=0}^n q^i = \sum_{i=1}^{n+1} q^i - \sum_{i=0}^n q^i = q^{n+1} - 1,$$

womit die Behauptung gezeigt wurde.

5.4.3 Rechenregeln für Summen

Seien $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, seien $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq i, j \leq n$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} \right)$$

5.4.4 Dreiecksungleichung (DUG)

In den reellen Zahlen gilt die Dreiecksungleichung:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$$

Beweis

Es gilt zunächst einmal $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$.

Gilt $x + y \geq 0$, so folgt

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|.$$

Gilt nun $x + y < 0$, so folgt

$$|x + y| = |-(x + y)| = -(x + y) = -x - y \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|.$$

□

5.4.5 Binomische Formel

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis

Siehe 27.1.1 auf Seite 277.

5.4.6 Bernoulli-Ungleichung

Sei $h > -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(1+h)^n \geq 1+nh.$$

Beweis

$$(1+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k 1^{n-k} = 1 + nh + \underbrace{\dots}_{\geq 0} \geq 1 + nh$$

□

5.4.7 Dedekindsches Schnittaxiom

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ zwei Mengen von reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

- (1) A, B sind beide nicht leer.
- (2) Es gilt $A \cup B = \mathbb{R}$.
- (3) Für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt $a < b$.

Dann gibt es stets ein $s \in \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Aus $a \in A$ folgt $a \leq s$.
- (2) Aus $b \in B$ folgt $b \geq s$.

s heißt die **Schnittzahl** zu A und B .

Durch das Dedekindsche Schnittaxiom lassen sich Sätze beweisen, die sich auf die reellen Zahlen beziehen.

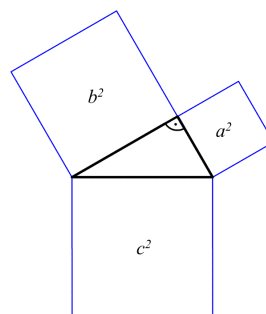
5.4.8 Satz von Pythagoras

Abbildung 6

In einem rechtwinkligem Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c gilt

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Beweis

Siehe 27.1.2 auf Seite 278.

5.4.9 Quadratische Gleichungen

Die Lösungen einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ sind

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Beispiel 1

Löse $x^2 - 6x - 16 = 0$.

Es gilt

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - (-16)} = 3 \pm 5.$$

Somit sind $x_1 = -2$ und $x_2 = 8$ die beiden Lösungen der gegebenen Gleichung.

Beispiel 2

Löse $x - 2x + 2 = 0$.

Es gilt

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm \sqrt{-1}.$$

Da aus einer negativen Zahl keine Wurzel gezogen werden kann, hat diese quadratische Gleichung anscheinend keine reelle Lösung. Es liegt daher nahe, eine Zahlenmenge einzuführen, die größer ist als die der reellen Zahlen und in der auch Wurzeln aus negativen Zahlen enthalten sind: die komplexen Zahlen.

5.5 Komplexe Zahlen

Jede komplexe Zahl besteht aus einem reellen **Realanteil** Re und einem reellen **Imaginärteil** Im . Der Imaginärteil wird gegeben durch $b \cdot i$, wobei $i := \sqrt{-1}$ die **imaginäre Einheit** bildet.

Schreibweise:

$$z = a + bi = (a, b) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

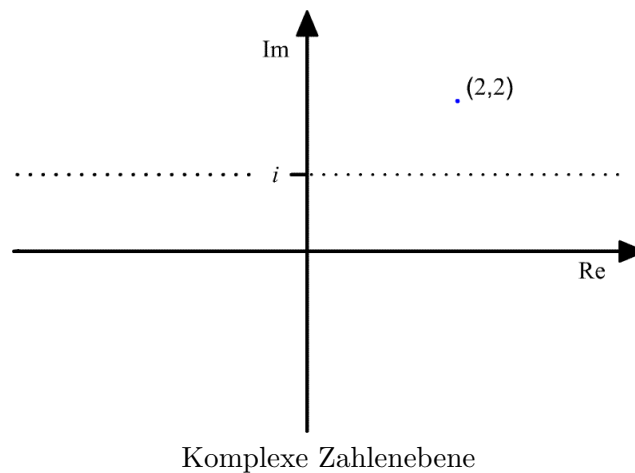


Abbildung 7

Um die komplexen Zahlen möglichst einfach einzuführen und um mit ihnen recht einfach und übersichtlich rechnen zu können, wird für eine komplexe Zahl konsequent die Schreibweise (a, b) verwendet. Alle Definitionen, Sätze und Rechenregeln gelten natürlich auch für die eigentliche Schreibweise $a+bi$.

Bemerkung

Es gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

5.5.1 Definitionen

Seien (a, b) und (c, d) zwei komplexe Zahlen. Dann gelte:

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d) && \text{Addition} \\ (a, b) \cdot (c, d) &:= (ac - bd, ad + bc) && \text{Multiplikation} \\ \overline{(a, b)} &:= (a, -b) && \text{Konjugation} \\ |(a, b)| &:= \sqrt{a^2 + b^2} && \text{Abstand, Betrag} \end{aligned}$$

5.5.2 Bemerkung

Mit obiger Addition und Multiplikation bildet $\mathbb{C}$ den Körper der komplexen Zahlen.

5.5.3 Folgerung

Das Inverse einer komplexen Zahl (a, b) wird gegeben durch

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

5.5.4 Rechenregeln

Sei (a, b) eine komplexe Zahl und sei c eine reelle Zahl. Dann gilt:

(1) $i^2 = -1$

(2) $-(a, b) = (-a, -b)$

(3) $c \cdot (a, b) = (c, 0) \cdot (a, b) = (ca, cb)$

(4) $\frac{1}{i} = i^{-1} = -i$

(5) $(a, b) \cdot (a, -b) = a^2 + b^2$

5.5.5 Satz über konjugiert komplexe Zahlen

Seien z, w zwei komplexe Zahlen. Dann gilt:

(1) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

(2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(3) $\overline{\bar{z}} = z$

(4) $\overline{-z} = -\bar{z}$

(5) $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1} \quad (z \neq 0)$

5.5.6 Satz über den Betrag komplexer Zahlen

Seien z, w zwei komplexe Zahlen. Dann gilt:

(1) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$

(2) $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

(3) $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

(4) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

(5) $|-z| = |\bar{z}| = |z|$

(6) $|z| \geq 0$

(7) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(8) $|z + w| \leq |z| + |w|$

(9) $||z| - |w|| \leq |z - w|$

5.5.7 Definition

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gerade $|a| \leq c$ gilt.

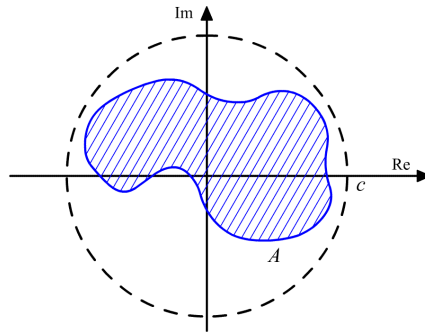


Abbildung 8

c ist dann eine **obere Schranke** für A .

5.6 Aufgaben

5.6.1 Aufgabe 1

Zeige, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Lösung

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational. Dann gilt

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{mit } p, q \in \mathbb{N}$$

Das Quadrieren beider Seiten ergibt

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2q^2 = p^2.$$

Demnach ist p^2 gerade und somit auch p , da das Quadrat einer natürlichen Zahl nur dann gerade sein kann, wenn seine Wurzel eine gerade Zahl ist.

Sei nun $p = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$2q^2 = (2m)^2 = 4m^2 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = 2m^2.$$

Demnach ist q^2 gerade und somit analog auch q .

Sei nun $q = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n}.$$

Man erkennt, dass sich $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ somit unendlich oft kürzen lässt.

Da man aber keine rationale Zahl unendlich oft kürzen kann, ist $\sqrt{2}$ auch keine rationale Zahl.

5.6.2 Aufgabe 2

Zeige, dass $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ nicht rational ist.

Lösung

Es gilt

$$\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})^2}{1-2} = -(1+2\sqrt{2}+2) = \underbrace{-3-2\sqrt{2}}_{\notin \mathbb{Q}}.$$

5.6.3 Aufgabe 3

Seien a, b, c, d positive reelle Zahlen und sei $a/c < b/d$.

Zeige, dass dann gilt:

$$\frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}$$

Lösung

Es gilt:

$$\begin{array}{lll} ad < bc & & ad < bc \\ \Leftrightarrow ad + ac < bc + ac & \text{und} & \Leftrightarrow ad + bd < bc + bd \\ \Leftrightarrow a(d+c) < c(b+a) & & \Leftrightarrow d(a+b) < b(c+d) \\ \Leftrightarrow \frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} & & \Leftrightarrow \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d} \end{array}$$

5.6.4 Aufgabe 4

Bringe die komplexe Zahl

$$\frac{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{i + 1}$$

auf die Gestalt $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{i + 1} &= \frac{(0, 1) + (0, 1)^2 + (0, 1)^3 + (0, 1)^4 + (0, 1)^5}{(1, 1)} \\
 &= \frac{(0, 1) + (-1, 0) + (0, -1) + (1, 0) + (0, 1)}{(1, 1)} \\
 &= \frac{(0, 1)}{(1, 1)} = (0, 1) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.
 \end{aligned}$$

5.6.5 Aufgabe 5

Bringe die komplexe Zahl

$$\frac{1 - i}{(1 + i)^2}$$

auf die Gestalt $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{1 - i}{(1 + i)^2} &= \frac{(1, -1)}{(1, 1)^2} = \frac{(1, -1)}{(0, 2)} = (1, -1) \cdot \left(0, -\frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.
 \end{aligned}$$

5.6.6 Aufgabe 6

Finde alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung

$$(z - \bar{z})^3 = i$$

erfüllen.

Lösung

Sei $z = a + bi = (a, b) \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 (z - \bar{z})^3 &= ((a, b) - \overline{(a, b)})^3 = ((a, b) - (a, -b))^3 \\
 &= (0, 2b)^3 = (0, -8b^3) = (0, 1).
 \end{aligned}$$

Somit wird bei der richtigen Wahl von b die Gleichung für alle $a \in \mathbb{R}$ erfüllt:

$$\underbrace{-8b^3}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{1}_{\in \mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{2}$$

Somit erfüllen alle $z = (a, -\frac{1}{2}) \in \mathbb{C}$ mit $a \in \mathbb{R}$ beliebig die gegebene Gleichung.

5.6.7 Aufgabe 7

Finde alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die die Ungleichung

$$\frac{zi}{-\bar{z}} < 0$$

erfüllen.

Lösung

Sei $z = a + bi = (a, b) \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{zi}{-\bar{z}} &= \frac{(a, b)(0, 1)}{(-a, b)} = \frac{(-b, a)}{(-a, b)} \\ &= (-b, a) \left(\frac{-a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}, \frac{-a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \right) < 0. \end{aligned}$$

Da es keine Anordnung in $\mathbb{C}$ gibt, muss der Imaginärteil 0 werden:

$$\frac{-a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a \quad \text{oder} \quad b = a$$

Für den Realteil muss nun gelten:

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2} < 0$$

Für den Fall $b = a$ folgt die falsche Aussage

$$\frac{2a^2}{2a^2} = 1 < 0,$$

demnach darf b nicht gleich a sein. Der Fall $b = -a$ liefert durch

$$\frac{-2a^2}{2a^2} = -1 < 0$$

eine wahre Aussage.

Somit wird die Ungleichung von allen $z = (a, -a) \in \mathbb{C}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erfüllt.

6 Mathematische Methoden

6.1 Gaußsches Eliminierungsverfahren

Das Gaußsche Eliminierungsverfahren wird verwendet, um ein lineares Gleichungssystem lösen zu können. Dabei liegt das lineare Gleichungssystem meistens in Form einer Matrix vor und es können folgende elementare Umformungen vorgenommen werden, ohne das Ergebnis zu verändern:

- (1) Vertauschen von zwei Zeilen der Matrix.
- (2) Multiplizieren einer Zeile der Matrix mit einem Faktor $\lambda \neq 0$.
- (3) Addieren eines Vielfachen einer Zeile der Matrix zu einer Anderen.

6.1.1 Beispiel

Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & + & 2b & = & -1 \\ a & - & b & = & 1 \\ 3a & + & 3b & = & -1 \end{array}$$

6.1.2 Lösung

In Matrixschreibweise ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} (-) \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (\cdot 3) \\ \\ (-) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ (-) \end{array} \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (\cdot 3) \\ (\cdot 2) \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-) \\ \\ \end{array} \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (\cdot 1/3) \\ (\cdot 1/6) \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Wieder in Gleichungsschreibweise folgt nun

$$\begin{aligned} 1a &= 1/3 \\ 1b &= -2/3. \end{aligned}$$

Somit sind $a = \frac{1}{3}$ und $b = -\frac{2}{3}$ Lösungen für alle drei Gleichungen.

6.2 Partialbruchzerlegung (PBZ)

Die Partialbruchzerlegung dient dazu, eine gebrochen rationale Funktion der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit zwei Polynomen } p(x), q(x)$$

als Summe von Partialbrüchen der Form

$$f(x) = \frac{c_1}{x - a_1} + \dots + \frac{c_n}{x - a_n} \quad \text{mit } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

umzuformen. Besonders hilfreich ist diese Methode, um einige Funktionen leichter integrieren zu können oder um den Grenzwert einer Reihe zu bestimmen. Man geht dabei wie folgt vor:

- (1) $p(x)$ durch $q(x)$ teilen, falls Grad von $p(x)$ größer als Grad von $q(x)$.
- (2) Nenner zerlegen in $q(x) = (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$.
- (3) Partialbrüche mit unbestimmten Koeffizienten aufstellen.
- (4) Koeffizientenvergleich vornehmen.

6.2.1 Beispiel

Zerlege folgende Funktion in Partialbrüche:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3}$$

Lösung

Da der Grad des Zähler größer als der Grad des Nenners ist, muss eine **Polynomdivision** vorgenommen werden:

$$\begin{array}{rcl} (x^3 + 2x^2 + 0x + 1) & : & (x^2 - 4x + 3) = x + 6 + \frac{21x-17}{x^2-4x+3} \\ \underline{-(x^3 - 4x^2 + 3x)} & & \\ (6x^2 - 3x + 1) & & \\ \underline{-(6x^2 - 24x + 18)} & & \\ (21x - 17) & & \end{array}$$

Demnach gilt

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3} = x + 6 + \frac{21x - 17}{x^2 - 4x + 3} = x + 6 + \frac{21x - 17}{(x-1)(x-3)}.$$

Die Partialbrüche mit unbestimmten Koeffizienten sind nun

$$\frac{21x - 17}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}.$$

Durch Koeffizientenvergleich lassen sich nun A und B ausrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{21x - 17}{(x-1)(x-3)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} \\ \Leftrightarrow \frac{21x - 17}{(x-1)(x-3)} &= \frac{A(x-3)}{(x-1)(x-3)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x-3)} \\ \Leftrightarrow \frac{21x - 17}{(x-1)(x-3)} &= \frac{A(x-3) + B(x-1)}{(x-1)(x-3)} \\ \Rightarrow 21x - 17 &= A(x-3) + B(x-1) \\ \Leftrightarrow 21x - 17 &= Ax - 3A + Bx - B \\ \Leftrightarrow 21x - 17 &= (A+B)x - (3A+B) \\ \Rightarrow 21 &= A+B \quad \text{und} \quad 17 = 3A+B \\ \Rightarrow A &= -2 \quad \text{und} \quad B = 23 \end{aligned}$$

Es gilt also

$$f(x) = x + 6 - \frac{2}{x-1} + \frac{23}{x-3}.$$

6.3 Horner-Schema

Das Horner-Schema ist ein Rechenverfahren, mit dem man für ein Polynom der Form

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

bei gegebener Stelle c sehr einfach Folgendes berechnen kann:

- (1) den Funktionswert $f(c)$
- (2) die Division von $f(x)$ durch den Linearfaktor $(x - c)$
- (3) den Funktionswert einer beliebigen Ableitung $f^{(r)}(c)$
- (4) die Taylorentwicklung (siehe Seite 149) von f an der Stelle c

Es werden dazu die Koeffizienten $a_n, \dots, a_0$ in absteigender Reihenfolge notiert. Folgender Algorithmus (am Beispiel eines Polynoms dritten Grades) wird nun angewendet:

$$\begin{array}{cccc} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline k_3 := a_3 & k_2 := (k_3 \cdot c) + a_2 & k_1 := (k_2 \cdot c) + a_1 & k_0 := (k_1 \cdot c) + a_0 \end{array}$$

Dieser Algorithmus kann nun mehrmals angewendet werden, dabei verschiebt sich jede neue Zeile um eine Stelle nach links. Somit erhält man $k'_0, k''_0, \dots, k_0^{(n)}$:

$$\begin{array}{cccc} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline k_3 := a_3 & k_2 := (k_3 \cdot c) + a_2 & k_1 := (k_2 \cdot c) + a_1 & k_0 := (k_1 \cdot c) + a_0 \\ \hline k'_2 := a_3 & k'_1 := (k'_2 \cdot c) + k_2 & k'_0 := (k'_1 \cdot c) + k_1 & \\ \hline k''_1 := a_3 & k''_0 := (k''_1 \cdot c) + k'_1 & & \\ \hline k_0^{(3)} := a_3 & & & \end{array}$$

Anhand dieser Tabelle kann man nun das Ergebnis ablesen:

(1) Funktionswert: $f(c) = k_0$

(2) Division: $\frac{f(x)}{x-c} = \dots + k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + \frac{k_0}{x-c}$

(3) Ableitungen: $f^{(r)}(c) = k_0^{(r)} \cdot r!$

(4) Taylorentwicklung: $f(x) = \dots + k_0''(x-c)^2 + k_0'(x-c) + k_0$

6.3.1 Beispiel 1

Sei

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 4 \quad \text{und} \quad c = 3.$$

Berechne $f(c)$ und $\frac{f(x)}{x-c}$.

Lösung

Es wird nur die erste Zeile des Horner-Schemas benötigt:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ \hline c=3 & 1 & 3 & 11 & 33 & 103 = k_0 \end{array}$$

Somit ergibt sich $f(3) = 103$ und

$$\frac{f(x)}{x-3} = x^3 + 3x^2 + 11x + 33 + \frac{103}{x-3}.$$

6.3.2 Beispiel 2

Sei

$$f(x) = 2x^4 - x^3 - x - 18 \quad \text{und} \quad c = 2.$$

Berechne $f(c), \dots, f^{(4)}(c)$ sowie die Taylorentwicklung von f bei c .

Lösung

Es ergibt sich folgendes Horner-Schema:

	2	-1	0	-1	-18
$c = 2$	2	3	6	11	$4 = k_0$
$c = 2$	2	7	20	$51 = k'_0$	
$c = 2$	2	11	$42 = k''_0$		
$c = 2$	2	$15 = k^{(3)}_0$			
$c = 2$	$2 = k^{(4)}_0$				

Es gilt somit

$$\begin{aligned} f(2) &= 4 \\ f'(2) &= 51 \\ f''(2) &= 42 \cdot 2! = 84 \\ f^{(3)}(2) &= 15 \cdot 3! = 90 \\ f^{(4)}(2) &= 2 \cdot 4! = 48 \end{aligned}$$

und für die Taylorentwicklung

$$f(x) = 2(x-2)^4 + 15(x-2)^3 + 42(x-2)^2 + 51(x-2) + 4.$$

Eindimensionale Analysis

7 Folgen

7.1 Konvergente Folgen

7.1.1 Definition

Eine **reelle Folge** ordnet jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl a_n zu.

Eine **komplexe Folge** ordnet jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine komplexe Zahl a_n zu.

Sei A eine beliebige nicht leere Menge. Eine **Folge** in A ordnet jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Element a_n aus A zu.

Schreibweisen für Folgen:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n) = (a_n)_n = (a_n)_{n \geq 1}$$

Die a_n heißen **Folgeglieder** oder **Elemente** der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist die Menge der Folgeglieder. Es kann auch vorkommen, dass eine Folge mit a_0 und nicht erst mit a_1 beginnt. Dies ist dem Zusammenhang zu entnehmen.

7.1.2 Satz 1

Zwei Folgen können unterschiedlich sein, obwohl die Menge ihrer Folgeglieder gleich ist.

7.1.3 Definition

Eine reelle oder komplexe Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert** genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$ oder $a \in \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Kurz:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

a heißt dann der **Grenzwert** der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

7.1.4 Beispiel 1

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Behauptung

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$N > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{N} < \varepsilon$$

gilt. Dann folgt für alle $n \geq N$

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

womit die Behauptung gezeigt wurde. $\square$

Bemerkung

Bei einem solchen Beweis über die Definition von konvergenten Folgen muss folgendes beachtet werden:

- (1) Der Grenzwert a muss zunächst "erraten" werden.
- (2) Die Wahl von N in Abhängigkeit von ε folgt eigentlich erst aus der letzten Abschätzung, muss jedoch schon zuvor angegeben werden.

7.1.5 Beispiel 2

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Behauptung

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$N > \frac{1}{\varepsilon^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{N} < \varepsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$$

gilt. Dann folgt für alle $n \geq N$

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon,$$

womit die Behauptung gezeigt wurde. $\square$

7.1.6 Definition

Eine reelle oder komplexe Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen Unendlich oder **divergiert**, wenn eine der folgenden Aussagen gilt:

$$(1) \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : |a_n - a| \geq \varepsilon$$

$$(2) \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |a_n| > c$$

7.1.7 Beispiel

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_n = n$.

Behauptung

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.

Beweis

Annahme: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$.

Wähle $\varepsilon = 1$ und sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$|a_n - a| < 1 = \varepsilon.$$

Wähle $n = N$ bzw. $n = N + 2$. Dann folgt

$$|N - a| < 1 \quad \text{und} \quad |N + 2 - a| < 1.$$

Dann würde aber gelten:

$$2 = |(N + 2 - a) - (N - a)| = |N + 2 - a| + |N - a| < 2$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keinen Grenzwert a haben kann. Somit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent. $\square$

7.1.8 Satz 2

Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.

Beweisskizze

Man nehme an, dass eine Folge zwei Grenzwerte a und a' hat. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann aber auch ein geeignet großes m , so dass nach der Dreiecksungleichung gerade

$$|a - a'| = |a - a_m + a_m - a'| \leq |a - a_m| + |a_m - a'| < \varepsilon$$

gilt. Da ε aber beliebig klein werden kann, folgt $a = a'$.

7.1.9 Definition

Wenn eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert a konvergiert, dann schreibt man dafür

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

7.1.10 Satz 3

Ist eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **beschränkt**, das heißt die Menge der Folgenglieder

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

ist beschränkt.

Beweis

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es dann einen Index $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gerade

$$|a_n| \leq |a| + 1 = c$$

gilt. Da aber jede endliche Menge beschränkt ist, ist auch

$$\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\} \cup \{c\}$$

beschränkt. □

7.1.11 Satz 4

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei Folgen, sei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a \in \mathbb{R}$$

und es gelte für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b_n \leq a_n \leq c_n.$$

Dann ist auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a.$$

7.1.12 Satz 5

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q > 1$.

Dann divergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = q^n$.

Beweis

Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $q = 1 + h$ mit $h > 0$.

Dann folgt nach der Bernoulli Ungleichung

$$q^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass gilt:

$$N > \frac{c}{h} \quad \Leftrightarrow \quad Nh > c$$

Dann folgt aber für alle $n \geq N$

$$nh > c \quad \Rightarrow \quad q^n - 1 > c.$$

Somit kann q^n für große n beliebig groß werden, also ist die gegebene Folge divergent. $\square$

7.1.13 Satz 6

Sei $q \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $|q| < 1$.

Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = q^n$ gegen 0.

7.2 Rechnen mit Folgen

7.2.1 Rechenregeln

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Dann gilt:

- (1) $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $|a|$
- (2) $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a + b$
- (3) $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \cdot b$

7.2.2 Satz 1

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $a_n \neq 0$ für alle $n \geq k$.

Dann konvergiert $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{a}$.

7.2.3 Beispiel

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{4n^2 + 5}.$$

Dann gilt

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{4n^2 + 5} = \frac{1 + 3\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + 5\frac{1}{n^2}} = \frac{1 + 3\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{4 + 5\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{4}.$$

7.2.4 Satz 2

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und sei $c \in \mathbb{R}$.

- (1) Gilt $a_n \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $a \geq c$.
- (2) Gilt $|a_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $|a| \leq c$.

7.2.5 Definition

Eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt

- (1) **monoton wachsend** : $\Leftrightarrow$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} \geq a_n$.
- (2) **monoton fallend** : $\Leftrightarrow$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} \leq a_n$.
- (3) **streng monoton wachsend** : $\Leftrightarrow$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} > a_n$.
- (4) **streng monoton fallend** : $\Leftrightarrow$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} < a_n$.

Schreibweise

Konvergiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend bzw. fallend gegen ihren Grenzwert a , so schreibt man dafür auch

$$a_n \nearrow a \quad \text{bzw.} \quad a_n \searrow a.$$

7.2.6 Beispiel

$a_n = \frac{1}{n}$ ist streng monoton fallend, denn es gilt

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

7.2.7 Monotoniekriterium

Ist eine reelle Folge beschränkt und monoton, so konvergiert sie.

7.2.8 Beispiel

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1,4, \quad a_2 = 1,41, \quad a_3 = 1,414, \quad a_4 = 1,4142, \quad \dots,$$

also $a_n = \sqrt{2}$ auf n Nachkommastellen genau.

Dann ist a_n beschränkt und monoton wachsend, also konvergiert sie.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert aber nicht in $\mathbb{Q}$, da der Grenzwert $\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten ist.

7.3 Häufungspunkte

7.3.1 Definition

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einer Menge M .

$a \in M$ heißt ein **Häufungspunkt** der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

7.3.2 Beispiel

Sei a_n eine Folge mit $a_n = (-1)^n$.

Dann ist 1 ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig und sei $n = 2N$. Dann gilt

$$|a_n - a| = |(-1)^{2N} - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon.$$

7.3.3 Satz 1

Es gilt:

- (1) Der Grenzwert einer Folge ist auch ein Häufungspunkt.
- (2) Eine Folge mit mehr als einem Häufungspunkt ist divergent.
- (3) Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.

7.3.4 Satz 2

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ ist genau dann konvergent, wenn gilt:

- (1) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt
- (2) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat genau einen Häufungspunkt

7.3.5 Definition

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und seien $k_1, k_2, \dots \in \mathbb{N}$ mit

$$1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \dots$$

Dann heißt die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_n = a_{k_n}$$

eine **Teilfolge** von a_n .

7.3.6 Satz 3

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert a .

Dann konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch gegen a .

7.3.7 Satz 4

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M und sei $a \in M$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) a ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (2) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n, a| < \varepsilon\}$ unendlich.
- (3) Es gibt eine Teilfolge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

7.4 Rekursive Folgen

Eine **rekursive Folge** ist eine Folge, bei der jedes neue Folgenglied aus einem vorherigen Folgenglied berechnet wird.

Dies geht natürlich nur, wenn das erste Folgenglied (also a_0) vorgegeben wird.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \quad \text{und} \quad a_0 = \sqrt{2}$$

ist dann beispielsweise eine rekursive Folge.

Für die Untersuchung einer rekursiven Folge ist vor allem das Monotoniekriterium sehr wichtig.

7.4.1 Beispiel

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine rekursive Folge mit

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \quad \text{und} \quad a_0 = \sqrt{2}.$$

Zeige, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ gilt.

Lösung

Es wird zunächst durch vollständige Induktion gezeigt, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist:

$$\text{(IV)} \quad a_n \leq a_{n+1}$$

$$\text{(IA)} \quad a_0 = \sqrt{2} \leq \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_1$$

$$\text{(IS)} \quad a_{n+1} \leq a_{n+2}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2 + a_n} &\leq \sqrt{2 + a_{n+1}} \\ 2 + a_n &\leq 2 + a_{n+1} \\ a_n &\leq a_{n+1} \end{aligned}$$

Angenommen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist auch beschränkt, dann wäre $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach dem Monotoniekriterium auch konvergent.

Sei nun $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} = a$$

und es folgt

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2 + a} \\ a^2 &= 2 + a \\ a^2 - a - 2 &= 0 \\ \text{also } a &= 2. \end{aligned}$$

Da $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist 2 der mögliche Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und nicht die zweite Lösung -1 der quadratischen Gleichung.

Nun muss nur noch durch vollständige Induktion gezeigt werden, dass die rekursive Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch wirklich beschränkt ist:

$$\text{(IV)} \quad a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} < 2$$

$$\text{(IA)} \quad a_0 = \sqrt{2} < 2$$

(IS) $a_{n+1} < 2$

$$\begin{aligned}\sqrt{2+a_n} &< 2 \\ 2+a_n &< 4 \\ a_n &< 2\end{aligned}$$

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert also nach dem Monotoniekriterium gegen 2.

7.5 Aufgaben

7.5.1 Aufgabe 1

Zeige nur unter Verwendung der Definition der Folgenkonvergenz, dass die Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{n!}{n^n}$$

gegen 0 konvergiert.

Lösung

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$N > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{N} < \varepsilon$$

gilt. Dann folgt für alle $n \geq N$

$$\begin{aligned}|a_n - 0| &= \left| \frac{n!}{n^n} \right| = \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot \dots \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.\end{aligned}$$

7.5.2 Aufgabe 2

Zeige nur unter Verwendung der Definition der Folgenkonvergenz, dass die Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{8n^3}{4n-3}$$

divergiert.

Lösung

Es ist zu zeigen, dass es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ auch $a_n > c$ gilt.

Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$N > \sqrt{\frac{|c|}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad 2N^2 > c$$

gilt. Dann folgt für alle $n \geq N$

$$\left| \frac{8n^3}{4n-3} \right| > \left| \frac{8n^3}{4n} \right| = \frac{8n^3}{4n} = 2n^2 \geq 2N^2 > c.$$

7.5.3 Aufgabe 3

Untersuche das Konvergenzverhalten der Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}.$$

Berechne gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Es gilt

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (1 + \sqrt{n})} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + 1},$$

demnach folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + 1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Somit ist die gegebene Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und hat den Grenzwert 1.

7.5.4 Aufgabe 4

Untersuche das Konvergenzverhalten der Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3 + n} - n}.$$

Berechne gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Es gilt

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3 + n} - n} = \frac{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} + \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\sqrt[4]{n^4 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)} - n} = \frac{n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} - 1\right)},$$

demnach folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sqrt{n}}}\right)}{\left(\sqrt[4]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} - 1\right)} = \frac{1+0}{0-1} = -1.$$

Somit ist die gegebene Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und hat den Grenzwert -1 .

7.5.5 Aufgabe 5

Zeige, dass die Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = \sqrt{n^2 + n} - n.$$

gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert.

Lösung

Seien $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen mit

$$b_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}.$$

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} - 1 + \frac{n}{2} - 1 + n^2 &\leq \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \leq \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} - 1 + \frac{n}{2} - 1 + n^2 &\leq n^2 + n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + n &\leq \sqrt{n^2 + n} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} &\leq \sqrt{n^2 + n} - n \\ b_n &\leq a_n \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{9}{4} \\ n^2 + n &\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} + 1 + \frac{n}{2} + 1 + n^2 \\ \sqrt{n^2 + n} &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + n \\ \sqrt{n^2 + n} - 1 &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ a_n &\leq c_n. \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b_n \leq a_n \leq c_n.$$

Weiter gilt offenbar $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{2}$.

Demnach folgt auch für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

7.5.6 Aufgabe 6

Bestimme alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^{[n/2]} + (-1)^{[n/4]}.$$

Dabei ist $[\]$ die Gaußklammer.

Lösung

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \in \{-2, 0, 2\}$. Daher sind $-2, 0, 2$ auch alle möglichen Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Es gilt:

$$(-1)^a + (-1)^b = \begin{cases} -2 & \text{für } a, b \text{ ungerade} \\ 2 & \text{für } a, b \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch vollständige Induktion wird gezeigt, dass $a_n = 2$ in der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unendlich oft vorkommt:

(IV) $a_{8n} = 2$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

(IA) $a_8 = (-1)^{[4]} + (-1)^{[2]} = 1 + 1 = 2$. Die Aussage gilt also für $n = 1$.

(IS) $a_{8(n+1)} = a_{8n+8} = (-1)^{[4n+4]} + (-1)^{[2n+2]} = 1 + 1 = 2$

Somit ist 2 ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Analog folgt:

(IV) $a_{8n+4} = 0$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

(IA) $a_{12} = (-1)^{[6]} + (-1)^{[3]} = 1 - 1 = 0$

(IS) $a_{8(n+1)+4} = a_{8n+12} = (-1)^{[4n+6]} + (-1)^{[2n+3]} = 1 - 1 = 0$

Somit ist 0 ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(IV) $a_{8n+6} = -2$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

(IA) $a_{14} = (-1)^{[7]} + (-1)^{[3,5]} = (-1)^7 + (-1)^3 = -1 - 1 = -2$

(IS) $a_{8(n+1)+6} = a_{8n+14} = (-1)^{[4n+7]} + (-1)^{[2n+3,5]} = -1 - 1 = -2$

Somit ist -2 ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

7.5.7 Aufgabe 7

Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{\sqrt{n + (-1)^n}}{\sqrt{n - (-1)^n}}$$

beschränkt ist und bestimme alle Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lösung

Es gilt für gerade n

$$a_{2n} = \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n-1}} = \frac{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2n}}}{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2n}}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2n}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2n}}}.$$

Demnach folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{2n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{2n}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Analog gilt für ungerade n

$$a_{2n-1} = \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2n}}}{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2n}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2n}}}$$

und es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{2n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{2n}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Demnach konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 1, also ist sie beschränkt und hat genau einen Häufungspunkt.

7.5.8 Aufgabe 8

Berechne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{n}.$$

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2 + \frac{1}{n})}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{n} = 2. \end{aligned}$$

7.5.9 Aufgabe 9

Berechne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}.$$

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

7.5.10 Aufgabe 10

Berechne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n.$$

LösungSei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x = \exp(x).$$

(siehe 8.3.5 auf Seite 68). Demnach gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n = e^{-4} = \frac{1}{e^4}.$$

8 Fundamentale Funktionen

8.1 Logarithmus

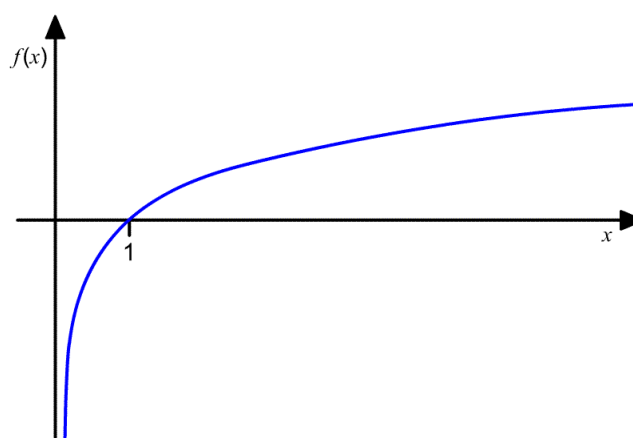


Abbildung 9

8.1.1 Herleitung

Sei $x > 0$ und sei $(x_n)_{n \geq 0}$ eine rekursive Folge mit

$$x_0 = x \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

Dann gilt:

- (1) $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- (2) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen mit

$$a_n = 2^n(x_n - 1) \quad \text{und} \quad b_n = 2^n \left(1 - \frac{1}{x_n}\right).$$

Dann gilt:

- (1) $a_n = b_n \cdot x_n$
- (2) a_n ist monoton fallend
- (3) b_n ist monoton wachsend
- (4) $b_n \leq a_n$
- (5) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind konvergent
- (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

8.1.2 Definition

Der natürliche **Logarithmus** von x , also der Logarithmus zur Basis e , wird definiert durch

$$\log(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

8.1.3 Funktionalgleichung

Für alle $x, y > 0$ gilt

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$$

Beweis

Siehe 27.2.1 auf Seite 279.

8.1.4 Satz 1

Es gilt:

- (1) $\log(1) = 0$
- (2) $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$
- (3) aus $0 < x < y$ folgt $\log(x) < \log(y)$
- (4) $b_0 = 1 - \frac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1 = a_0$
- (5) $b_1 = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq \log(x) \leq 2(\sqrt{x} - 1) = a_1$
- (6) für alle $c \in \mathbb{R}$ gibt es $0 < x < 1 < y$ mit $\log(x) < c < \log(y)$

8.2 Arkustangens

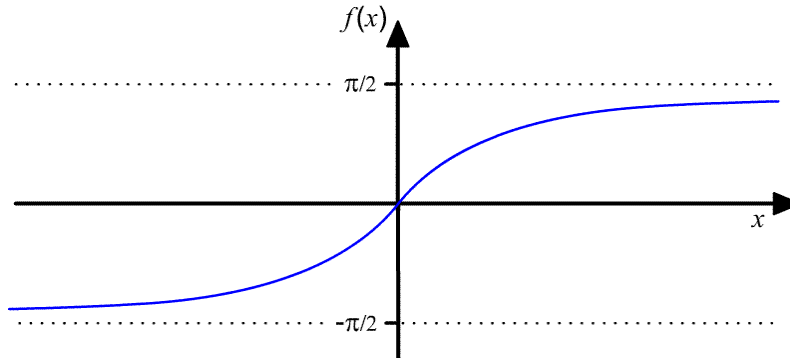


Abbildung 10

8.2.1 Herleitung

Sei $x \in \mathbb{R}$ und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine rekursive Folge mit

$$x_0 = x \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + \sqrt{1 + x_n^2}}.$$

Dann gilt $|x_n| \leq 2^{-n}|x|$.

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen mit

$$a_n = 2^n x_n \quad \text{und} \quad b_n = \frac{2^n x_n}{\sqrt{1 + x_n^2}}.$$

Dann gilt:

- (1) für $x = 0$ sind $x_n = a_n = b_n = 0$
- (2) für $x > 0$ sind $x_n, a_n, b_n > 0$
- (3) für $x < 0$ sind $x_n, a_n, b_n < 0$

8.2.2 Satz 1

Für $x > 0$ gilt:

- (1) a_n ist monoton fallend
- (2) b_n ist monoton wachsend
- (3) $b_n \leq a_n$
- (4) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind konvergent
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

8.2.3 Definition

Der *Arkustangens* wird definiert durch

$$\arctan(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

8.2.4 Funktionalgleichungen

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot y < 1$ gilt

$$\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \arctan(x) + \arctan(y) .$$

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot y > -1$ gilt

$$\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \arctan(x) - \arctan(y) .$$

Beweis

Siehe 27.2.2 auf Seite 279.

8.2.5 Satz 2

Es gilt:

- (1) $\arctan(0) = 0$
- (2) $\arctan(-x) = -\arctan(x)$
- (3) $|\arctan(x)| \leq 2$
- (4) aus $x < y$ folgt $\arctan(x) < \arctan(y)$
- (5) $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

8.2.6 Definition

Die Zahl $\pi \in \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$\pi := 2 \cdot \sup\{\arctan(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

8.2.7 Definition

Tangens ist die Umkehrfunktion des Arkustangens, also

$$\tan := \arctan^{-1}.$$

8.3 Exponentialfunktion

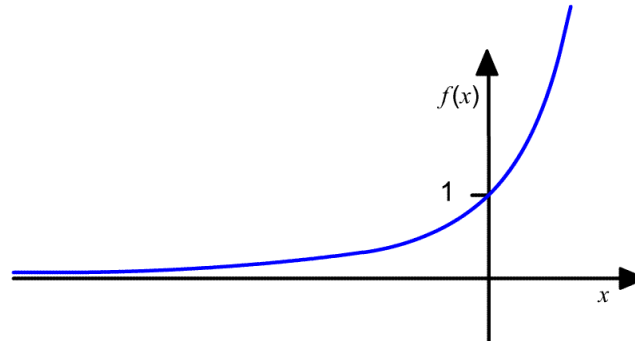


Abbildung 11

8.3.1 Definition

Die *Exponentialfunktion* wird definiert durch

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

(siehe dazu Kapitel Reihen auf Seite 80).

Schreibweise: $e^x := \exp(x)$.

8.3.2 Funktionalgleichung

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) .$$

Beweis

Siehe 27.2.3 auf Seite 280.

8.3.3 Satz 1

Es gilt:

(1) $\exp(0) = 1$

(2) $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$

(3) $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$

8.3.4 Satz 2

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Dann gilt:

- (1) a_n ist monoton wachsend
- (2) b_n ist monoton fallend
- (3) $a_n \leq b_n$
- (4) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind konvergent
- (5) $e := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- (6) $\log(e) = 1$

8.3.5 Satz 3

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x = \exp(x).$$

8.3.6 Satz 4

Die Exponentialfunktion ist die Umkehrfunktion des Logarithmus.

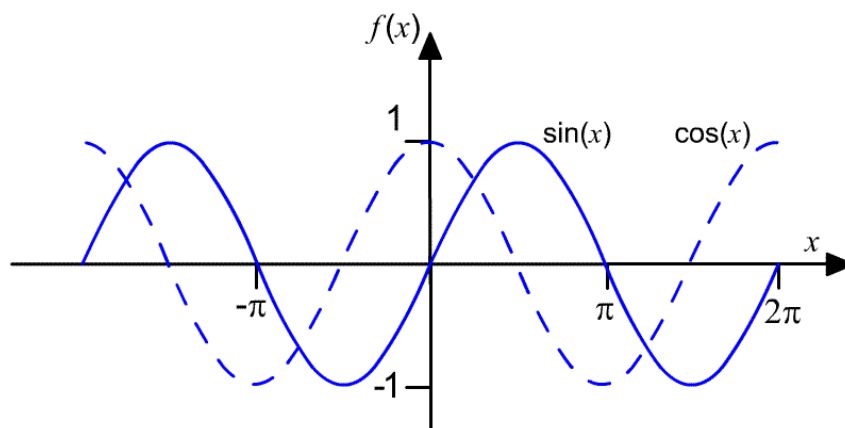
8.4 Sinus und Cosinus

Abbildung 12

8.4.1 Definition

Sinus und *Cosinus* werden definiert durch:

$$\begin{aligned}\sin : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

Andere Definition

Sinus und Cosinus können aber auch anders definiert werden:

$$\cos(x) := \operatorname{Re}(\exp(ix)) \quad \text{und} \quad \sin(x) := \operatorname{Im}(\exp(ix))$$

und somit gilt zusammen

$$\cos(x) + i \sin(x) = \exp(ix).$$

8.4.2 Funktionalgleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1}.$$

8.4.3 Beweis

Siehe Aufgabe 8.6.5 auf Seite 75 oder siehe 27.2.4 auf Seite 280.

8.4.4 Additionstheoreme

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(1) \quad \sin(x+y) = \cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y)$$

$$(2) \quad \cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

Beweisskizze

Die Additionstheoreme ergeben sich aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion mit

$$\exp(i(x+y)) = \exp(ix) \cdot \exp(iy).$$

8.4.5 Satz 1

Es gilt:

$$(1) \quad \sin(0) = 0, \quad \sin(\pi) = 0$$

$$(2) \quad \cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1$$

$$(3) \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$(4) \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

8.4.6 Satz 2

Es gilt:

$$(1) \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

$$(2) \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$(3) \quad \sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

$$(4) \quad \cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

8.4.7 Satz 3

Sinus und Cosinus sind *periodisch* mit 2π , das heißt es gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$:

$$(1) \quad \sin(x + k \cdot (2\pi)) = \sin(x)$$

$$(2) \quad \cos(x + k \cdot (2\pi)) = \cos(x)$$

8.4.8 Definition

Es gilt für die Umkehrfunktion von Sinus und Cosinus

$$\begin{aligned} \arcsin &:= \sin^{-1} \\ \arccos &:= \cos^{-1}. \end{aligned}$$

8.4.9 Satz 4

Es gilt

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

8.5 Sinushyperbolicus und Cosinushyperbolicus

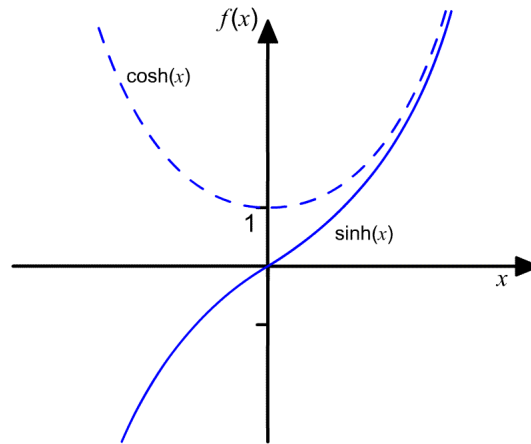


Abbildung 13

8.5.1 Definition

Sinushyperbolicus und *Cosinushyperbolicus* werden definiert durch:

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

8.5.2 Funktionalgleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

Beweis

Der Beweis geht ganz analog zur Aufgabe 8.6.5 auf Seite 75.

8.5.3 Additionstheoreme

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(1) \quad \sinh(x+y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) + \cosh(x) \cdot \sinh(y)$$

$$(2) \quad \cosh(x+y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(x) \cdot \sinh(y)$$

8.5.4 Satz 1

Es gilt:

$$(1) \quad \sinh(0) = 0$$

$$(2) \quad \cosh(0) = 1$$

$$(3) \quad \exp(x) = \sinh(x) + \cosh(x)$$

8.5.5 Definition

Es gilt für die Umkehrfunktionen:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} &:= \sinh^{-1} \\ \operatorname{arcosh} &:= \cosh^{-1} \\ \operatorname{artanh} &:= \tanh^{-1}. \end{aligned}$$

8.6 Aufgaben

8.6.1 Aufgabe 1

Berechne $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$.

Lösung

Aus der Anwendung der Funktionalgleichung folgt:

$$\begin{aligned} & \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \\ = & \arctan\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{10}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \\ = & \arctan\left(\frac{7}{9}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \\ = & \arctan\left(\frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{72}}\right) \\ = & \arctan\left(\frac{65}{65}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

8.6.2 Aufgabe 2

Zeige:

(1) Für alle $x, y \geq 1$ gilt $|\log(x) - \log(y)| \leq |x - y|$.

(2) Für alle $0 \leq x, y \leq 1$ gilt $|\log(x) - \log(y)| \geq |x - y|$.

Lösung

Für den natürlichen Logarithmus gilt:

$$(1) \quad \log(x) - \log(y) = \log\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$(2) \quad 1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1$$

Daraus folgt

$$1 - \frac{y}{x} \leq \log\left(\frac{x}{y}\right) \leq \frac{x}{y} - 1.$$

Teil 1

Seien $x, y \geq 1$ und $x \geq y$. Dann gilt

$$x - y = y \left(\frac{x}{y} - 1 \right) \geq \frac{x}{y} - 1 \geq \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y).$$

Teil 2

Seien $0 \leq x, y \leq 1$ und $x \geq y$. Dann gilt

$$x - y = x \left(1 - \frac{y}{x} \right) \leq 1 - \frac{y}{x} \leq \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y).$$

8.6.3 Aufgabe 3

Zeige, dass gilt:

$$\arctan(x) + \arctan(x^{-1}) = \begin{cases} \pi/2 & \text{für } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Lösung

Sei $x > 0$. Dann gilt:

$$\arctan\left(\frac{x-1}{1+x}\right) \stackrel{1}{=} \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{x-1}{1+x}\right) &= \arctan\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) \\
\arctan(x) - \arctan(1) &= \arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\
\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) &= \arctan(1) + \arctan(1) \\
\arctan(x) + \arctan(x^{-1}) &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Sei nun $x < 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
\arctan\left(\frac{x+1}{1-x}\right) &= \arctan\left(\frac{x+1}{-x+1}\right) \\
\arctan\left(\frac{x+1}{1-x}\right) &= \arctan\left(\frac{\frac{-x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}}\right) \\
\arctan(x) + \arctan(1) &= \arctan(-1) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\
\arctan(x) + \arctan(1) &= -\arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\
\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) &= -\arctan(1) - \arctan(1) \\
\arctan(x) + \arctan(x^{-1}) &= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

8.6.4 Aufgabe 4

Zeige, dass die **Eulersche Formel**

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Lösung

Durch die Darstellung der Funktionen in ihren Potenzreihen ergibt sich (siehe Seite 308):

$$\begin{aligned}
\exp(iz) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n)!} (iz)^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!} (iz)^{2n+1} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (iz)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (iz)^{2n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i \cdot (-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\
&= \cos(z) + i \sin(z)
\end{aligned}$$

8.6.5 Aufgabe 5

Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$

gilt.

Lösung

Betrachtet man die Funktion $f(x) = \sin(x)^2 + \cos(x)^2$, so ergibt sich

$$f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) - 2 \cos(x) \sin(x) = 0.$$

Demnach ist $f(x)$ eine konstante Funktion.

Es gilt $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$, demnach folgt

$$f(x) = \sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

9 Metrische Räume

In diesem Kapitel werden Metriken eingeführt. Durch Metriken kann die Definition von konvergenten Folgen noch stark verallgemeinert werden.

Die Beweise dieser Sätze sind jedoch meist zu den Beweisen reeller bzw. komplexer Folgen sehr ähnlich.

9.1 Definitionen

9.1.1 Definition

Sei M eine nicht leere Menge.

Eine Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Metrik**, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt:

$$(\text{MET1}) \quad d(a, b) \geq 0$$

$$(\text{MET2}) \quad d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$(\text{MET3}) \quad d(a, b) = d(b, a)$$

$$(\text{MET4}) \quad d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$$

Die Menge M und die dazugehörige Metrik (M, d) heißt **metrischer Raum**.

Oft kürzt man diese Schreibweise ab und schreibt für (M, d) einfach nur M .

$B_\varepsilon(a) := \left\{ x \in M \mid d(x, a) < \varepsilon \right\}$ heißt ε -**Ball** um a bezüglich der Metrik d .

9.1.2 Beispiel 1

Sei $M = \mathbb{R}$ und seien $a, b \in M$.

Dann wird durch $d(a, b) := |a - b|$ eine Metrik definiert.

9.1.3 Beispiel 2

Sei $M = \mathbb{R}^n$ und seien $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in M$.

Dann sind folgende Abbildungen Metriken:

$$\begin{aligned}
d_1(a, b) &= |(a_1 - b_1)| + \cdots + |(a_n - b_n)| \\
d_2(a, b) &= \left(\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \right)^{1/2} \\
d_\infty(a, b) &= \max \left\{ |(a_i - b_i)| \mid i = 1, \dots, n \right\}
\end{aligned}$$

9.1.4 Metriken auf $M \times N$

Seien (M, d) und (N, d) zwei metrische Räume.

Dann können Metriken auch auf dem kartesischen Produkt $M \times N$ definiert werden:

$$\begin{aligned}
d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) \\
d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \sqrt{d(x_1, x_2)^2 + d(y_1, y_2)^2} \\
d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \max \{d(x_1, x_2), d(y_1, y_2)\}
\end{aligned}$$

9.2 Metrische Räume und Folgen

9.2.1 Definition

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M .

Dann konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in M$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(a_n, a) < \varepsilon$$

9.2.2 Satz 1

Eine Folge in einem metrischen Raum hat höchstens einen Grenzwert.

9.2.3 Definition

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (M, d) .

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt eine **Cauchyfolge** oder **Fundamentalfolge**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

9.2.4 Satz 2

Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist auch eine Cauchyfolge.
Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Beweis

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einer Menge M , die gegen $a \in M$ konvergiert. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ auch $d(a_n, a) < \varepsilon/2$ gilt. Ist nun auch $m \geq N$, so folgt

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a_m, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

nach den Rechenregeln einer Metrik. $\square$

Bemerkung

Cauchyfolgen sind Folgen, bei denen der Abstand von je zwei Folgengliedern ab einem bestimmten Index N kleiner als ε ist.

Es ist schwer sich vorzustellen, dass es divergente Cauchyfolgen gibt, denn jede reelle Cauchyfolge ist offenbar auch konvergent. Das folgende Beispiel und das Cauchysche Konvergenzkriterium sollen das Verständnis vereinfachen.

9.2.5 Beispiel

Sei $M = \mathbb{Q}$, seien $a, b \in M$ und sei $d(a, b) = |a - b|$. Dann ist (M, d) der übliche metrische Raum.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in (M, d) mit

$$a_n = x \quad \text{und} \quad x \in \left] \sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{n} \right[\quad \text{beliebig.}$$

Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M , aber nicht konvergent in M , da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{2}$ mit $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} = M$ konvergiert.

9.2.6 Definition

Ein metrischer Raum (M, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in M konvergent ist.

9.2.7 Satz 3

Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$ sind beschränkt.

9.2.8 Cauchysches Konvergenzkriterium

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sind vollständig metrische Räume, das heißt also, dass jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Beweis

Siehe 27.2.5 auf Seite 281.

9.3 Aufgaben

9.3.1 Aufgabe 1

Sei M eine nicht leere Menge und seien $a, b \in M$. Weiter sei

$$d(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a = b \\ 1 & \text{falls } a \neq b \end{cases}.$$

(1) Zeige, dass (M, d) ein metrischer Raum ist.

(2) Zeige, dass (M, d) vollständig ist.

Lösung Teil 1

Es müssen die vier Axiome für einen metrischen Raum geprüft werden:

(1) $d(a, b) \geq 0$ gilt nach Definition.

(2) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ gilt nach Definition.

(3) Es gilt $d(a, b) = d(b, a)$:

Sei $a = b$. Dann gilt $d(a, b) = 0 = d(b, a)$.

Sei $a \neq b$. Dann gilt $d(a, b) = 1 = d(b, a)$.

(4) Es gilt $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$:

Sei $a \neq c$. Dann gilt

$$d(a, c) = 1 \leq d(a, b) + d(b, c),$$

da entweder $d(a, b) = 1$ oder $d(b, c) = 1$.

Sei $a = c$. Dann gilt

$$d(a, c) = 0 \leq d(a, b) + d(b, c),$$

da $d(a, b) \geq 0$ und $d(b, c) \geq 0$.

Lösung Teil 2

Es ist zu zeigen, dass jede Cauchyfolge in M konvergent ist.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M . Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Da $d(x_n, x_m) = 1$ oder $d(x_n, x_m) = 0$ ist, gibt es für $\varepsilon \leq 1$ also einen Index N , so dass für alle $n, m \geq N$ gilt:

$$d(x_n, x_m) = 0$$

Das heißt, dass jede Cauchyfolge ab einem bestimmten Index N eine Nullfolge ist.

Somit ist jede Cauchyfolge in M konvergent und hat den Grenzwert 0.

10 Reihen

10.1 Definitionen und Sätze

10.1.1 Definition

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \in \mathbb{R}$ oder $a_n \in \mathbb{C}$ und $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine reelle oder komplexe Folge mit

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k,$$

$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also die Folge der **Partiialsummen**.

Der unenliche Summenfolge für $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

einer solchen Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt eine **Reihe**.

Falls $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist und den Grenzwert s hat, dann ist auch die zugehörige Reihe konvergent und hat den Grenzwert s .

Kurz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \left| \sum_{k=1}^n a_k - s \right| < \varepsilon$$

Bemerkung

Anders als bei Folgen untersucht man Reihen nur auf Konvergenz oder Divergenz. Einen konkreten Grenzwert zu berechnen ist meist gar nicht möglich.

10.1.2 Beispiele für Reihen

(1) Sei $|q| < 1$. Dann heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

die *geometrische Reihe*.

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

heißt die *harmonische Reihe*. Sie ist monoton wachsend und divergent.

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

heißt die *alternierende harmonische Reihe* und ist konvergent.

10.1.3 Satz 1

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \geq 0$. Ist die Folge $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ beschränkt, dann ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergent.

Beweis

Nach den gegebenen Voraussetzung ist die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt, also auch konvergent und hat den Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. $\square$

10.1.4 Cauchy Kriterium für Reihen

Eine reelle oder komplexe Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall k \geq 0 : \left| \sum_{i=n}^{n+k} a_i \right| < \varepsilon$$

Beweis

Siehe 27.3.1 auf Seite 282.

10.1.5 Rechenregeln

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

10.1.6 Definition

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

10.1.7 Satz 2

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Beweis

Siehe 27.3.2 auf Seite 283.

10.1.8 Beispiel

Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

ist konvergent, jedoch nicht absolut konvergent.

10.2 Konvergenzkriterien

Für die Beweise einiger Konvergenzkriterien siehe 27.3.3 und folgende ab Seite 283.

10.2.1 Geometrische Reihe

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ konvergiert für alle $|q| < 1$.

10.2.2 Allgemeine harmonische Reihe

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ konvergiert für alle $q > 1$ und divergiert für alle $q \leq 1$.

10.2.3 Notwendiges Kriterium

Die Reihe $\sum_{n=c}^{\infty} a_n$ kann wenn überhaupt nur dann konvergieren, wenn a_n eine Nullfolge ist, wenn also $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ gilt.

10.2.4 Majorantenkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert und für alle $n \in \mathbb{N}$ gerade $|a_n| \leq b_n$ gilt.

10.2.5 Minorantenkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert und $b_n \leq a_n$ mit $a_n, b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

10.2.6 Leibnizkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert, wenn a_n eine monotone Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

10.2.7 Verdichtungskriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert bzw. divergiert, wenn a_n eine monoton fallende Nullfolge ist und $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert bzw. divergiert.

10.2.8 Quotientenkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ gilt. Die Reihe divergiert, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ gilt.

10.2.9 Wurzelkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ gilt. Die Reihe divergiert, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ gilt.

10.2.10 Integralkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn $\int_1^{\infty} f(x) dx$ mit $f(n) = a_n$ uneigentlich existiert und die Abbildung f monoton fallend und $f \geq 0$ ist.

10.3 q-adische Zahlensysteme

Bei dem 10-adischen Zahlensystem wird die Zahl 314 dargestellt durch

$$3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0.$$

Bei einem q-adischen Zahlensystem geht es darum, eine gegebene nicht negative ganze Zahl n durch

$$a_s q^s + \dots + a_2 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^1 + a_0 \cdot q^0$$

auszudrücken. Dabei sind $a_0, \dots, a_s \in \{0, 1, \dots, q-1\}$.

10.3.1 Satz 1

Sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$ und sei $Z = \{0, 1, \dots, q-1\}$.

Dann gibt es zu jeder ganzen Zahl $n \geq 0$ eindeutig bestimmte Zahlen $a_k \in Z$ mit nur endlich vielen $a_m \neq 0$, so dass gilt:

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^k = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots + a_s q^s$$

10.3.2 Satz 2

Sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$ und sei $Z = \{0, 1, \dots, q-1\}$.

Dann gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x \leq 1$ eindeutig bestimmte Zahlen $a_k \in Z$, so dass gilt:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k} = \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \frac{a_3}{q^3} + \dots$$

10.3.3 Beispiel 1

Sei $x = 0, \bar{9} := 0,99999\dots$

Dann gilt im üblichen 10-adischen Zahlensystem

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k - 1\right)$$

und es folgt nach der geometrischen Reihe

$$x = 9 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1\right) = 9 \cdot \left(\frac{10}{9} - 1\right) = 1.$$

Es gilt also $0,99999\dots = 1$.

10.3.4 Beispiel 2

Finde eine reelle Zahl, welche die 3-adische Darstellung

$$0,12121212121212121212\dots$$

hat, bei der also die Ziffern 1 und 2 abwechselnd unendlich oft wiederholt werden.

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} 0,12121212\dots &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 \cdot 3^{-(2n-1)} + 2 \cdot 3^{-2n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{2n-1}} + \frac{2}{3^{2n}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{3^{2n}} + \frac{2}{3^{2n}} \right) \\ &= 5 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{2n}} \right) \\ &= 5 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^2} \right)^n \\ &= 5 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9} \right)^n - 1 \right) \\ &= 5 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{9}} - 1 \right) \\ &= 5 \cdot \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

10.4 Aufgaben**10.4.1 Aufgabe 1**

Untersuche die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ auf Konvergenz.

Lösung

Da die Folge $a_n = \frac{1}{n^2}$ monoton fallend ist, darf das Verdichtungskriterium angewendet werden:

$$2^n \cdot a_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^2} = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

Bei der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ handelt es sich um die geometrische Reihe, also ist sie konvergent. Demnach konvergiert auch die gegebene Reihe.

10.4.2 Aufgabe 2

Berechne den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Lösung

Durch Partialbruchzerlegung (siehe 6.2 auf Seite 43) erhält man

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{k+1} \right] \\ &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Die gegebene Reihe konvergiert also gegen 1.

Derartige Summen nennt man auch **Teleskopsummen**.

10.4.3 Aufgabe 3

Berechne den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Lösung

Durch Partialbruchzerlegung (siehe 6.2 auf Seite 43) erhält man

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} &= \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2k+1} \right] \\
&= \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Die gegebene Reihe konvergiert also gegen $\frac{1}{2}$.

10.4.4 Aufgabe 4

Berechne den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Lösung

Durch Partialbruchzerlegung (siehe 6.2 auf Seite 43) erhält man

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{2n} - \frac{2}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{2}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{2}{8} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Die gegebene Reihe konvergiert also gegen $\frac{1}{4}$.

10.4.5 Aufgabe 5

Untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\sqrt{n}}}$ auf Konvergenz.

Lösung

Es gilt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}^2}\sqrt{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}^3}} > \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}^4}} = \frac{1}{n} = b_n.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > 0$, $b_n > 0$ sowie $b_n < a_n$. Da die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert, ist auch die gegebene Reihe nach dem Minorantenkriterium divergent.

10.4.6 Aufgabe 6

Untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ auf Konvergenz.

Lösung

Es gilt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+1} > \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+n} > \frac{1}{3n} = b_n.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > 0$, $b_n > 0$ sowie $b_n < a_n$. Da die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert (harmonische Reihe), ist auch die gegebene Reihe nach dem Minorantenkriterium divergent.

10.4.7 Aufgabe 7

Untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\sqrt{n}}}$ auf Konvergenz.

Lösung

Da $a_n = \frac{1}{n\sqrt{\sqrt{n}}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, darf das Verdichtungskriterium angewendet werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \sqrt{\sqrt{2^n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2^n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} \right)^n$$

Da $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} < 1$ gilt, ist $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ eine konvergente geometrische Reihe. Somit konvergiert auch die gegebene Reihe.

10.4.8 Aufgabe 8

Sei $x \in]0, 1]$. Untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ auf absolute Konvergenz.

Lösung

Nach dem Wurzelkriterium folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x}{(1+x^2)^n} \right|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x}{(1+x^2)^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} < 1.\end{aligned}$$

Der Grenzwert ist also für alle $x \in]0, 1]$ kleiner als 1, demnach ist die gegebene Reihe absolut konvergent.

10.4.9 Aufgabe 9

Untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \arctan(n)}$ auf Konvergenz.

Lösung

Da $a_n = \frac{1}{n \cdot \arctan(n)}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, darf das Verdichtungskriterium angewendet werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot \arctan(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\arctan(2^n)}$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\arctan(2^n)} = \frac{2}{\pi}$ gilt, ist $2^n a_{2^n}$ keine Nullfolge. Demnach wird das notwendige Kriterium für eine konvergente Reihe nicht erfüllt. Somit divergiert die gegebene Reihe.

10.4.10 Aufgabe 10

Untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^n}$ auf absolute Konvergenz.

Lösung

Es gilt für $n \geq 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\log(n)} \right)^n.$$

Nach dem Wurzelkriterium folgt nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{1}{\log(n)} \right)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n)} = 0 < 1.$$

Demnach ist die gegebene Reihe absolut konvergent.

10.4.11 Aufgabe 11

Untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n!)}{n^3}$ auf Konvergenz.

Lösung

Es gilt

$$a_n = \frac{\log(n!)}{n^3} < \frac{\log(n^n)}{n^3} = \frac{n \cdot \log(n)}{n^3} = \frac{\log(n)}{n^2} = b_n.$$

Es gilt $|a_n| < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da b_n eine monoton fallende Nullfolge ist, folgt nach dem Verdichtungskriterium

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n b_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\log(2^n)}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \log(2)}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Nach dem Quotientenkriterium folgt nun

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot \log(2) \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n \cdot \log(2)} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{2n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium, demnach ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Die gegebene Reihe ist also konvergent.

10.4.12 Aufgabe 12

Untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ auf absolute Konvergenz.

Lösung

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. Dann folgt nach dem Quotientenkriterium

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{(n+1)} \cdot n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot n! \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot n!} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^n}{(n+1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = e^{-1} < 1. \end{aligned}$$

Demnach ist die gegebene Reihe absolut konvergent.

10.4.13 Aufgabe 13

Sei $x \in \mathbb{C}$ mit $x \neq 0$. Untersuche die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ auf Konvergenz.

Lösung

Nach dem Quotientenkriterium folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Die gegebene Reihe ist also für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

10.4.14 Aufgabe 14

Finde eine reelle Zahl, welche die 7-adische Darstellung

$$0,234234234234234234234 \dots$$

hat, bei der also die Ziffern 2, 3 und 4 abwechselnd unendlich oft wiederholt werden.

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} 0,234234234\dots &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \cdot 7^{-(3n-2)} + 3 \cdot 7^{-(3n-1)} + 4 \cdot 7^{-3n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7^{3n-2}} + \frac{3}{7^{3n-1}} + \frac{4}{7^{3n}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7^{3n} \cdot 7^{-2}} + \frac{3}{7^{3n} \cdot 7^{-1}} + \frac{4}{7^{3n}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot 49}{7^{3n}} + \frac{3 \cdot 7}{7^{3n}} + \frac{4}{7^{3n}} \right) \\ &= 123 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7^{3n}} \right) = 123 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{343} \right)^n \\ &= 123 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{343} \right)^n - 1 \right) \\ &= 123 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{343}} - 1 \right) = 123 \cdot \frac{1}{342} = \frac{41}{114}. \end{aligned}$$

11 Stetigkeit

11.1 Definitionen und Sätze

11.1.1 Definition

Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ heißt **Intervall**, wenn gilt:

Sind $a, b \in I$ mit $a \leq b$ und ist $m \in \mathbb{R}$ mit $a \leq m \leq b$, dann ist auch $m \in I$.

Schreibweisen mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$:

$[a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	geschlossenes Intervall
$]a, b[$	$= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	offenes Intervall
$]a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	halboffenes Intervall
$[a, b[$	$= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	halboffenes Intervall

11.1.2 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $a \in M$ fest.

f heißt **stetig** bei a , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

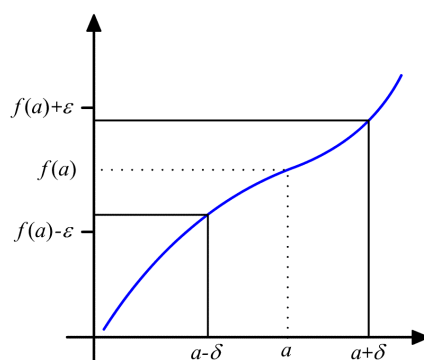


Abbildung 14

f heißt **stetig**, wenn f bei jedem $a \in M$ stetig ist.

11.1.3 Beispiele stetiger Funktionen

(1) Sei $f(x) = c$ konstant.

Sei $\varepsilon > 0$, wähle $\delta = 1$. Dann gilt für alle $x, a \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(a)| = |0| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

(2) Sei $f(x) = x$.

Sei $\varepsilon > 0$, wähle $\delta = \varepsilon$ und für alle $x, a \in \mathbb{R}$ gelte $|x - a| < \delta$. Dann folgt

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

11.1.4 Beispiel

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

Behauptung

f ist stetig bei a .

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und wähle $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{2|a|+1}\} > 0$.

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und es gelte $|x - a| < \delta$.

Es ist nun zu zeigen, dass auch $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |x^2 - a^2| = |(x - a)(x + a)| \\ &= |x - a| \cdot |x + a| = |x - a| \cdot |x - a + 2a| \\ &\stackrel{\text{DUG}}{\leq} |x - a| \cdot (|x - a| + |2a|) < \delta \cdot (\delta + 2|a|) \\ &\leq \delta \cdot (1 + 2|a|) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

Bemerkung

Ähnlich wie bei den Folgen muss auch bei einem solchen Beweis über die Definition von Stetigkeit beachtet werden, dass die Wahl von δ in Abhängigkeit von ε eigentlich erst aus der letzten Abschätzung folgt. Im schriftlichen Beweis muss δ jedoch schon zuvor angegeben werden.

11.1.5 Gegenbeispiel

Es gibt auch Funktionen, die nirgends stetig sind.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Dann gibt es zu jedem rationalen a mit $f(a) = 0$ auch ein beliebig nahes irrationales x mit $f(x) = 1$, so dass

$$|f(x) - f(a)| \leq 1 = \varepsilon$$

gilt und umgekehrt. Demnach kann f schon für $\varepsilon = 1$ nicht stetig sein.

11.1.6 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

f heißt **gleichmäßig stetig**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in M : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

f ist also genau dann gleichmäßig stetig, wenn die Wahl von δ nur von ε und nicht von einer Stelle a abhängt.

11.1.7 Beispiel

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$.

Zeige, dass f auf dem Intervall $[-2, 2]$ gleichmäßig stetig ist.

Lösung

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Seien $x, y \in [-2, 2]$ beliebig und es gelte $|x - y| < \delta$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| = |(x - y)(x + y)| \\ &\stackrel{\text{DUG}}{\leq} |x - y| \cdot \left| |x| + |y| \right| \leq |x - y| \cdot (2 + 2) \\ &< 4\delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

11.2 Stetigkeit in metrischen Räumen

Einige weitere Aussagen über die Stetigkeit von Abbildungen können für alle metrische Räume verallgemeinert werden.

11.2.1 Definition

Seien (M, d) und (N, d') metrische Räume, sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung und sei $a \in M$ fest.

f heißt **stetig** bei a , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Oder anders:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$$

f heißt **stetig**, wenn f bei jedem $a \in M$ stetig ist.

11.2.2 Satz 1

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann ist auch

$$\begin{aligned} id_M : M &\rightarrow M \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

stetig.

11.2.3 Satz 2

Seien (M, d) , (N, d) , (P, d) metrische Räume, seien $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$ Abbildungen, sei $a \in M$ und sei $b = f(a)$.

Ist f bei a und g bei b stetig, so ist auch $g \circ f$ stetig bei a .

11.2.4 Folgenkriterium

Seien (M, d) , (N, d) metrische Räume, sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung und sei $a \in M$.

Dann ist f genau dann stetig bei a , wenn zu jeder gegen a konvergenten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M auch die Bildfolge $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in N gegen $f(a)$ konvergiert.

Beweis

Siehe 27.4.1 auf Seite 287.

11.3 Stetige Funktionen**11.3.1 Rechenregeln**

Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig, sei $a \in M$ fest und seien $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ zwei bei a stetige Funktionen.

Dann gilt:

Die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier stetiger Funktionen ist wieder stetig:

- (1) $f + g$ ist stetig bei a
- (2) $\lambda \cdot f$ ist stetig bei a mit $\lambda \in \mathbb{R}$
- (3) $f \cdot g$ ist stetig bei a
- (4) $\frac{1}{f}$ ist stetig bei a falls $f(x) \neq 0$ für alle $x \in M$

Beweisskizze

Man wende einfach das Folgenkriterium an und nutze die Rechenregeln für konvergente Folgen.

11.3.2 Beispiele

- (1) Alle Polynome $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig.
- (2) Seien $p(x), q(x)$ beliebige Polynome. Dann ist die rationale Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{p(x)}{q(x)} \end{aligned}$$

mit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$ stetig.

11.3.3 Satz 1

Die fundamentalen Funktionen

- (1) $\log :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$
- (2) $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- (3) $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
- (4) $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- (5) $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

sind alle stetig.

Beweisskizze

Es muss jeweils die Stetigkeit bei einem wichtigen Punkt ermittelt werden, also zum Beispiel bei 1 für $\log(x)$ oder bei 0 für $\exp(x)$. Dazu nutzt man die fundamentalen Eigenschaften aus Kapitel 8. Danach ergibt sich die Stetigkeit aller Punkte durch das Ausnutzen der Funktionalgleichungen.

Die Stetigkeit von Sinus und Cosinus ergibt sich aus der Definition über die Exponentialfunktion.

11.4 Zwischenwertsatz und Umkehrfunktionen**11.4.1 Satz von Bolzano**

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.

Gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit $f(\xi) = 0$.

Beweis

Siehe 27.4.2 auf Seite 288.

11.4.2 Zwischenwertsatz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.

Dann ist auch $f(I)$ ein Intervall.

Beweis

Siehe 27.4.3 auf Seite 289.

Bemerkung

Der Zwischenwertsatz ist nur der topologisch reelle Spezialfall, dass die Bilder zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängend sind (siehe 18.6.4 auf Seite 170).

11.4.3 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere Teilmenge.

Die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

(1) *monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x < y$ gilt:

$$f(x) \leq f(y)$$

(2) *monoton fallend*, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x < y$ gilt:

$$f(x) \geq f(y)$$

(3) *streng monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x < y$ gilt:

$$f(x) < f(y)$$

(4) *streng monoton fallend*, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x < y$ gilt:

$$f(x) > f(y)$$

11.4.4 Beispiele

$\log$, $\arctan$ und $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ für $x \geq 0$ sind alles streng monoton wachsende Funktionen.

11.4.5 Satz 1

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und sei $M = f(I)$.

Dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : M \rightarrow I$ ist stetig.

Beweis

Siehe 27.4.4 auf Seite 289.

11.4.6 Umkehrsatz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend bzw. fallend.

Dann ist auch $M = f(I)$ ein Intervall und die Umkehrfunktion $f^{-1} : M \rightarrow I$ ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend bzw. fallend.

Beweis

Siehe 27.4.5 auf Seite 290.

11.4.7 Satz 2

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton.

Dann ist f genau dann stetig, wenn $f(I)$ ein Intervall ist.

11.4.8 Satz 3

Es gilt $\log = \exp^{-1} :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, somit ist $\log$ genau dann stetig, wenn $\exp$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

11.4.9 Definition und Satz

(1) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ mit $f(x) = x^n$.

Dann ist f stetig, streng monoton, bijektiv und es gilt

$$\sqrt[n]{} := f^{-1}.$$

Somit ist auch $\sqrt[n]{}$ stetig.

(2) Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ mit $f(x) = x^a$, also

$$x^a = \exp(a \cdot \log(x)).$$

Somit ist auch f stetig.

11.4.10 Rechenregeln

Es gelten nun folgende Rechenregeln:

(1) $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ mit $x > 0$

(2) $\exp(a \cdot \log(x)) \cdot \exp(b \cdot \log(x)) = \exp((a+b) \cdot \log(x))$

(3) $x^0 = 1$ und $x^1 = x$

(4) $x^n = \exp(n \cdot \log(x))$

(5) $x^a \cdot y^a = (xy)^a$ mit $x, y > 0$

(6) $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

(7) $(x^a)^b = x^{ab}$

11.4.11 Bemerkung und Satz

Bisher wurde stets der natürliche Logarithmus zur Basis e betrachtet, daher gilt auch

$$\log(x) = (\exp(x))^{-1} = (e^x)^{-1}$$

(siehe Herleitung des Logarithmus auf Seite 63).

Man kann den Logarithmus aber auch zu einer anderen Basis $a > 0$ betrachten.

Der Logarithmus zur Basis a wird mit $\log_a$ bezeichnet und ist dann genau die Umkehrfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ mit $f(x) = a^x$.

Ist dies der Fall, dann gilt

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}.$$

11.4.12 Satz 4

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte

$$f(a+b) = f(a) + f(b).$$

Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gerade $f(x) = c \cdot x$ gilt.

11.4.13 Satz 5

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b).$$

Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gerade $f(x) = x^c$ gilt.

11.5 Aufgaben**11.5.1 Aufgabe 1**

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 3x$.

Zeige durch Rückgang auf die Definition, dass f stetig ist.

Lösung

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig, sei $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta > 0$ mit

$$\delta^2 + 2\delta|a| + 3\delta \leq \varepsilon.$$

Weiter sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und es gelte $|x - a| < \delta$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |x^2 - 3x - a^2 + 3a| = |x^2 - a^2 - 3(x - a)| \\ &= |(x - a)(x + a) - 3(x - a)| \\ &\leq |(x - a)(x + a)| + 3|x - a| \\ &< |x - a| \cdot |x + a + a - a| + 3\delta \leq \delta(|x - a| + |2a|) + 3\delta \\ &= \delta(\delta + 2|a|) + 3\delta \\ &= \delta^2 + 2\delta|a| + 3\delta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

11.5.2 Aufgabe 2

Prüfe, bei welchen Stellen $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $f :]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) & \text{für } -1 < x < 0 \\ \exp(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

stetig ist.

Lösung

Die Funktion f ist für alle $x > 0$ stetig, da $\exp(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

f ist auch für $-1 < x < 0$ stetig, da $\frac{1}{x}$, $\sqrt{1+x}$ und $\sqrt{1-x}$ auf $-1 < x < 0$ stetig sind und das Produkt stetiger Funktionen wieder stetig ist.

Es bleibt also nur noch der Punkt 0 zu untersuchen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x) - (1-x)}{x \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} \\ &= 1\end{aligned}$$

Da diese beiden Grenzwerte 1 ergeben, ist die gegebene Funktion auf ihrem Definitionsbereich stetig.

11.5.3 Aufgabe 3

Zeige, dass $\log(x)$ auf dem Intervall $[1, \infty[$ gleichmäßig stetig ist.

Lösung

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und wähle $\delta = \varepsilon$.

Seien $x, y \geq 1$ und es gelte $|x - y| < \delta$. Dann gilt

$$|\log(x) - \log(y)| \leq |x - y| < \delta = \varepsilon.$$

11.5.4 Aufgabe 4

Zeige, dass $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $[1, \infty[$ gleichmäßig stetig ist.

Lösung

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und wähle $\delta = \varepsilon$.

Seien $x, y \geq 1$ und es gelte $|x - y| < \delta$. Dann gilt

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{y - x}{xy} \right| \leq |y - x| = |x - y| < \delta = \varepsilon.$$

12 Funktionenfolgen

12.1 Grenzwert einer Funktion

12.1.1 Definition

Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $A \subset M$ und sei $a \in A$.

a heißt **Adhärenzpunkt** oder **Berührungspunkt** von A in M , wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:

- (1) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$.
- (2) Es gibt eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Bemerkung

Die Menge aller Adhärenzpunkten von A ist der so genannte **Abschluß** von A (siehe 18.4 auf Seite 168).

12.1.2 Definition

Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $A \subset M$ und sei $a \in A$.

a heißt genau dann **Häufungspunkt** von A , wenn a ein Adhärenzpunkt von $A \setminus \{a\}$ ist.

12.1.3 Beispiele

- (1) Sei $M = \mathbb{R}$ und sei $A = \mathbb{Z}$. Dann ist 0 ein Adhärenzpunkt, aber kein Häufungspunkt von A .
- (2) Sei $M = \mathbb{R}$ und sei $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist 0 ein Häufungspunkt von A , obwohl $0 \notin A$ gilt.

12.1.4 Häufungspunkte und Folgen

Der Begriff Häufungspunkt an dieser Stelle ist nicht zu verwechseln mit dem Begriff Häufungspunkt bei Folgen:

Sei $k \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n = k$ konstant.

Dann ist k ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, aber kein Häufungspunkt der Menge

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{k\} = A.$$

12.1.5 Definition

Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $A \subset M$, sei $a \in A$ ein Häufungspunkt von A und sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

f hat für $x \rightarrow a$ den **Grenzwert** $c \in \mathbb{R}$, wenn die Funktion

$$f_c : A \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq a \\ c & \text{für } x = a \end{cases}$$

bei a stetig ist.

12.1.6 Satz 1

Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $A \subset M$, sei $a \in A$ ein Häufungspunkt von A und sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Dann sind äquivalent:

- (1) f hat den Grenzwert c für $x \rightarrow a$.
- (2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A, x \neq a : d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$.
- (3) Für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $a_n \neq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = c$.

12.1.7 Satz 2

Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $A \subset M$, sei $a \in A$ ein Häufungspunkt von A und sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Dann hat f für $x \rightarrow a$ höchstens einen Grenzwert.

Beweisskizze

Man nehme wieder an es gebe zwei Grenzwerte a und a' und zeige, dass diese gleich sein müssen.

12.1.8 Rechenregeln

Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $A \subset M$, sei $a \in A$ ein Häufungspunkt von A und seien $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = d$.

Dann gilt:

- (1) Es existiert und gilt $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = c + d$.
- (2) Es existiert und gilt $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = c \cdot d$.
- (3) Es existiert und gilt $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f)(x) = \lambda c$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (4) Es existiert und gilt $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{c}{d}$ falls $g(x) \neq 0$ und $d \neq 0$.

Beweisskizze

Es können wieder wie üblich das Folgenkriterium und die Rechenregeln über konvergente Folgen genutzt werden.

12.1.9 Beispiel 1

Sei $M =]0, \infty[$, sei $a = 1$ und sei $A = M \setminus \{a\}$. Sei weiter

$$f(x) = \frac{\log(x)}{x-1} \quad \text{für} \quad x \in A.$$

Zeige, dass $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ gilt.

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{x} &\leq \log(x) \leq x - 1 \\ \frac{1}{x} &\leq \frac{\log(x)}{x-1} \leq 1 && \text{für alle } x > 1 \\ 1 &\leq \frac{\log(x)}{x-1} \leq \frac{1}{x} && \text{für alle } x < 1 \end{aligned}$$

Falls nun $|x - 1| \leq \frac{1}{2}$ gilt, dann gilt auch $\frac{1}{x} \leq 2$.

Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\}$.

Sei $x \in A$ und es gelte $|x - a| < \delta$. Dann folgt

$$|f(x) - 1| = \left| \frac{\log(x)}{x-1} - 1 \right| \leq \left| 1 - \frac{1}{x} \right| = \frac{|x-1|}{x} < \varepsilon.$$

12.1.10 Beispiel 2

Sei $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und sei

$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} \quad \text{für} \quad x \in A.$$

Zeige, dass $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ gilt.

Lösung

Es gilt:

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2} \cdot (1 + \sqrt{1+x^2})} \leq f(x) \leq \frac{2}{1 + \sqrt{1+x^2}}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \qquad \qquad \qquad \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

12.1.11 Weitere Beispiele

(1) Sei $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und sei

$$f(z) = \frac{\exp(z) - 1}{z} \quad \text{für} \quad x \in A.$$

Dann gilt $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$.

(2) Sei $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und sei

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} \quad \text{für} \quad x \in A.$$

Dann gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

(3) Sei $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und sei

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{für} \quad x \in A.$$

Dann gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

12.1.12 Satz 3

Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $A \subset M$, sei 0 ein Häufungspunkt von A und sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine bei 0 stetige Funktion.

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

12.1.13 Beispiel

Sei $f(x) = x^x$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x^x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

12.1.14 Bemerkung

Eine weitere Regel zum Berechnen des Grenzwertes einer Funktion ist die Regel von l'Hospital (siehe 13.3 auf Seite 120).

12.2 Konvergenz von Funktionenfolgen**12.2.1 Definition und Satz**

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann bezeichnet

$$\mathcal{F}(M) = \{f \mid f : M \rightarrow \mathbb{R}\}$$

die Menge aller Funktionen von M nach $\mathbb{R}$.

$\mathcal{F}(M)$ bildet einen Vektorraum.

12.2.2 Definition (punktweise Konvergenz)

Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $f \in \mathcal{F}(M)$ und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}(M)$.

f_n *konvergiert punktweise* gegen f , wenn gilt:

$$\forall x \in M \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$$

12.2.3 Satz 1

Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $f \in \mathcal{F}(M)$ und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}(M)$.

f_n konvergiert genau dann punktweise gegen f , wenn für alle $x \in M$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

gilt.

12.2.4 Beispiel

Sei $M = [0, 1]$ und sei $f_n(x) = x^n$.

Für alle $x < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ und für $x = 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$.

Somit ist $f_n(x)$ punktweise konvergent auf $[0, 1]$.

12.2.5 Definition (gleichmäßig Konvergenz)

Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $f \in \mathcal{F}(M)$ und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}(M)$.

f_n **konvergiert gleichmäßig** gegen f , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in M : d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$$

12.2.6 Beispiel

Sei

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}.$$

Zeige, dass f_n auf $[0, 1]$ gleichmäßig konvergent ist.

Lösung

f_n konvergiert punktweise gegen

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0, \end{aligned}$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 \left(\frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n} \right)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(\frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$, wähle $N > \frac{2}{\varepsilon}$ und sei $n \geq N$ beliebig.

Dann gilt für alle $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2} - 0 \right| = \left| \frac{x^2 + n}{n^2} \right| \\ &= \left| \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n} \right| \stackrel{\text{DUG}}{\leq} \left| \frac{x^2}{n^2} \right| + \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon. \end{aligned}$$

12.2.7 Satz 2

Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $f \in \mathcal{F}(M)$, sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}(M)$ und sei

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{F}(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \sup \left\{ |f(x)| \mid x \in M \right\}. \end{aligned}$$

eine Abbildung. Dann konvergiert f_n genau dann gleichmäßig gegen f , wenn für alle $x \in M$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

12.2.8 Satz 3

Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $f \in \mathcal{F}(M)$, sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}(M)$ und sei $a \in M$.

Konvergiert f_n gleichmäßig gegen f und ist f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig bei a , dann ist auch f stetig bei a .

12.3 Banachraum und Funktionenfolgen**12.3.1 Definition**

Sei E ein Vektorraum über einem Körper K .

Eine Abbildung $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Norm** auf E , wenn für alle $a, b \in E$ und $\lambda \in K$ gilt:

$$(\text{NOR1}) \quad \|a\| \geq 0$$

$$(\text{NOR2}) \quad \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$(\text{NOR3}) \quad \|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$$

$$(\text{NOR4}) \quad \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

$(E, \|\cdot\|)$ heißt dann **normierter Raum**.

12.3.2 Definition

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und sei $d(a, b) := \|a - b\|$ mit $a, b \in E$.

$(E, \|\cdot\|)$ heißt **Banachraum**, wenn (E, d) ein vollständiger metrischer Raum ist.

12.3.3 Definition und Satz

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann bezeichnet

$$\mathcal{B}(M) = \{f \in \mathcal{F}(M) \mid f \text{ ist beschränkt}\}$$

die Menge aller beschränkten Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

$\mathcal{B}(M)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(M)$.

12.3.4 Satz 1

Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $f \in \mathcal{F}(M)$, sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{B}(M)$ und sei

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{F}(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \sup \left\{ |f(x)| \mid x \in M \right\} \end{aligned}$$

eine Norm auf $\mathcal{F}(M)$.

Dann gilt:

- (1) Ist $f \in \mathcal{B}(M)$ und konvergiert f_n in $(\mathcal{B}(M), \|\cdot\|)$ gegen f , dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen f .
- (2) Konvergiert f_n gleichmäßig gegen f , dann ist $f \in \mathcal{B}(M)$ und f_n konvergiert in $(\mathcal{B}(M), \|\cdot\|)$ gegen f .

12.3.5 Satz 2

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ linear.

Dann sind äquivalent:

- (1) f ist gleichmäßig stetig
- (2) f ist stetig bei 0
- (3) $\exists c > 0 \forall a \in E : \|a\| \leq 1 \Rightarrow |f(a)| \leq c$

12.4 Aufgaben

12.4.1 Aufgabe 1

Berechne folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

(1)
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 10x + 9}{x^2 - 4x + 3}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 10x + 9}{x^2 - 4x + 3}$$

$$(3) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \log(1 + e^{1/x})$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}$$

Lösung Teil 1

Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 10x + 9}{x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 10x + 9}{(x-1)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 + x^2 + x - 9)(x-1)}{(x-1)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 9}{x-3} = \frac{3-9}{-2} = 3. \end{aligned}$$

Lösung Teil 2

Durch Polynomdivision gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 10x + 9}{x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + x^2 + x - 9}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(x^2 + 4x + 13 + \frac{30}{x-3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 4x + 13) + \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{30}{x-3} \right) = 34 \pm \infty. \end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert also nicht.

Lösung Teil 3

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $x \leq 1$. Da der Logarithmus streng monoton steigend ist und $e^{1/x} \geq 1$ für alle $x \in]0, 1]$ gilt, folgt

$$x \log(e^{1/x}) \leq x \log(1 + e^{1/x}) \leq x \log(2e^{1/x}).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \log(e^{1/x}) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log(e^{x/x}) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 = 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \log(2e^{1/x}) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \left(\log(2) + \log(e^{1/x}) \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(x \log(2) + x \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \log(2) + 1) = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Demnach gilt auch

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \log(1 + e^{1/x}) = 1.$$

Lösung Teil 4

Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \dots}{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots}{\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots} \right) = \frac{1}{\frac{1}{2!}} = 2. \end{aligned}$$

12.4.2 Aufgabe 2

Untersuche die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}.$$

Lösung

Sei $f(x) = x^3 + x^2 - 2$. Man errät leicht die Nullstelle 1 und erhält durch Polynomdivision

$$f(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 2).$$

Sei $g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Da 1 und -1 Nullstellen von $g(x)$ sind, erhält man wiederum durch Polynomdivision

$$g(x) = (x - 1)(x^2 - x - 2) = (x - 1)(x + 1)(x - 2).$$

Demnach gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 1)(x - 2)} = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}{(x-1)(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)(x-2)} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

12.4.3 Aufgabe 3

Sei

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

Zeige, dass f_n auf $[0, 1]$ punktweise konvergent ist.

Lösung

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{1^n} &= 0 \quad \text{für } x = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} &= 0 \quad \text{für } x = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} &= 0 \quad \text{für } 0 < x < 1, \end{cases}$$

also konvergiert f_n punktweise gegen

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0. \end{aligned}$$

12.4.4 Aufgabe 4

Zeige, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a + x^2}$ mit $a > 1$ auf $[0, \infty[$ gleichmäßig konvergent ist.

Lösung

Es ist also

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a + x^2} \quad \text{und} \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a + x^2}.$$

Für alle $x \geq 0$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k^a + x^2} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a},$$

somit ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a + x^2}$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^a + x^2} < \varepsilon$$

gilt. Dann gilt für alle $n \geq N$ und alle $x \in [0, \infty[$ gerade

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a + x^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a + x^2} \right| = \left| - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^a + x^2} \right| \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^a + x^2} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^a + x^2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

12.4.5 Aufgabe 5

Es sei $E = \mathcal{C}([0, 1])$ der Vektorraum aller auf dem Intervall $[0, 1]$ stetigen Funktionen.

Zeige, dass durch

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$$

eine Norm definiert wird und dass $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

Lösung

Es sind zunächst die vier Axiome einer Norm zu prüfen:

(1) $\|f\| \geq 0$.

Gilt nach Definition, da der Betrag der Funktion betrachtet wird.

(2) $\|f\| \Leftrightarrow f = 0$.

Sei $\|f\| = 0$, dann gilt $\sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\} = 0$ und somit auch $f = 0$.

Sei $f = 0$, also $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Dann gilt auch $\|f\| = 0$.

(3) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \|\lambda f\| &= \sup\{|\lambda f(x)| \mid x \in [0, 1]\} = \sup\{|\lambda| |f(x)| \mid x \in [0, 1]\} \\ &= |\lambda| \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\} = |\lambda| \|f\| \end{aligned}$$

(4) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup\{|f(x) + g(x)| \mid x \in [0, 1]\} \\ &\stackrel{\text{DUG}}{\leq} \sup\{|f(x)| + |g(x)| \mid x \in [0, 1]\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\} + \sup\{|g(x)| \mid x \in [0, 1]\} \\ &= \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

Seien $f, g \in E$ und sei $d(f, g) = \|f - g\|$.

Damit $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist, muss (E, d) vollständig sein, es muss also jede Cauchyfolge in (E, d) konvergent sein.

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (E, d) . Dann gilt

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : d(f_n, f_m) < \varepsilon, \\ \text{also } \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da aber $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gerade eine Cauchyfolge ist, besitzt sie auch genau einen Häufungspunkt in E , etwa $f(x)$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt für alle $x \in [0, 1]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [0, 1]\} = \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Demnach konvergiert $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $(E, \|\cdot\|)$ gleichmäßig gegen f .

Es gilt $f \in E$, da f_k für alle $k \in \mathbb{N}$ nach Definition stetig ist. Somit ist $(E, \|\cdot\|)$ also ein Banachraum.

12.4.6 Aufgabe 6

Untersuche, für welche $a > 0$ die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$f_n = \frac{1}{1 + nx^2}$$

auf dem Intervall $[0, a]$ gleichmäßig konvergent ist.

Lösung

Die Untersuchung der punktweisen Konvergenz ergibt:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

Da $f(x)$ bei 0 nicht stetig, aber $f_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bei 0 stetig ist, kann $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf keinem Intervall $[0, a]$ gleichmäßig konvergent sein.

12.4.7 Aufgabe 7

Zeige, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent ist.

Lösung

Nach der Aufgabenstellung gilt

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k^2} \quad \text{und} \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}.$$

Es ist bekannt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ nach dem Majorantenkriterium konvergent ist, denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(kx)}{k^2} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2} < \varepsilon$$

gilt. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2} \right| = \left| - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

12.4.8 Aufgabe 8

Sei $\mathcal{C}([0, 1])$ der Banachraum aller stetigen reellen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ unter der **Supremumsnorm**

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}.$$

Zeige, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = \frac{n+x}{n}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{C}([0, 1])$ ist.

Lösung

Für alle $x \in [0, 1]$ gilt

$$|f_n(x) - 1| = \frac{n+x}{n} - \frac{n}{n} = \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n},$$

also ist auch

$$\|f_n(x) - 1\| \leq \frac{1}{n}.$$

Demnach konvergiert $f_n(x)$ in $\mathcal{C}([0, 1])$ gegen die konstante Funktion 1. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge, denn jede konvergente Folge ist auch eine Cauchyfolge.

13 Differentiation

13.1 Definitionen und Sätze

13.1.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $a \in M$ ein Häufungspunkt von M .

f heißt *differenzierbar* bei a , wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: f'(a)$$

existiert.

$f'(a)$ heißt dann die *Ableitung* oder *Differentialquotient* von f bei a .

Der Quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ heißt der *Differenzenquotient* und ist definiert für alle $x \in M \setminus \{a\}$.

Schreibweise:

$$\frac{df}{dx}(a) := f'(a)$$

Ist jeder Punkt $a \in M$ ein Häufungspunkt von M , also zum Beispiel $M = I$ ein Intervall, und ist f bei jedem Punkt $a \in M$ differenzierbar, dann heißt f *differenzierbar*.

f' ist dann die *Ableitung* von f .

13.1.2 Beispiele

(1) Sei $f(x) = c$ konstant und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \neq a$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0,$$

also gilt $f'(a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(2) Sei $f(x) = x$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \neq a$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1,$$

also gilt $f'(a) = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

13.1.3 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $a \in M$ ein Häufungspunkt von M .

Dann sind äquivalent:

(1) f ist differenzierbar bei a .

(2) Es gibt ein $m \in \mathbb{R}$ und eine Abbildung $\varrho : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(a) + m(x - a) + \varrho(x) \cdot (x - a) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varrho(x) = 0,$$

das heißt es gilt also $\varrho(a) = 0$ und ϱ ist stetig bei a .

(3) Es gibt eine bei a stetige Abbildung $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in M$ gilt:

$$f(x) = f(a) + (x - a) \cdot \varphi(x).$$

Es gilt dann

$$m = \varphi(a) = f'(a).$$

Beweis

Siehe 27.5.1 auf Seite 290.

13.1.4 Satz 2

Ist f differenzierbar, dann ist f auch stetig.

Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Beweisskizze

Nach dem vorherigen Satz ist $f(x) = f(a) + (x - a) \cdot \varphi(x)$ stetig bei a .

13.1.5 Rechenregeln

Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig, sei $a \in M$ ein Häufungspunkt von M und es seien $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar bei a .

Dann gilt:

(1) $f + g$ ist differenzierbar und es gilt: $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(2) $\lambda \cdot f$ ist differenzierbar und es gilt: $(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

Beweisskizze

Diese beiden Rechenregeln folgen unmittelbar aus der Definition der Differenzierbarkeit sowie aus den Rechenregeln über die Grenzwerte von Funktionen.

13.1.6 Beispiel

Demnach sind alle Polynomfunktionen auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

13.1.7 Satz 3

Es gilt:

$$(1) \quad \log(x)' = \frac{1}{x}$$

$$(2) \quad \exp(x)' = \exp(x)$$

$$(3) \quad \arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(4) \quad \sin(x)' = \cos(x), \quad \cos(x)' = -\sin(x)$$

Beweis zu Teil (2)

Es gilt

$$\exp(0)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

(siehe 12.1.11 auf Seite 105).

Weiter gilt

$$\exp(x) = \exp(x - a + a) = \exp(x - a) \cdot \exp(a).$$

Seien f und g zwei Funktionen mit

$$f(x) = x - a, \quad f'(x) = 1 \quad \text{und} \quad g(x) = x \cdot \exp(a), \quad g'(x) = \exp(a).$$

Dann gilt

$$\exp(x) = (g \circ \exp \circ f)(x)$$

und es folgt nach der Kettenregel (siehe unten)

$$\begin{aligned} \exp(a)' &= g'((\exp \circ f)(a)) \cdot ((\exp \circ f)(a))' \\ &= g'(\exp(x - a)(a)) \cdot (\exp'(f(a)) \cdot f'(a)) \\ &= g'(\exp(0)) \cdot (\exp'(0) \cdot 1) \\ &= \exp(a) \cdot (1 \cdot 1) \\ &= \exp(a). \end{aligned}$$

□

13.2 Differentiationsregeln

Für Beweise bzw. Beweisskizzen der Differentiationsregeln siehe 27.5.2 und folgende ab Seite 291.

13.2.1 Satz 1 (Polynome)

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

Dann gilt

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}.$$

13.2.2 Beispiel

Sei $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2$. Dann gilt

$$f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x^1 + 5 \cdot x^0 = 6x^2 - 4x + 5.$$

13.2.3 Satz 2 (Kettenregel)

Seien $M, N \subset \mathbb{R}$ beliebig, seien $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $f(M) \subset N$.

Dann gilt

$$(g \circ f)' = (g(f))' = g'(f) \cdot f' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

13.2.4 Beispiel

Sei $f(x) = \sin(2x)$. Dann gilt

$$f'(x) = \cos(2x) \cdot (2x)' = 2 \cdot \cos(2x).$$

13.2.5 Satz 3 (Produktregel)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig und seien $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Dann gilt

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f.$$

13.2.6 Beispiel

Sei $f(x) = \sin(x) \cdot x^5$. Dann gilt

$$f'(x) = \cos(x) \cdot x^5 + \sin(x) \cdot 5x^4.$$

13.2.7 Satz 4 (Quotientenregel)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig und seien $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Dann gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}.$$

13.2.8 Beispiel

Sei $f(x) = \tan(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ f'(x) &= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - (-\sin(x)) \cdot \sin(x)}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}. \end{aligned}$$

13.2.9 Satz 5 (Ableitung über Umkehrfunktion)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und umkehrbar.

Dann gilt

$$f' = \frac{1}{(f^{-1})'(f)}.$$

f wird also in den Kehrwert der Ableitung der Umkehrfunktion eingesetzt.

13.2.10 Beispiel

Sei $f(x) = \log(x)$. Dann gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

13.3 Regel von l'Hospital**13.3.1 Satz 1**

Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $A \subset M$, sei $a \in A$ ein Häufungspunkt von A und seien $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen.

Ist $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ein unbestimmter Ausdruck der Form $\left[\frac{0}{0}\right]$ oder $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls dieser Grenzwert existiert (Grenzwert von Funktionen: siehe Seite 102).

13.3.2 Beispiel

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{\left[\frac{0}{0}\right]} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

13.3.3 Unbestimmte Ausdrücke

Die folgenden Ausdrücke sind unbestimmt:

$$\left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [0 \cdot \infty], \quad [0^0], \quad [1^\infty], \quad [\infty^0], \quad [\infty - \infty]$$

Bei diesen Ausdrücken kann man (ohne Weiteres) nichts über den Grenzwert aussagen. Die Regel von l'Hospital darf jedoch nur bei $\left[\frac{0}{0}\right]$ oder $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ angewendet werden.

13.4 Mittelwertsatz

13.4.1 Definition

Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

(1) f hat bei $a \in M$ ein **Minimum**, wenn für alle $x \in M$ gilt:

$$f(x) \geq f(a)$$

(2) f hat bei $a \in M$ ein **Maximum**, wenn für alle $x \in M$ gilt:

$$f(x) \leq f(a)$$

(3) f hat bei $a \in M$ ein **lokales Minimum**, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in B_\varepsilon(a)$ gilt:

$$f(x) \geq f(a)$$

(4) f hat bei $a \in M$ ein **lokales Maximum**, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in B_\varepsilon(a)$ gilt:

$$f(x) \leq f(a)$$

f hat bei a ein **lokales Extremum**, wenn f bei a ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum hat.

13.4.2 Satz 1

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ und es gelte $f(a) = f(b)$.

Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$, so dass f bei ξ ein lokales Extremum hat.

Beweis

Siehe 27.5.7 auf Seite 295.

13.4.3 Satz 2

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $\xi \in]a, b[$, sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bei ξ differenzierbar und es sei ξ ein lokales Extremum von f .

Dann gilt

$$f'(\xi) = 0.$$

Beweis

Siehe 27.5.8 auf Seite 295.

13.4.4 Satz von Rolle

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sowie auf $]a, b[$ sogar differenzierbar und es gelte $f(a) = f(b)$.

Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis

Siehe 27.5.9 auf Seite 296.

13.4.5 Mittelwertsatz

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sowie auf $]a, b[$ sogar differenzierbar.

Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis

Siehe 27.5.10 auf Seite 296.

13.4.6 Satz 3

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sowie auf $]a, b[$ sogar differenzierbar.

Dann gilt:

(1) Gilt $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in]a, b[$, so ist f konstant.

(2) Gilt $f'(\xi) \geq 0$ für alle $\xi \in]a, b[$, so ist f monoton wachsend.

(3) Gilt $f'(\xi) > 0$ für alle $\xi \in]a, b[$, so ist f streng monoton wachsend.

Analog gilt dieser Satz auch für monoton fallende Funktionen.

13.5 Aufgaben

13.5.1 Aufgabe 1

Sei $f(x) = 2^x$. Berechne $f'(x)$.

Lösung

Nach den allgemeinen Rechenregeln gilt

$$f(x) = 2^x = e^{\log(2^x)} = e^{x \cdot \log(2)}.$$

Demnach folgt nach der Kettenregel

$$f'(x) = e^{x \cdot \log(2)} \cdot \log(2) = 2^x \cdot \log(2).$$

13.5.2 Aufgabe 2

Sei

$$f(x) = \cos \left(\log \left(\sin \left(\sqrt{x^2 + 1} \right) \right) \right).$$

Berechne $f'(x)$.

Lösung

Durch wiederholtes Anwenden der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[-\sin \left(\log \left(\sin \left(\sqrt{x^2 + 1} \right) \right) \right) \right] \cdot \left[\frac{1}{\sin \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)} \right] \cdot \\ &\quad \left[\cos \left(\sqrt{x^2 + 1} \right) \right] \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \right] \cdot 2x \\ &= - \frac{\sin \left(\log \left(\sin \left(\sqrt{x^2 + 1} \right) \right) \right) \cdot \cos \left(\sqrt{x^2 + 1} \right) \cdot x}{\sin \left(\sqrt{x^2 + 1} \right) \cdot \sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

13.5.3 Aufgabe 3

Differenziere die folgenden auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen dort, wo es möglich ist:

$$(1) \quad f(x) = (2 + x^3)^2$$

$$(2) \quad g(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 5}$$

$$(3) \quad h(x) = \frac{x \cdot |x|}{1 + x^4}$$

Lösung Teil 1

$f(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt nach der Kettenregel

$$f'(x) = 2(2 + x^3) \cdot 3x^2 = 6x^2(2 + x^3).$$

Lösung Teil 2

$g(x) = (2x^2 + 5)^{\frac{1}{3}}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = \frac{1}{3}(2x^2 + 5)^{-\frac{2}{3}} \cdot (4x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{(2x^2 + 5)^2}}.$$

Lösung Teil 3

Betrachtet man alle $x > 0$, dann gilt

$$h'(x) = \left(\frac{x^2}{1 + x^4} \right)' = \frac{2x(1 + x^4) - 4x^3(x^2)}{(1 + x^4)^2} = \frac{2x - 2x^5}{(1 + x^4)^2}.$$

Betrachtet man alle $x < 0$, dann gilt

$$h'(x) = \left(\frac{-x^2}{1 + x^4} \right)' = \frac{-2x(1 + x^4) + 4x^3(x^2)}{(1 + x^4)^2} = -\frac{2x - 2x^5}{(1 + x^4)^2}.$$

Betrachtet man $x = 0$, so folgt nach Definition

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \cdot |x|}{1 + x^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot |x|}{x(1 + x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{1 + x^4} = 0.$$

Demnach ist $h(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$h'(x) = \begin{cases} \frac{2x - 2x^5}{(1 + x^4)^2} & \text{für } x > 0 \\ -\frac{2x - 2x^5}{(1 + x^4)^2} & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

13.5.4 Aufgabe 4

Sei $f(x) = 6^{x^2}$. Berechne $f'(x)$.

Lösung

Es gilt

$$f(x) = 6^{x^2} = e^{\log(6^{x^2})} = e^{x^2 \cdot \log(6)}.$$

Demnach folgt nach der Kettenregel

$$f'(x) = e^{x^2 \cdot \log(6)} \cdot 2x \log(6) = 6^{x^2} \cdot 2x \log(6).$$

13.5.5 Aufgabe 5

Sei $m \in \mathbb{Z}$ und

$$f(x) = (x^m)^{\log(x^2)}.$$

Bestimme den Definitionsbereich von $f(x)$ und berechne $f'(x)$.

Lösung

$f(x)$ ist für alle $m \in \mathbb{Z}$ nur auf dem $]0, \infty[$ definiert. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^m)^{\log(x^2)} = x^{m \log(x^2)} = x^{\log(x^{2m})} \\ &= e^{\log(x^{\log(x^{2m})})} = e^{\log(x^{2m}) \cdot \log(x)}. \end{aligned}$$

Demnach folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\log(x^{2m}) \cdot \log(x)} \cdot (\log(x^{2m}) \cdot \log(x))' \\ &= (x^m)^{\log(x^2)} \cdot \left(\frac{2m}{x} \log(x) + \frac{1}{x} \log(x^{2m}) \right) \\ &= (x^m)^{\log(x^2)} \cdot \left(\frac{2m \log(x) + 2m \log(x)}{x} \right) \\ &= (x^m)^{\log(x^2)} \cdot \frac{4m \log(x)}{x}. \end{aligned}$$

Auch der Definitionsbereich von $f'(x)$ ist $]0, \infty[$, also ist $f(x)$ auf dem Intervall $]0, \infty[$ differenzierbar und hat die Ableitung $f'(x)$.

13.5.6 Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Zeige, dass f bei 0 differenzierbar ist.

Lösung

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Demnach gilt $f'(0) = 0$.

13.5.7 Aufgabe 7

Bestimme den Definitionsbereich von $f(x) = \log(\log(x))$ und berechne die Ableitung.

Lösung

Der Logarithmus ist auf $]0, \infty[$ definiert, streng monoton steigend und es gilt $\log(x) > 0$ für alle $x > 1$. Demnach ist der Definitionsbereich $]1, \infty[$.

Nach der Kettenregel gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log(x)} = \frac{1}{\log(x^x)}.$$

13.5.8 Aufgabe 8

Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass

$$f(x) = \sin(x)$$

gleichmäßig stetig ist.

Lösung

Es gilt zunächst $f'(x) = \cos(x)$ und $|\cos(x)| \leq 1$.

Seien nun $a, b \in \mathbb{R}$, dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{\sin(b) - \sin(a)}{b - a} = \cos(\xi) \leq 1.$$

Es ist nun zu zeigen, dass gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in M : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und wähle $\delta = \varepsilon$.

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig und es gelte $|x - y| < \delta$.

Dann folgt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\sin(x) - \sin(y)| \\ &= \left| \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} \cdot (x - y) \right| \leq 1 \cdot |x - y| < \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

14 Integration

14.1 Integrationstheorie

Die Integrationstheorie dient zur Definition von integrierbaren Funktionen und legt fest, wie einem Intervall einer integrierbaren Funktion ein reeller Wert zugeordnet wird.

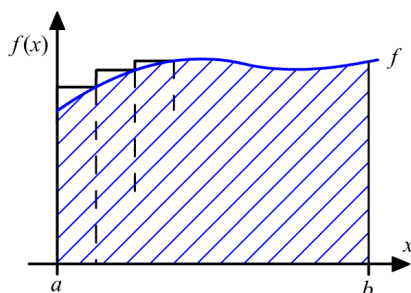


Abbildung 15

Dieser reelle Wert soll dann genau dem Flächeninhalt unter dem Graphen auf dem gegebenen Intervall entsprechen.

14.1.1 Definition

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es $a_0, \dots, a_n \in [a, b]$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt, für die gilt:

(1) $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, also eine endliche Teilung

(2) für alle $x \in]a_{\nu-1}, a_\nu[$ gilt $f(x) = c_\nu$

Es sei dann

$$\mu(f) := \sum_{\nu=1}^n c_\nu \cdot (a_\nu - a_{\nu-1}) \in \mathbb{R}.$$

14.1.2 Definition und Satz

Sei $\mathcal{F}(I)$ die Menge aller reellen Funktionen auf einem Intervall I .

Dann bezeichnet

$$\mathcal{T}(I)$$

die Menge aller Treppenfunktionen auf I .

Es gilt:

- (1) $\mathcal{T}(I)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(I)$
- (2) aus $f \in \mathcal{T}(I)$ folgt auch $|f| \in \mathcal{T}(I)$
- (3) $\mu : \mathcal{T}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear
- (4) aus $f \in \mathcal{T}(I)$, $f \geq 0$ folgt auch $\mu(f) \geq 0$
- (5) aus $f, g \in \mathcal{T}(I)$, $f \leq g$ folgt auch $\mu(f) \leq \mu(g)$
- (6) für alle $f \in \mathcal{T}(I)$ gilt $\mu(f) \leq \mu(|f|)$

14.1.3 Definition

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **integrierbar**, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:

- (1) $f \in \mathcal{R}(I)$.
- (2) f ist Adhärenzpunkt von $\mathcal{T}(I)$ in $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|)$.
- (3) Es gibt eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{T}(I)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ sowie mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$.

Es gilt dann

$$\mu(f) = \int_a^b f(x) \, dx$$

und es bezeichnet dabei

$$\mathcal{R}(I) := \overline{\mathcal{T}(I)}$$

die Menge aller integrierbaren Funktionen auf I .

$\overline{\mathcal{T}(I)}$ ist der Abschluß von $\mathcal{T}(I)$ (siehe 18.4 auf Seite 168).

Es gilt also $\mathcal{T}(I) \subset \mathcal{R}(I)$.

14.1.4 Satz 1

Es gilt:

- (1) $\mathcal{R}(I)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{B}(I)$.
- (2) Aus $f \in \mathcal{R}(I)$ folgt auch $|f| \in \mathcal{R}(I)$.

14.1.5 Satz 2

Die Abbildung $\mu : \mathcal{T}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

14.1.6 Definition und Satz

Es gibt genau eine stetige Funktion

$$\bar{\mu} : \mathcal{R}(I) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $\bar{\mu}|_{\mathcal{T}(I)} = \mu$.

14.1.7 Definition

Sei $f \in \mathcal{R}(I)$.

$$\int_a^b f(x) \, dx := \bar{\mu}(f)$$

heißt das **Integral** von f über dem Intervall $I = [a, b]$, f heißt **Integrand** und a, b heißen die **Integrationsgrenzen**.

Es sollen nun zwei Integrale nur über die bisherige Definition berechnet werden.

14.1.8 Beispiel 1

Es wird das Integral

$$\int_0^1 x \, dx$$

nur unter Benutzung der Definition über Treppenfunktionen berechnet.

Sei dazu $k = 1, \dots, n$ und wähle $a_k = \frac{k}{n}$ sowie $a_0 = 0$. Weiter sei

$$c_k = f(a_k) = \frac{k}{n}.$$

Dann gilt

$$\int_0^1 x \, dx = \bar{\mu}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k (a_k - a_{k-1})$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

14.1.9 Beispiel 2

Es wird nun gezeigt, wie man das Integral

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx$$

für ein $a > 1$ nur unter Benutzung der Definition über Treppenfunktionen berechnen kann.

Sei dazu $k = 1, \dots, 2^m$ und wähle $a_k = (\sqrt[2^m]{a})^k$ sowie $a_0 = 1$. Dann ist dies eine nicht gleichmäßige aber endliche Teilung von $[1, a]$. Weiter sei nun

$$c_k = f(a_k) = \frac{1}{a_k} = \frac{1}{(\sqrt[2^m]{a})^k}.$$

Man erhält dann

$$\begin{aligned}
\int_1^a \frac{1}{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^m-1} \frac{1}{(\sqrt[2^m]{a})^k} \left((\sqrt[2^m]{a})^{k+1} - (\sqrt[2^m]{a})^k \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^m-1} (\sqrt[2^m]{a} - 1) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^m (\sqrt[2^m]{a} - 1).
\end{aligned}$$

Nach 8.1.2 auf Seite 64 ist das aber gerade der Logarithmus von a , somit erhält man das Endergebnis

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx = \log(a).$$

14.1.10 Satz 3

Die Abbildung $\bar{\mu} : \mathcal{R}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear.

14.1.11 Satz 4

Es gilt:

(1) Aus $f \in \mathcal{R}(I)$, $f \geq 0$ folgt auch $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$.

(2) Aus $f, g \in \mathcal{R}(I)$, $f \leq g$ folgt auch $\bar{\mu}(f) \leq \bar{\mu}(g)$.

14.1.12 Satz 5

Jede stetige oder monotone Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

14.2 Stammfunktion**14.2.1 Definition**

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Eine Funktion

$$F : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F' = f$$

heißt ***Stammfunktion*** von f .

14.2.2 Satz 1

Seien $f, f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen.

Dann gilt:

- (1) Sind F, F_1 zwei Stammfunktionen von f , so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F_1 = F + c$.
- (2) Ist F_1 eine Stammfunktion von f_1 und ist F_2 ist Stammfunktion von f_2 , so ist $F_1 + F_2$ Stammfunktion von $f_1 + f_2$.
- (3) Ist F eine Stammfunktion von f und $c \in \mathbb{R}$, so ist $c \cdot F$ ist Stammfunktion von $c \cdot f$.

14.2.3 Definition

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f .

Dann gilt für das ***unbestimmte Integral***

$$\int f(x) \, dx := F(x).$$

14.2.4 Wichtige Beispiele

Es gilt

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{x} dx = \log(x).$$

14.3 Rechenregeln

14.3.1 Rechenregeln

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen.

Dann gilt:

- (1) $\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$
- (2) $\int_a^b (\lambda \cdot f) dx = \lambda \cdot \int_a^b f dx \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$
- (3) $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx \quad \text{mit } a < c < b$
- (4) $\int_a^b f dx = - \int_b^a f dx$

Beweisskizze

Die ersten beiden Aussagen ergeben sich aus der Linearität der $\bar{\mu}$ Funktion (siehe dazu 14.1.10).

14.4 Integrationsregeln

Fast alle Integrationsregeln können recht einfach gezeigt werden. Man muss dafür jeweils nur die Stammfunktion ableiten und zeigen, dass diese Ableitung genau dem Integranden entspricht. Ein derartiger Beweis der partiellen Integration ist unter 27.6.4 auf Seite 298 zu finden.

14.4.1 Satz 1 (Integration von Polynomen)

Es gilt für $f(x) = x^n$ mit $n \neq -1$

$$\int f(x) dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}.$$

14.4.2 Beispiel

Es gilt also zusammen mit den Rechenregeln

$$\int x^2 + 2x + 2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x.$$

14.4.3 Satz 2 (partielle Integration)

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.

Dann gilt

$$\int (f' \cdot g) \, dx = f \cdot g - \int (f \cdot g') \, dx.$$

14.4.4 Beispiel 1

Berechne $\int \log(x) \, dx$ für alle $x \in]0, \infty[$.

Lösung

Seien $f, g :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Rightarrow f'(x) = 1 \\ g(x) = \log(x) &\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int \log(x) \, dx &= \int (f' \cdot g)(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int (f \cdot g')(x) \, dx \\ &= x \cdot \log(x) - \int \frac{x}{x} \, dx = x \cdot \log(x) - x. \end{aligned}$$

14.4.5 Beispiel 2

Berechne $\int \sin(x)^2 \, dx$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit

$$\begin{aligned} f(x) = -\cos(x) &\Rightarrow f'(x) = \sin(x) \\ g(x) = \sin(x) &\Rightarrow g'(x) = \cos(x). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int \sin(x)^2 \, dx &= \int (f' \cdot g)(x) \, dx \\ &= f(x) \cdot g(x) - \int (f \cdot g')(x) \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int \cos(x)^2 \, dx \\
&= -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int 1 - \sin(x)^2 \, dx \\
&= -\sin(x) \cdot \cos(x) + x - \int \sin(x)^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)^2 \, dx &= -\sin(x) \cdot \cos(x) + x - \int \sin(x)^2 \, dx \\
2 \cdot \int \sin(x)^2 \, dx &= -\sin(x) \cdot \cos(x) + x \\
\int \sin(x)^2 \, dx &= \frac{1}{2} (x - \sin(x) \cdot \cos(x)).
\end{aligned}$$

14.4.6 Satz 3 (Substitutionsregel)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und sei $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $a, b \in I$.

Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z) \, dz \quad \text{mit} \quad z = \varphi(x).$$

Sind keine Grenzen a und b gegeben, so rechnet man mit dem unbestimmten Integral.

14.4.7 Beispiel

Berechne $\int \sin(x) \cdot \log(\cos(x)) \, dx$ für alle $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Lösung

Seien $f, \varphi :]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(x) \\
\varphi(x) &= \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = -\sin(x).
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int \log(\cos(x)) \cdot \sin(x) \, dx &= - \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx \\
&= - \int f(z) \cdot z' \, dx \quad \text{mit} \quad z = \varphi(x) \\
&= - \int f(z) \, dz \\
&= -(z \cdot \log(z) - z) \\
&= -(\cos(x) \cdot \log(\cos(x)) - \cos(x)).
\end{aligned}$$

14.4.8 Satz 4 (Zähler gleich Ableitung vom Nenner)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Dann gilt

$$\int \frac{f'}{f} dx = \log(f).$$

14.4.9 Beispiel

Berechne $\int -\tan(x) dx$ für alle $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Lösung

Es gilt

$$\int -\tan(x) dx = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx = \log(\cos(x)).$$

14.4.10 Satz 5 (Nenner vom Grad 1)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und sei $a \neq 0$.

Dann gilt

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \log(ax+b).$$

14.4.11 Beispiel

Es gilt

$$\int \frac{1}{2(x-1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx = \frac{1}{2} \log(x-1),$$

es gilt aber auch

$$\int \frac{1}{2(x-1)} dx = \int \frac{1}{2x-2} dx = \frac{1}{2} \log(2x-2).$$

14.4.12 Satz 6 (rationale Funktionen)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$

Dann gilt

$$\int \frac{a}{(x-b)(x-c)} dx \stackrel{\text{PBZ}}{=} \int \frac{A}{(x-d)} + \frac{B}{(x-e)} dx.$$

Dabei erhält man $A, B, d, e \in \mathbb{R}$ durch Partialbruchzerlegung.

14.4.13 Beispiel

Berechne $\int \frac{1}{x^2-1} dx$ für alle $x > 1$.

Lösung

Führt man für $\frac{1}{x^2-1}$ die Partialbruchzerlegung durch, so erhält man

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-1} dx &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \log(x-1) - \frac{1}{2} \log(x+1) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{x-1}{x+1} \right). \end{aligned}$$

14.4.14 Satz 7 (Substituieren)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Substituiert man innerhalb der Funktion f mit z , dann gilt

$$\int f(x) dx \Leftrightarrow \int f(x) \frac{dz}{z'} \quad \text{mit} \quad dx = \frac{dz}{z'} \Leftrightarrow z' = \frac{dz}{dx}.$$

14.4.15 Beispiel

Berechne $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$ für alle $x \in]0, \pi[$.

Lösung

Es gilt

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \int \frac{\sin(x)}{\sin(x)^2} dx = \int \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)^2} dx.$$

Setzt man nun $z := \cos(x)$, dann gilt

$$z' = \frac{dz}{dx} \Leftrightarrow dx = \frac{dz}{z'} = -\frac{dz}{\sin(x)}$$

und somit folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin(x)} dx &= \int \frac{\sin(x)}{1 - z^2} \cdot -\frac{dz}{\sin(x)} \\ &= -\int \frac{1}{1 - z^2} dz \\ &= -\operatorname{artanh}(z) \\ &= -\operatorname{artanh}(\cos(x)). \end{aligned}$$

(Siehe Tabelle auf Seite 309.)

14.5 Hauptsatz der Analysis

14.5.1 Satz 1

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f .

Dann ist auch $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann eine Stammfunktion von f , wenn $F - G = c$ eine Konstante ist.

Beweis

Sei zunächst G eine Stammfunktion von f . Dann gilt $F' = f = G'$ und somit $(F - G)' = 0$, also ist $F - G = c$ eine Konstante.

Sei nun $F - G = c$ eine Konstante. Dann gilt $G' = (F - c)' = F' = f$. $\square$

14.5.2 Mittelwertsatz der Integration

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $a < b$.

Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$f(\xi) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Beweis

Siehe 27.6.1 auf Seite 297.

14.5.3 Satz 2

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $a < b$.

Dann ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

differenzierbar auf $[a, b]$ und es gilt $F' = f$.

F ist also eine Stammfunktion von f .

Beweis

Siehe 27.6.2 auf Seite 297.

14.5.4 Hauptsatz der Analysis

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, sei $a < b$ und sei F eine Stammfunktion von f .

Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) \quad .$$

Beweis

Siehe 27.6.3 auf Seite 298.

14.5.5 Beispiel

Berechnung des Flächeninhaltes eines Kreises mit dem Radius 1.

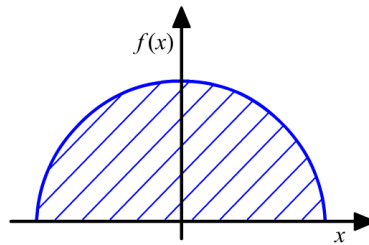


Abbildung 16

Es muss nun folgendes Integral berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx &= \left[\frac{1}{2} \left(x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right) \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2}(\arcsin(1)) - \frac{1}{2}(\arcsin(-1)) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Somit ist der Flächeninhalt des Kreises genau $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$.

14.5.6 Satz 3

Sei $f'(x) = \lambda \cdot f(x)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = c \cdot e^{\lambda x}.$$

14.5.7 Definition (Bogenlänge)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $a < b$.

Dann wird die **Bogenlänge** B zwischen a und b definiert als

$$B = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

14.5.8 Beispiel

Berechnung der Kreislinie eines Kreises mit dem Radius 1.

Sei $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Es muss nun folgendes Integral berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right)^2} \, dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= [\arcsin(x)]_{-1}^1 \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \\ &= \pi \end{aligned}$$

Somit ist die Kreislinie eines Kreises mit dem Radius 1 genau $2 \cdot \pi = 2\pi$.

14.6 Uneigentliche Integration

14.6.1 Definition

Sei $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a, \infty]$, sei $a < b$ und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Ist für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ die Funktion f auf dem Intervall $[a, c]$ integrierbar und existiert der Grenzwert

$$\lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) \, dx,$$

dann heißt f **uneigentlich** integrierbar und man setze

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{\substack{c \rightarrow b \\ c < b}} \int_a^c f(x) \, dx.$$

Bemerkung

Es gilt also zum Beispiel

$$\int_a^\infty f(x) \, dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

oder

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{\substack{c \rightarrow a \\ c > a}} \int_c^b f(x) \, dx.$$

14.6.2 Beispiel

Berechne $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx$.

Lösung

Es gilt

$$\int_1^T \frac{1}{x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^T = 1 - \frac{1}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 1 - 0 = 1.$$

14.6.3 Rechenregeln

Es gelten die gleichen Rechenregeln wie für Integrale (siehe dazu 14.3.1).

14.7 Fourierreihen und Fouriertransformation

Wie aus der linearen Algebra bekannt sein sollte, bildet die Menge aller periodischen Funktionen mit den üblichen Verknüpfungen einen unendlich dimensional Vektorraum. Die Funktionen 1 , $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ für $k \in \mathbb{N}$ bilden eine Basis dieses Vektorraums, somit kann jede periodische Funktion durch eine Linearkombination dieser Funktionen dargestellt werden. Dies ist die Idee der Fourierreihen.

Bei der Fouriertransformation kann eine geeignete Funktion in einen sogenannten k -Raum transformiert und später zurücktransformiert werden. Ein großer Vorteil dabei ist, dass im k -Raum das Ableiten der ursprünglichen Funktion gerade einer Multiplikation mit k entspricht.

14.7.1 Fourierreihen

Sei $f(x)$ eine Funktion mit der Periode T und seien weiter

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2\pi n x}{T} \, dx, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2\pi n x}{T} \, dx \end{aligned}$$

für alle $n \geq 0$. Dann gilt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{T} \right).$$

14.7.2 Beispiel

Sei

$$f(x) = x \quad \text{für} \quad -1 \leq x < 1 \quad \text{und} \quad f(x+2) = f(x),$$

$f(x)$ ist also periodisch mit der Periode $T = 2$. Nun müssen zunächst die Folgen berechnet werden, zweckmäßigerweise wird dabei von -1 bis 1 und nicht von 0 bis 2 integriert.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2\pi nx}{T} dx \\ &= \int_{-1}^1 x \cos(\pi nx) dx = \left[\frac{\cos(\pi nx)}{n^2\pi^2} + \frac{x \sin(\pi nx)}{n\pi} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{\cos(\pi n)}{n^2\pi^2} + \frac{\sin(\pi n)}{n\pi} - \frac{\cos(-\pi n)}{n^2\pi^2} + \frac{\sin(-\pi n)}{n\pi} \\ &= \frac{\cos(\pi n)}{n^2\pi^2} + \frac{\sin(\pi n)}{n\pi} - \frac{\cos(\pi n)}{n^2\pi^2} - \frac{\sin(\pi n)}{n\pi} = 0, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} dx \\ &= \int_{-1}^1 x \sin(\pi nx) dx = \left[\frac{\sin(\pi nx)}{n^2\pi^2} - \frac{x \cos(\pi nx)}{n\pi} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{\sin(\pi n)}{n^2\pi^2} - \frac{\cos(\pi n)}{n\pi} - \frac{\sin(-\pi n)}{n^2\pi^2} - \frac{\cos(-\pi n)}{n\pi} \\ &= \frac{\sin(\pi n)}{n^2\pi^2} - \frac{\cos(\pi n)}{n\pi} + \frac{\sin(\pi n)}{n^2\pi^2} - \frac{\cos(\pi n)}{n\pi} \\ &= \frac{2 \sin(\pi n)}{n^2\pi^2} - \frac{2 \cos(\pi n)}{n\pi} = 0 - \frac{2(-1)^n}{n\pi} = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung vereinfacht sich so stark, da gerade $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt.

Insgesamt ergibt sich somit

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{T} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n\pi} \cdot \sin(\pi nx) \right). \end{aligned}$$

14.7.3 Fouriertransformation

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Die Fouriertransformation von $f(x)$ ist dann

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot f(x) dx$$

und die Rücktransformation ergibt sich aus

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot g(k) \, dk.$$

14.7.4 Beispiel

Sei $a > 0$ und sei

$$f_a(x) = \begin{cases} 1/a & \text{für } -a/2 \leq x \leq a/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für die Fouriertransformation $f_a(x) \rightarrow g_a(k)$ in den k -Raum gilt nun

$$\begin{aligned} g_a(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot f_a(x) \, dx = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-ikx} \, dx \\ &= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \cdot \left[-\frac{1}{ik} \cdot e^{-ikx} \right]_{x=-a/2}^{a/2} \\ &= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \cdot \left(-\frac{1}{ik} \cdot e^{-ika/2} + \frac{1}{ik} \cdot e^{ika/2} \right) \\ &= -\frac{1}{aik\sqrt{2\pi}} \cdot (e^{-ika/2} - e^{ika/2}) \\ &= \frac{1}{aik\sqrt{2\pi}} \cdot 2i \cdot \sin(ka/2) = \frac{2}{ak\sqrt{2\pi}} \cdot \sin(ka/2), \end{aligned}$$

da gerade

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

gilt (siehe 8.4.1 auf Seite 69).

14.8 Aufgaben

14.8.1 Aufgabe 1

Sei $f(x) = x^2$. Berechne das Integral

$$\int_0^1 f(x) \, dx$$

nur unter Benutzung der Definition über Treppenfunktionen.

Lösung

Sei $k = 1, \dots, n$ und wähle $a_k = \frac{k}{n}$ sowie $a_0 = 0$. Weiter sei

$$c_k = f(a_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^2 \, dx &= \bar{\mu}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k (a_k - a_{k-1}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

14.8.2 Aufgabe 2

Sei $f(x) = 2x^2$. Berechne das Integral

$$\int_1^3 f(x) \, dx$$

nur unter Benutzung der Definition über Treppenfunktionen.

Lösung

Sei $k = 1, \dots, n$ und wähle $a_k = \frac{2k}{n} + 1$ sowie $a_0 = 1$. Weiter sei

$$c_k = f(a_k) = 2 \left(\frac{2k}{n} + 1 \right)^2 = 8 \frac{k^2}{n^2} + 8 \frac{k}{n} + 2.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \bar{\mu}(f) &= \int_1^3 2x^2 \, dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k (a_k - a_{k-1}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(8 \frac{k^2}{n^2} + 8 \frac{k}{n} + 2 \right) \cdot \left(\frac{2k}{n} + 1 - \frac{2(k-1)}{n} - 1 \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(8 \frac{k^2}{n^2} + 8 \frac{k}{n} + 2 \right) \cdot \frac{2}{n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{16}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{16}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n 1 \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{16n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + \frac{16n(n+1)}{2n^2} + \frac{4n}{n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{32}{6} + \frac{48}{6n} + \frac{16}{6n^2} + \frac{16}{2} + \frac{16}{2n} + 4 \right) \\
&= \frac{32}{6} + \frac{16}{2} + 4 = 17\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

14.8.3 Aufgabe 3

Sei $f(x) = e^x$. Berechne das Integral

$$\int_0^1 f(x) \, dx$$

nur unter Benutzung der Definition über Treppenfunktionen.

Lösung

Sei $k = 1, \dots, n$ und wähle $a_k = \frac{k}{n}$ sowie $a_0 = 0$. Weiter sei

$$c_k = f(a_k) = e^{k/n}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^x \, dx &= \bar{\mu}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k (a_k - a_{k-1}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{k/n} \cdot \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{k/n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^k \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1 - (e^{1/n})^{n+1}}{1 - e^{1/n}} - 1 \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{e^{1/n} - e \cdot e^{1/n}}{1 - e^{1/n}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1 - e}{\frac{1}{e^{1/n}} - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e}{ne^{-1/n} - n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e}{n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1/n)^m}{m!} - n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e}{n \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \dots\right) - n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e}{-1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} + \dots} \\
&= \frac{1 - e}{-1} = e - 1.
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung wurde die endlich geometrische Reihe und die Potenzreihe von e^x verwendet (siehe Anhang auf Seite 308).

14.8.4 Aufgabe 4

Finde eine Stammfunktion zu $f(x) = 6x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.

Lösung

Wähle

$$\begin{aligned}
g(x) &= -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} &\Rightarrow & g'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \\
h(x) &= 6x &\Rightarrow & h'(x) = 6.
\end{aligned}$$

Nach der partiellen Integration gilt

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x) \, dx = \int g'(x) \cdot h(x) \, dx \\
&= g(x) \cdot h(x) - \int g(x) \cdot h'(x) \, dx \\
&= -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot 6x - \int -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot 6 \, dx \\
&= -12x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 12 \int e^{-\frac{1}{2}x} \, dx \\
&= -12x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - 24 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \\
&= -12(x + 2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}.
\end{aligned}$$

14.8.5 Aufgabe 5

Bestimme $\int x \sin(x) \, dx$.

Lösung

Wähle

$$\begin{aligned}
f(x) &= x &\Rightarrow & f'(x) = 1 \\
g(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow & g'(x) = \sin(x).
\end{aligned}$$

Nach der partiellen Integration gilt

$$\begin{aligned}
 \int x \sin(x) \, dx &= \int f(x) \cdot g'(x) \, dx \\
 &= f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx \\
 &= x \cdot (-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) \, dx \\
 &= -\cos(x) \cdot x + \int \cos(x) \, dx \\
 &= -x \cos(x) + \sin(x) \\
 &= \sin(x) - x \cos(x).
 \end{aligned}$$

14.8.6 Aufgabe 6

Bestimme den Flächeninhalt F der Punktmenge oberhalb der x -Achse und unterhalb des Graphen von $f(x) = 1 - x^2$.

Lösung

Es gilt $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$ und $f(1) = 0$. Die zu untersuchende Punktmenge ist also

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

Nach dem Hauptsatz der Analysis folgt

$$F = \int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \left| 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right| = \frac{4}{3}.$$

14.8.7 Aufgabe 7

Finde eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

Lösung

Es gilt

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = - \int \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx.$$

Somit steht im Zähler nun die Ableitung vom Nenner und es folgt

$$F(x) = - \int \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = - \log(1 + e^{-x}).$$

14.8.8 Aufgabe 8

Finde eine Stammfunktion zu $f(x) = x^2 \sqrt{x^3 + 2}$.

Lösung

Es gilt

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 2} \, dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 \sqrt{x^3 + 2} \, dx.$$

Nach der Substitutionsregel folgt nun mit $u = x^3 + 2$ und $u' = 3x^2$ gerade

$$F(x) = \frac{1}{3} \int 3x^2 \sqrt{x^3 + 2} \, dx = \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 2)^3}.$$

14.8.9 Aufgabe 9

Finde eine Stammfunktion zu $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Lösung

Es gilt

$$\int \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \, dx = 2 \int \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \, dx.$$

Nach der Substitutionsregel folgt nun mit $u = \frac{1}{2}x$ und $u' = \frac{1}{2}$ gerade

$$\begin{aligned} F(x) &= 2 \int \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \, dx \\ &= 2 \int \sin(u) \, du = -2 \cos(u) = -2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right). \end{aligned}$$

14.8.10 Aufgabe 10

Finde eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}$.

Lösung

Es gilt

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{4x^2 + 13x - 9}{x(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}$$

und man erhält durch Partialbruchzerlegung (siehe 6.2 auf Seite 43) gerade

$$A = 3, \quad B = -1 \quad \text{und} \quad C = 2.$$

Es ergeben sich nun jeweils die Ableitung vom Nenner im Zähler und somit folgt

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} \, dx = \int \frac{3}{x} - \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-1} \, dx \\ &= \int \frac{3}{x} \, dx - \int \frac{1}{x+3} \, dx + \int \frac{2}{x-1} \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+3} dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx \\
&= 3 \log(x) - \log(x+3) + 2 \log(x-1) \\
&= \log(x^3) - \log(x+3) + \log((x-1)^2) = \log\left(\frac{x^3(x-1)^2}{x+3}\right).
\end{aligned}$$

14.8.11 Aufgabe 11

Finde eine Stammfunktion zu $f(x) = e^x \cos(e^x)$.

Lösung

Nach der Substitutionsregel folgt mit $u = u' = e^x$ gerade

$$F(x) = \int e^x \cos(e^x) dx = \int \cos(u) du = \sin(u) = \sin(e^x).$$

14.8.12 Aufgabe 12

Finde eine Stammfunktion zu $f(x) = \tan(x)$.

Lösung

Es gilt

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx.$$

Somit steht im Zähler nun die Ableitung vom Nenner und es folgt

$$F(x) = - \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \log(\cos(x)).$$

14.8.13 Aufgabe 13

Finde eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x)}$.

Lösung

Es folgt durch $\int \tan(x) dx = - \log(\cos(x))$ gerade

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx + \int 1 dx \\
&= \int \tan(x) dx + x = x - \log(\cos(x)).
\end{aligned}$$

15 Taylorreihen

In diesem Kapitel geht es darum eine gegebene Funktion durch eine Potenzreihe darzustellen. Dabei muss untersucht werden, wo die gefundene Reihe überall konvergent ist.

Die Darstellung einer Funktion in ihrer Potenzreihe hat den großen Vorteil, dass man summandenweise differenzieren und integrieren kann und somit auch zum Beispiel die Stammfunktion einer komplizierten Funktion finden kann.

15.1 Höhere Ableitungen

15.1.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}$.

Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ***n-mal stetig differenzierbar***, wenn sie n -mal differenzierbar ist und wenn die n -te Ableitung stetig ist. Es bezeichnet

$$\mathcal{C}^n(M)$$

die Menge aller n -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf M . $\mathcal{C}^n(M)$ ist dann ein Untervektorraum vom Raum aller Funktionen auf M .

Für $n = 0$ gilt stets $f^{(0)} = f$.

Weiter bezeichnet

$$\mathcal{C}^\infty(M) := \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^n(M)$$

die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf M . Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ heißt dann auch ***glatt***.

15.1.2 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{R}$ und seien $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ zwei n -mal differenzierbare Funktionen mit $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $(f \cdot g)$ ebenfalls n -mal differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Beweisskizze

Der Beweis verläuft ganz analog zum Beweis der binomischen Formel.

15.2 Definitionen und Sätze

15.2.1 Taylorpolynom

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar, dann heißt

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

das n -te **Taylorpolynom** von f bei a .

Erklärung

Das Taylorpolynom

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

nähert sich der Funktion $f(x)$ in einer Umgebung von a beliebig nahe an. Dabei gilt:

$p_0(x)$ ist die Parallele zur x -Achse durch den Punkt $(a, f(a))$,
 $p_1(x)$ ist die Tangente an f durch den Punkt $(a, f(a))$,
 $p_2(x)$ ist die Näherungsparabel, die f bei dem Punkt $(a, f(a))$ tangiert,
 $\vdots$

15.2.2 Restglied

Das so genannte **Restglied** wird definiert durch

$$R_n(x) := f(x) - p_n(x).$$

15.2.3 Satz von Taylor

Ist f n -mal differenzierbar, so gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + R_n(x) \\ &= f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(x-a)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \end{aligned}$$

wobei sich das Restglied $R_n(x)$ auf folgende Weisen darstellen lässt:

Lagrange Restglied

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit ξ zwischen a und x .

Schlömilchsches Restglied

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{q \cdot n!}(x-a)^q(x-\xi)^{n-q+1}$$

mit ξ zwischen a und x und einem bleibigen $q \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq q \leq n+1$.

Cauchysches Restglied

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)(x-\xi)^n$$

mit ξ zwischen a und x .

15.2.4 Taylorreihe

Ist f unendlich oft differenzierbar, dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

die **Taylorreihe** von f bei a .

Es gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

15.2.5 Potenzreihen und Taylorentwicklung

Kann eine Funktion $f(x)$ durch eine derartige Reihe dargestellt werden, so ist diese Reihe die **Potenzreihe** der Funktion $f(x)$.

Umgekehrt sollte zur Taylorreihenentwicklung nach Möglichkeit auf eine bekannte Potenzreihe zurückgegriffen werden (siehe Seite 308).

15.3 Erklärendes Beispiel

Sei $f(x) = xe^x$. Untersuche, ob f durch ihre Taylorreihe bei $a = 0$ dargestellt werden kann.

Behauptung

f lässt sich auf ganz $\mathbb{R}$ durch ihre Taylorreihe

$$f(x) = xe^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n$$

darstellen.

Beweis

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^x && \rightarrow && f(0) &= 0 \\ f'(x) &= (1+x)e^x && \rightarrow && f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= (2+x)e^x && \rightarrow && f''(0) &= 2 \\ f^{(3)}(x) &= (3+x)e^x && \rightarrow && f^{(3)}(0) &= 3 \\ f^{(4)}(x) &= (4+x)e^x && \rightarrow && f^{(4)}(0) &= 4 \\ &\vdots && && & \\ f^{(n)}(x) &= (n+x)e^x && \rightarrow && f^{(n)}(0) &= n. \end{aligned}$$

Demnach ist das Taylorpolynom von $f(x)$ bei $a = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \dots + \frac{n}{n!}x^n + R_n(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{k!}x^k + R_n(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!}x^k + R_n(x). \end{aligned}$$

Nach dem Lagrange Restglied gilt

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(n+1+\xi)e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Zu zeigen ist nun noch, dass $R_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen 0 konvergiert:

$$|R_n(x)| = \left| xe^\xi \frac{x^n}{n!} + \xi e^\xi \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq a \cdot \frac{x^n}{n!} + b \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Damach kann f auf ganz $\mathbb{R}$ durch ihre Taylorreihe dargestellt werden. $\square$

15.4 Konvergenzradien

15.4.1 Definition

Hat man eine Potenzreihe in der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - a)^k$$

gegeben, so gibt es folgende Möglichkeiten für den Konvergenzbereich:

- (1) Die Reihe konvergiert nur im Entwicklungspunkt a .
- (2) Die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (3) Die Reihe konvergiert auf dem Intervall $]a - r, a + r[$ und eventuell in einem oder in beiden Randpunkten.

Dabei heißt r der **Konvergenzradius** der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - a)^k$. Es gilt

$$r = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}.$$

Bei $r = 0$ konvergiert die Potenzreihe demnach nur im Entwicklungspunkt a und bei $r = \infty$ auf ganz $\mathbb{R}$.

15.4.2 Beispiele

(1) Sei

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

die Potenzreihe aus dem erklärenden Beispiel. Dann gilt

$$r = \frac{1}{\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|} = \frac{1}{\left| \frac{(k-1)!}{k!} \right|} = \frac{1}{\frac{1}{k}} = k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty.$$

Also ist die gegebene Potenzreihe auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent.

(2) Sei

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k.$$

Dann gilt

$$r = \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

demnach ist die gegebene Potenzreihe nur in ihrem Entwicklungspunkt 0 konvergent.

(3) Sei

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k.$$

Dann gilt

$$r = \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt[k]{k!}}} = \frac{\sqrt[k]{k!}}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

(siehe Seite 308), also ist die gegebene Potenzreihe auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent.

(4) Sei

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 5^k (x-2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x-2)^k.$$

Dann gilt

$$r = \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k^2 5^k}} = \frac{1}{5 \cdot \left(\sqrt[k]{k}\right)^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{5},$$

demnach ist die gegebene Potenzreihe schon einmal auf $\left] \frac{9}{5}, \frac{11}{5} \right[$ konvergent und es müssen nur noch die beiden Randpunkte untersucht werden. Es ergeben sich die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 5^k \left(-\frac{1}{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 5^k \left(\frac{1}{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2,$$

die beide divergent sind. Daher ist der gesuchte Konvergenzbereich genau $\left] \frac{9}{5}, \frac{11}{5} \right[$.

15.5 Aufgaben

15.5.1 Aufgabe 1

Sei $f(x) = e^x$. Berechne die Taylorreihe bei $a = 0$.

Lösung

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(n)}(x) = e^x$, also $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Da $f(x)$ demnach unendlich oft differenzierbar ist, folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Die Taylorreihe von $f(x) = e^x$ ist also $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

15.5.2 Aufgabe 2

Sei $f(x) = \log(x)$. Finde das Taylorpolynom von f bei $a = 1$ und untersuche, ob f durch ihre Taylorreihe bei $a = 0$ dargestellt werden kann.

Lösung

Es gilt

$$\begin{array}{llll}
 f(x) & = & \log(x) & \rightarrow & f(1) & = & 0 \\
 f'(x) & = & \frac{1}{x} & \rightarrow & f'(1) & = & 1 \\
 f''(x) & = & -\frac{1}{x^2} & \rightarrow & f''(1) & = & (-1) \\
 f^{(3)}(x) & = & \frac{2}{x^3} & \rightarrow & f^{(3)}(1) & = & 2 \\
 f^{(4)}(x) & = & -\frac{6}{x^4} & \rightarrow & f^{(4)}(1) & = & (-6) \\
 & \vdots & & & & & \\
 f^{(n)}(x) & = & (-1)^{n+1}(n-1)! \frac{1}{x^n} & \rightarrow & f^{(n)}(1) & = & (-1)^{n+1}(n-1)! .
 \end{array}$$

Demnach ist das Taylorpolynom von $f(x)$ bei $a = 1$ für ein gerades n

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \dots - \frac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n + R_n(x) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k + R_n(x).
 \end{aligned}$$

Um festzustellen, wann f durch ihre Taylorreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$$

dargestellt werden kann, muss untersucht werden für welche $x \in \mathbb{R}$ ein Restglied gegen 0 konvergiert.

Mit dem Lagrange Restglied

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-1)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)} \frac{1}{\xi^{n+1}} (x-1)^{n+1}$$

stellt man fest, dass für alle $x \in [1, 2]$ das Restglied gegen 0 konvergiert:

$$R_n(x) \leq \frac{1}{n} (x-1)^{n+1} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Mit dem Cauchyschen Restglied

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-1)(x-\xi)^n = (-1)^{n+2} \frac{x-1}{\xi} \left(\frac{x}{\xi} - 1\right)^n$$

stellt man fest, dass für alle $x \in]0, 1[$ das Restglied gegen 0 konvergiert:

$$R_n(x) = (-1)^{n+2} \frac{x-1}{\xi} \left(\frac{x}{\xi} - 1 \right)^n \leq \frac{x-1}{x} |x-1|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Demnach gilt für alle $0 < x \leq 2$

$$f(x) = \log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n.$$

Mehrdimensionale Analysis

16 Normierte Räume

16.1 Definitionen und Sätze

16.1.1 Definition

Sei E ein Vektorraum über einem Körper K .

Eine Abbildung

$$\| \cdot \| : E \rightarrow K$$

heißt **Norm** auf E , wenn für alle $a, b \in E$ und $\lambda \in K$ gilt:

$$\textbf{(NOR1)} \quad \|a\| \geq 0$$

$$\textbf{(NOR2)} \quad \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$\textbf{(NOR3)} \quad \|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$$

$$\textbf{(NOR4)} \quad \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

$(E, \| \cdot \|)$ heißt dann **normierter Raum**.

Bemerkung

Die Definition einer Norm wurde bereits in 12.3.1 auf Seite 108 eingeführt und wurde an dieser Stelle nur wiederholt.

16.1.2 Standardnormen

Wichtige Standardnormen auf $\mathbb{R}^n$ mit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sind:

$\ x\ _1$	$= x_1 + \dots + x_n $	1-Norm
$\ x\ _2$	$= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	2-Norm, <i>euklidische Norm</i>
$\ x\ _p$	$= \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n x_i^p}$	p-Norm
$\ x\ _\infty$	$= \max \left\{ x_i \mid i = 1, \dots, n \right\}$	<i>Supremumsnorm</i>

16.1.3 Definition und Satz

Sei E ein n dimensionaler Vektorraum, zum Beispiel $E = \mathbb{R}^n$, und sei $a \in E$.

$$B_\varepsilon^{(k)}(a) := \left\{ x \in E \mid \|x - a\|_k < \varepsilon \right\}$$

heißt ε -**Ball** um a bezüglich einer Norm $\|\cdot\|_k$.

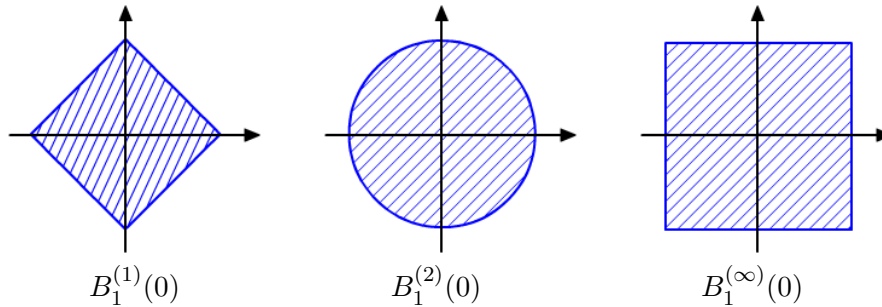


Abbildung 17

Es gilt für alle $x, a \in E$:

$$(1) \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

$$(2) \quad B_\varepsilon^{(1)}(a) \subset B_\varepsilon^{(2)}(a) \subset B_\varepsilon^{(\infty)}(a) \subset B_{n\varepsilon}^{(1)}(a).$$

Beweis

Die Behauptungen werden nur für $E = \mathbb{R}^n$ gezeigt.

Sei also $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \|x\|_2$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und somit folgt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$. Weiter gilt

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 = \|x\|_1^2,$$

also auch $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Gemeinsam mit

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = n\|x\|_\infty$$

folgt nun gerade die erste Behauptung. Die zweite Aussage folgt direkt aus der ersten. $\square$

16.1.4 Operatornorm

Seien E, F normierte Räume und sei

$$\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F) = \{f : E \rightarrow F \mid f \text{ ist linear}\}.$$

Die **Operatornorm** wird auf dem Vektorraum $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ definiert durch

$$\|\varphi\| := \sup\{\varphi(u) \mid \|u\| \leq 1\}.$$

16.1.5 Definition

Sei E ein Vektorraum und seien $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ zwei Normen auf E .

Die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ heißen **äquivalent**, wenn gilt:

$$\exists k, l > 0 \forall a \in E : \|a\|' \leq l\|a\|, \|a\| \leq k\|a\|'.$$

16.1.6 Satz 1

Auf einem endlich dimensionalen reellen Vektorraum sind alle Normen äquivalent, das heißt sie erzeugen dieselbe Topologie (siehe Seite 163).

Beweisskizze

Man zeigt, dass jede beliebige Norm äquivalent ist zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$. Daraus folgt dann die Behauptung.

16.1.7 Definition

Sei E ein Vektorraum und sei $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

p heißt **sublineares Funktional**, wenn gilt:

- (1) für alle $a, b \in E$ gilt $p(a + b) \leq p(a) + p(b)$
- (2) für alle $a \in E$ und alle $\lambda > 0$ gilt $p(\lambda a) = \lambda p(a)$

16.1.8 Satz 2

Jede Norm und jede lineare Abbildung ist ein sublineares Funktional.

16.2 Hilberträume

16.2.1 Definition

Sei E ein Vektorraum über einem Körper K .

Eine Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow K$$

heißt **Skalarprodukt** oder **inneres Produkt** auf E , wenn für alle $a, b, c \in E$ und alle $\lambda, \mu \in K$ gilt:

(SKP1) $(a, a) > 0$ falls $a \neq 0$

(SKP2) $(\lambda a + \mu b, c) = \lambda(a, c) + \mu(b, c)$

(SKP3) $(a, b) = (b, a)$

$(E, (\ , \))$ heißt dann **prähilbert Raum**.

16.2.2 Cauchy-Schwarz Ungleichung

Sei $(\ , \)$ ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum E .

Dann gilt für alle $a, b \in E$ gerade

$$|(a, b)| \leq \sqrt{(a, a) \cdot (b, b)}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn a und b linear abhängig sind.

16.2.3 Definition und Satz

Sei $(E, (\ , \))$ ein prähilbert Raum.

Dann wird durch

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

eine Norm definiert.

$(E, (\ , \))$ heißt **Hilbertraum**, wenn er bezüglich dieser Norm einen Banachraum bildet, wenn er also vollständig ist.

16.2.4 Beispiel

Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ bildet mit der durch das Standardskalarprodukt

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

gegebenen Norm einen Hilbertraum.

16.2.5 Satz 1

Eine Norm wird genau dann von einem Skalarprodukt erzeugt, wenn die **Parallelogramm-Regel**

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

erfüllt wird.

16.3 Aufgaben

16.3.1 Aufgabe 1

Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ gilt.

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned}\|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \\ &\leq \sqrt{n \cdot \max(x_1^2, \dots, x_n^2)} \\ &= \sqrt{n} \sqrt{\max(x_1^2, \dots, x_n^2)} \\ &= \sqrt{n} \max(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{n}\|x\|_\infty.\end{aligned}$$

16.3.2 Aufgabe 2

Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$ gilt.

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ &= \sum_{i=1}^n (|x_i| \cdot 1) \\ &\leq \|x\|_2 \cdot \|(1, \dots, 1)\|_2 \\ &= \|x\|_2 \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2} = \sqrt{n}\|x\|_2.\end{aligned}$$

Dabei folgt die Ungleichung gerade aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung.

17 Topologische Räume

17.1 Definitionen

17.1.1 Definition

Sei M eine nicht leere Menge.

Eine Teilmenge $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(M)$ der Potenzmenge von M heißt **Topologie**, wenn gilt:

(TOP1) $M, \emptyset \in \mathcal{T}$.

(TOP2) Mit $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ ist auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

(TOP3) Mit $U_i \in \mathcal{T}$ für $i = 1, \dots, n$ ist auch $U_1 \cup \dots \cup U_n \in \mathcal{T}$.

$(M, \mathcal{T})$ heißt dann **topologischer Raum**.

Oft kürzt man diese Schreibweise $(M, \mathcal{T})$ ab und schreibt einfach nur M .

17.1.2 Beispiele

Sei M eine beliebige nicht leere Menge.

(1) $\mathcal{T} = \{\emptyset, M\}$ ist die **chaotische Topologie**.

(2) $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$ ist die **diskrete Topologie**.

(3)

$$\mathcal{T} = \{U \subset M \mid \exists \varepsilon > 0 \exists x \in M : B_\varepsilon(x) = U\}$$

ist die **natürliche Topologie**, also die von einer Norm gelieferte Topologie.

17.1.3 Satz 1

Auf $\mathbb{R}^n$ liefern $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ die natürliche Topologie.

17.1.4 Definition

Seien $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ zwei Topologien auf M .

$\mathcal{S}$ heißt **feiner** als $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ heißt **gröber** als $\mathcal{S}$, wenn $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ gilt.

17.1.5 Spurtopologie

Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $N \subset M$ eine nicht leere Teilmenge.

Dann ist auch $(N, \mathcal{T}_N)$ mit

$$\mathcal{T}_N = \{U \cap N \mid U \in \mathcal{T}\}$$

ein topologischer Raum und heißt die **Spurtopologie** auf N .

17.1.6 Bemerkung

Die Topologie beschreibt die "Geometrie der Lage" von unterschiedlichen Objekten. Sie vergleicht Objekte, die gedehnt, verdreht oder deformiert wurden, interessiert sich jedoch anders als die Geometrie nicht für Längen und Winkel.

Um sich den Begriff der Topologie zu veranschaulichen, kann man sich ein Objekt aus einem Gummituch vorstellen. Alle Objekte, die aus diesem Gummituch durch spannen, ziehen und verdrehen entstehen, sind topologisch nicht zu unterscheiden.

Demnach ist ein Kreis beispielsweise **topologisch äquivalent** zu einer Ellipse, eine Kugel ist äquivalent zu einem Ellipsoid und sogar eine Tasse mit einem Henkel ist topologisch äquivalent zu einem Doughnut.

Die Linie einer Acht ist jedoch nicht äquivalent zu einem Kreis – wie man die Kreislinie auch deformiert, niemals erhält man eine Acht – auch ein Gummituch müsste zerrissen und wieder neu verknüpft werden.

(Eine genaue Definition von topologisch äquivalent siehe 19.1.4 auf Seite 181.)

17.2 Von der Norm zur Topologie

(Siehe dazu Kapitel metrische Räume auf Seite 76.)

$$\text{Norm} \quad d(x,y) := \|x-y\| \quad \text{Metrik} \quad \xRightarrow{B_\varepsilon(a)} \quad \text{Topologie}$$

Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf einer Menge M . Definiert man $d(x, y) := \|x - y\|$, so wird aus der Norm eine Metrik. Die Teilmengen von M , die durch den Ball und die Metrik $B_\varepsilon(x) = \{a \in M \mid d(a, x) < \varepsilon\}$ definiert werden, bilden dann die natürliche Topologie auf M .

18 Topologie

Die folgenden Definitionen, Begriffe und Beispiele beziehen sich teilweise nur auf metrische- oder nur auf topologische Räume, sind aber im Allgemeinen durch kleine Änderungen für beide Räume gültig.

Ebenso ist auch darauf zu achten, dass sich einige Sätze nur auf $\mathbb{R}$ beziehen, andere hingegen auf jeden endlich dimensional reellen Vektorraum E .

18.1 Offene Mengen

18.1.1 Definition

Sei (M, d) ein metrischer Raum.

$U \subset M$ heißt **offen**, wenn es zu jedem $a \in U$ auch ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass gilt:

$$B_\varepsilon(a) = \{x \in M \mid d(a, x) < \varepsilon\} \subset U.$$

Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

$U \subset M$ heißt **offen**, wenn $U \in \mathcal{T}$ gilt.

18.1.2 Beispiele

(1) M und $\emptyset$ sind offen in M .

(2) $]a, b[\subset \mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}$.

18.1.3 Satz 1

Sei M ein topologischer bzw. metrischer Raum, sei I eine endliche Indexmenge und seien U, V sowie U_i beliebige offene Mengen in M .

Dann gilt:

(1) $U \cap V$ ist offen in M .

(2) $\bigcup_{i \in I} U_i$ ist offen in M .

Beweis

Die Behauptung wird nur für einen metrischen Raum gezeigt, für topologische Räume folgt dieser Satz aus der Definition einer Topologie.

Sei zunächst $x \in U \cap V$ beliebig. Dann gilt $x \in U$ und $x \in V$ und demnach gibt es ein $\varepsilon' > 0$ mit $B_{\varepsilon'}(x) \subset U$ sowie ein $\varepsilon'' > 0$ mit $B_{\varepsilon''}(x) \subset V$. Sei nun $\varepsilon = \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}$, dann gilt $B_{\varepsilon}(x) \subset U \cap V$ und dies zeigt gerade die erste Behauptung.

Sei nun $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ beliebig. Dann gilt auch $x \in U_i$ für mindestens ein $i \in I$. Demnach gibt es dann ein $\varepsilon > 0$ mit $B_{\varepsilon}(x) \subset U_i$ und es folgt dann auch $B_{\varepsilon}(x) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, was die zweite Behauptung zeigt. $\square$

18.1.4 Satz 2

Seien M, N topologische bzw. metrische Räume.

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist genau dann stetig, wenn zu jeder offenen Menge $V \subset N$ auch $f^{-1}(V)$ offen in M ist.

18.2 Abgeschlossene Mengen**18.2.1 Definition**

Sei M ein topologischer bzw. metrischer Raum.

$A \subset M$ heißt **abgeschlossen** in M , wenn $M \setminus A$ offen ist.

18.2.2 Beispiele

(1) M und $\emptyset$ sind abgeschlossen in M .

(2) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

18.2.3 Folgenkriterium

Sei M ein topologischer bzw. metrischer Raum.

$A \subset M$ ist abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Cauchyfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A auch in A liegt.

18.2.4 Beispiel

Sei $A =]0, 1]$ und sei $a_n = \frac{1}{n}$.

Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A , da für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $a_n \in A$ gilt.

Da der Grenzwert von $(a_n) = 0$ aber nicht in A liegt, ist A nicht abgeschlossen.

18.2.5 Satz 1

Sei M ein topologischer bzw. metrischer Raum, sei I eine endliche Indexmenge und seien A, B sowie A_i beliebige abgeschlossene Mengen in M .

Dann gilt:

- (1) $A \cup B$ ist abgeschlossen in M .
- (2) $\bigcap_{i \in I} A_i$ ist abgeschlossen in M .

Beweisskizze

Die Behauptung folgt aus der Komplementbildung und dem entsprechenden Satz für offene Mengen.

18.2.6 Satz 2

Sei M ein metrischer Raum.

$A \subset M$ ist genau dann abgeschlossen in M , wenn alle Häufungspunkte von A auch in A liegen.

(Siehe Häufungspunkte auf Seite 102.)

18.2.7 Satz 3

Seien M, N topologische bzw. metrischer Räume.

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist genau dann stetig, wenn zu jeder abgeschlossenen Menge $V \subset N$ auch $f^{-1}(V)$ abgeschlossen in M ist.

18.3 Beschränkte Mengen

18.3.1 Definition

Sei E ein endlich dimensionaler Vektorraum.

$M \subset E$ heißt **beschränkt**, wenn es zu jedem $a \in M$ ein $c > 0$ gibt, so dass $M \subset B_c(a)$ gilt.

18.3.2 Satz 1

Seien E, F endlich dimensionale Vektorräume und sei $f : E \rightarrow F$ linear.

Dann ist $M \subset E$ genau dann beschränkt, wenn $f(M)$ beschränkt ist.

18.3.3 Satz 2

Die Menge

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$ ist beschränkt.

18.4 Das Innere und der Abschluß

18.4.1 Definition

Sei M ein topologischer bzw. metrischer Raum und sei $a \in M$.

$U \subset M$ heißt **Umgebung** von a in M , wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:

- (1) Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subset U$.
- (2) Es gibt eine offene Menge $V \subset M$ mit $a \in V$ und $V \subset U$.

Eine Umgebung von a in M ist also eine offene Teilmenge von M , die den Punkt a enthält.

18.4.2 Definition und Satz

Sei M ein topologischer bzw. metrischer Raum und sei $A \subset M$ beliebig.

A° heißt das **Innere** von A , wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:

- (1) A° ist die größte offene Menge in A .
- (2) Es gilt $A^\circ = \{x \in M \mid A \text{ ist eine Umgebung von } x\}$.

$\overline{A}$ heißt der **Abschluß** von A , wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:

- (1) $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge in A .
- (2) Es gilt $\overline{A} = \{x \in M \mid \text{für alle Umgebungen } U \text{ von } x \text{ gilt } U \cap A \neq \emptyset\}$.

Bemerkung

Es gilt

$$\overline{A} = M \setminus (M \setminus A)^\circ.$$

18.5 Hausdorffscher Raum

18.5.1 Definitionen

Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

M heißt **Hausdorff**, wenn es zu allen $a, b \in M$ mit $a \neq b$ zwei Teilmengen $U, V \subset M$ gibt, so dass gilt:

- (1) U ist eine Umgebung von a
- (2) V ist eine Umgebung von b
- (3) $U \cap V = \emptyset$

Die Menge M und die dazugehörige Hausdorff $(M, \mathcal{T})$ heißt dann **Hausdorffscher Raum**.

18.5.2 Satz 1

Jede von einer Metrik gelieferte Topologie $\mathcal{T}$ ist eine Hausdorff.

Beweis

Seien $a, b \in M$, sei $a \neq b$ und sei $d(a, b) = \varepsilon > 0$. Weiter seien

$$U = B_{\varepsilon/2}(a) \quad \text{und} \quad V = B_{\varepsilon/2}(b).$$

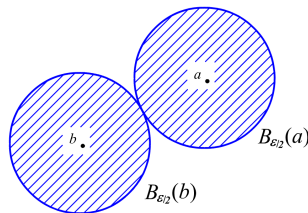


Abbildung 18

Mit diesen beiden Umgebungen gilt nun $a \in U$, $b \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. $\square$

18.5.3 Satz 2

Sind M, N Hausdorff, dann ist auch $M \times N$ Hausdorff.

18.6 Zusammenhängende Mengen

18.6.1 Definition

Sei M ein topologischer bzw. metrischer Raum.

$Z \subset M$ heißt **zusammenhängend**, wenn für alle offenen Mengen $U, V \subset M$ mit

$$Z \subset (U \cup V) \quad \text{und} \quad Z \cap U \cap V = \emptyset$$

gilt:

$$Z \subset U \quad \text{oder} \quad Z \subset V$$

18.6.2 Beispiele

(1) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend.

(2) $]a, b[\subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend.

18.6.3 Satz 1

Sei $Z \subset \mathbb{R}$.

Dann ist Z genau dann zusammenhängend, wenn Z ein Intervall ist.

18.6.4 Satz 2

Seien M, N topologische bzw. metrische Räume, sei $f : M \rightarrow N$ stetig und sei $Z \subset M$ zusammenhängend.

Dann ist auch $f(Z)$ zusammenhängend.

Beweis

Siehe 27.7.1 auf Seite 299.

18.6.5 Satz 3

Seien M, N metrische Räume und seien $Z_1 \subset M$ sowie $Z_2 \subset N$ zusammenhängend.

Dann ist auch $Z_1 \times Z_2 \subset M \times N$ zusammenhängend.

18.6.6 Definition

Sei M ein topologischer bzw. metrischer Raum.

$Z \subset M$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn Z zusammenhängend ist und sich jede geschlossene Kurve in Z zu einem Punkt zusammenziehen lässt.

Eine einfach zusammenhängende Menge hat also keine "Löcher".

Beispiel

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

18.6.7 Satz 4

Es gilt:

$$Z \text{ ist einfach zusammenhängend} \Rightarrow Z \text{ ist zusammenhängend}$$

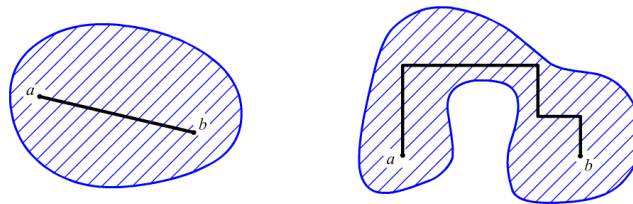
18.7 Wegzusammenhängende Mengen

Abbildung 19

18.7.1 Definition

Ein **Weg** von a nach b in einem metrischen Raum M ist eine stetige Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow M$$

mit $f(0) = a$ und $f(1) = b$.

18.7.2 Definition

Sei M ein metrischer Raum.

$Z \subset M$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu allen $a, b \in Z$ einen Weg von a nach b in Z gibt.

18.7.3 Satz 1

Sei M ein metrischer Raum und sei $Z \subset M$. Dann gilt:

$$Z \text{ ist wegzusammenhängend} \Rightarrow Z \text{ ist zusammenhängend}$$

18.7.4 Satz 2

Sei M ein metrischer Raum und sei $Z \subset M$ offen. Dann gilt:

$$Z \text{ ist wegzusammenhängend} \Leftrightarrow Z \text{ ist zusammenhängend}$$

18.7.5 Beispiel 1

Die nicht offene Menge

$$M = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \left\{ \left(x, \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \mid x > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

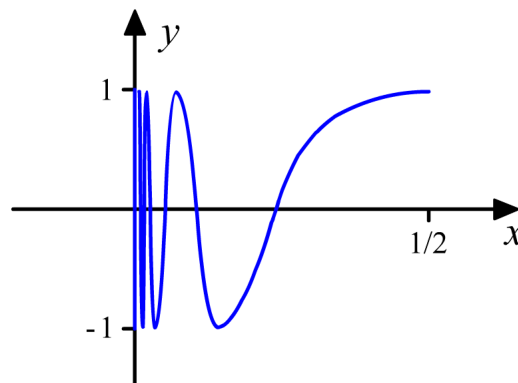


Abbildung 20

18.7.6 Beispiel 2

Zeige, dass $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ wegzusammenhängend ist.

Lösung

Seien $a, b \in A$ beliebig und sei

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (1-t) \cdot a + t \cdot b \end{aligned}$$

ein Weg von a nach b .

Es ist also zu zeigen, dass dieser Weg in A liegt, es muss also für alle $t \in [0, 1]$ gerade $\|f(t)\| \leq 1$ gelten:

$$\begin{aligned} \|f(t)\| &= \|(1-t)a + tb\| \\ &\stackrel{\text{DUG}}{\leq} \|(1-t)a\| + \|tb\| \\ &= (1-t)\|a\| + t\|b\| \\ &\leq (1-t) + t \\ &= 1 \end{aligned}$$

18.8 Kompakte Mengen

18.8.1 Definitionen

Sei M ein topologischer Raum und sei $K \subset M$.

$\mathcal{U}$ heißt *offene Überdeckung* von K , wenn $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ und $K \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ gilt.

$\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ heißt *Teilüberdeckung* von K , wenn $K \subset \bigcup_{V \in \mathcal{W}} V$ gilt und $\mathcal{W}$ eine endliche Menge ist.

$K \subset M$ heißt *kompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung von K auch eine endliche Teilüberdeckung von K gibt.

18.8.2 Beispiele

(1) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.

(2) Endliche Mengen sind kompakt.

18.8.3 Satz 1

Die Vereinigung von endlich vielen kompakten Mengen ist wieder kompakt.

18.8.4 Satz 2

$K \subset \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn K zusammenhängend und abgeschlossen ist.

18.8.5 Satz 3

Sei M ein topologischer bzw. metrischer Raum und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.

Ist $K \subset M$ kompakt, dann ist $f(K)$ beschränkt und abgeschlossen.

18.8.6 Satz 4

Sei M ein metrischer Raum und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.

Ist $K \subset M$ kompakt, dann ist f gleichmäßig stetig auf K .

Beweis

Siehe 27.7.2 auf Seite 299.

18.8.7 Satz 5

Seien M, N metrische Räume.

Sind $K_1 \subset M$ sowie $K_2 \subset N$ kompakt, dann ist auch $K_1 \times K_2 \subset M \times N$ kompakt.

18.8.8 Satz 6

Sei M ein topologischer bzw. metrischer Raum.

Ist $K \subset M$ kompakt, dann ist K abgeschlossen in M .

Beweis

Siehe 27.7.3 auf Seite 300.

18.8.9 Satz 7

Sei M ein topologischer bzw. metrischer Raum.

Ist $K \subset M$ kompakt und ist $A \subset K$ abgeschlossen in M , dann ist auch A kompakt.

Beweis

Siehe 27.7.4 auf Seite 300.

18.8.10 Satz von Heine-Borel

Sei E ein endlich dimensionaler Vektorraum und sei $K \subset E$.

K ist genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis

Siehe 27.7.5 auf Seite 301.

18.8.11 Satz 8

Seien M, N topologische bzw. metrische Räume, sei $f : M \rightarrow N$ stetig und sei $K \subset M$ kompakt.

Dann ist auch $f(K)$ kompakt.

Beweis

Siehe 27.7.6 auf Seite 301.

18.8.12 Bemerkung

Es ist darauf zu achten, dass bei offenen bzw. abgeschlossenen Mengen gerade die Urbilder unter einer stetigen Abbildung wieder offen bzw. abgeschlossen sind.

Bei zusammenhängenden bzw. kompakten Mengen sind gerade die Bilder unter einer stetigen Abbildung wieder zusammenhängend bzw. kompakt.

Siehe dazu 18.1.4, 18.2.7, 18.6.4 und 18.8.11.

18.8.13 Beispiel

Seien

$$\begin{aligned} S^0 &= \{-1, 1\} \\ S^1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \\ &\vdots \\ S^{n-1} &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \end{aligned}$$

die $n - 1$ dimensionalen Sphären.

Dann ist zum Beispiel $S_1 \times S_1$ abgeschlossen und beschränkt, also auch kompakt.

18.9 Aufgaben**18.9.1 Aufgabe 1**

Sei A zusammenhängend und sei

$$A \subset B \subset \overline{A}.$$

Zeige, dass dann auch B zusammenhängend ist.

Lösung

Annahme: B ist nicht zusammenhängend.

Dann gibt es zwei nicht leere offene Mengen M und N , so dass gilt:

$$B \cap M \neq \emptyset \quad \text{und} \quad B \cap N \neq \emptyset \quad \text{und} \quad B \subset M \cup N \quad \text{und} \quad B \cap M \cap N = \emptyset$$

Dann gibt es aber auch ein $b_1 \in \overline{A}$ und ein $b_2 \in \overline{A}$, so dass M eine Umgebung von b_1 und N eine Umgebung von b_2 ist.

Also gibt es auch ein $a_1 \in A \cap M$ und ein $a_2 \in A \cap N$ und es gilt $A \cap M \neq \emptyset$ und $A \cap N \neq \emptyset$.

Somit wäre auch A nicht zusammenhängend und man erhält einen Widerspruch.

18.9.2 Aufgabe 2

Sei M ein topologischer Raum, sei $K \subset M$ kompakt und sei $A \subset K$ eine in M abgeschlossene Menge.

Zeige, dass dann auch A kompakt ist.

Lösung

Sei $\mathcal{U}$ eine beliebige offene Überdeckung von A . Dann ist

$$\mathcal{U} \cup \{M \setminus A\}$$

eine offene Überdeckung von K . Da K kompakt ist, existiert dazu eine endliche Teilüberdeckung, das heißt es gibt $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit

$$K \subset \bigcup_{\nu=1}^n U_\nu \cup \{M \setminus A\}.$$

Dann ist aber auch

$$A \subset \bigcup_{\nu=1}^n U_\nu,$$

also ist $\{U_1, \dots, U_n\}$ auch eine endliche Teilüberdeckung von A .

Demnach ist A kompakt.

18.9.3 Aufgabe 3

Sei $M = \mathbb{R}$ und sei $K =]0, 1[\subset M$.

Zeige, dass K nicht kompakt ist.

Lösung

Sei $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $U_n =]\frac{1}{3n}, \frac{1}{n}[$, das heißt es gilt

$$U_1 =]\frac{1}{3}, 1[, \quad U_2 =]\frac{1}{6}, \frac{1}{2}[, \quad U_3 =]\frac{1}{9}, \frac{1}{3}[, \quad \dots$$

Dann ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von K .

Sei nun $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ beliebig, aber endlich. Dann gibt es ein maximales $m \in \mathbb{N}$ mit $U_m \in \mathcal{W}$.

Demnach ist $\mathcal{W}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$.

$$\bigcup_{V \in \mathcal{W}} V =]\frac{1}{3m}, 1[$$

ist aber keine Überdeckung von K .

Somit ist K nicht kompakt.

18.9.4 Aufgabe 4

Sei M ein topologischer Raum und seien $A, B \subset M$. Zeige, dass dann

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

gilt.

Lösung

Nach der DeMorganschen Regel folgt

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= M \setminus \left(M \setminus (A \cup B) \right)^\circ \\ &= M \setminus \left((M \setminus A) \cap (M \setminus B) \right)^\circ \\ &= M \setminus \left((M \setminus A)^\circ \cap (M \setminus B)^\circ \right) \\ &= M \setminus (M \setminus A)^\circ \cup M \setminus (M \setminus B)^\circ = \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

18.9.5 Aufgabe 5

Sei M ein topologischer Raum und seien $A, B \subset M$.

Konstruiere ein Beispiel, bei dem die Mengen

$$A \cap \overline{B}, \quad \overline{A} \cap B, \quad \overline{A \cap B}, \quad \overline{A} \cap \overline{B}$$

paarweise verschieden sind.

Lösungsbeispiel

Sei $M = \mathbb{R}$ und seien

$$\begin{aligned} A &=]0, 1[\cup]3, 4], \\ B &=]1, 2[\cup]3, 4[. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} A \cap \overline{B} &=]3, 4] \\ \overline{A} \cap B &= [3, 4[\\ \overline{A \cap B} &= [3, 4] \\ \overline{A} \cap \overline{B} &= [3, 4] \cup \{1\} \end{aligned}$$

18.9.6 Aufgabe 6

Bestimme den Abschluß der Menge

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right\}$$

im $\mathbb{R}^2$ unter jeder der Normen $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ und $\| \cdot \|_\infty$.

Lösung

Auf dem endlich dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ sind alle Normen äquivalent, daher ist es egal, welche Norm betrachtet wird.

Es ist leicht einsichtig, dass der Graph von

$$f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{für alle } x > 0$$

zum Abschluß von M gehört.

Es gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0,$$

daher bleibt noch der Punkt $(0,0)$ zu untersuchen.

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt aber

$$B_\varepsilon(0,0) \cup M \neq \emptyset,$$

daher gehört auch der Punkt $(0,0)$ zum Abschluß von M und es gilt

$$\overline{M} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right\}.$$

18.9.7 Aufgabe 7

Bestimme den Abschluß der Menge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y < -x^2\}$$

im $\mathbb{R}^2$ unter jeder der Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$.

Lösung

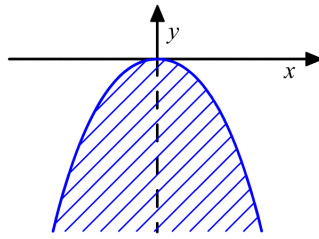
Auch hier gilt: auf dem endlich dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ sind alle Normen äquivalent, daher ist es egal, welche Norm betrachtet wird.

Sei $\varepsilon > 0$ und $y \leq x^2$ beliebig. Dann gilt

$$B_\varepsilon(x,y) \cup M \neq \emptyset,$$

da zwischen zwei unterschiedlichen reellen Zahlen stets eine rationale Zahl zu finden ist.

Es gilt also:



$$\overline{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, y \leq -x^2\}$$

Abbildung 21

18.9.8 Aufgabe 8

Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $N \subset M$ abgeschlossen.

Zeige, dass dann auch N vollständig ist.

Lösung

M ist vollständig heißt, dass jede Cauchyfolge in M konvergent ist. Genau das ist nun auch für N zu zeigen.

Wäre N nicht vollständig, dann gäbe es eine Cauchyfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die nicht konvergent ist. Da M aber vollständig ist und $N \subset M$, konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in M \setminus N$.

Demnach ist a ein Adhärenzpunkt von $N \setminus \{a\} = N$, also auch ein Häufungspunkt von N . Da N aber abgeschlossen ist, gilt auch $a \in N$. Demnach ist jede Cauchyfolge auch in N konvergent.

19 Stetige Abbildungen

Es seien M , N und P in diesem Kapitel stets topologische Räume.

19.1 Definitionen und Sätze

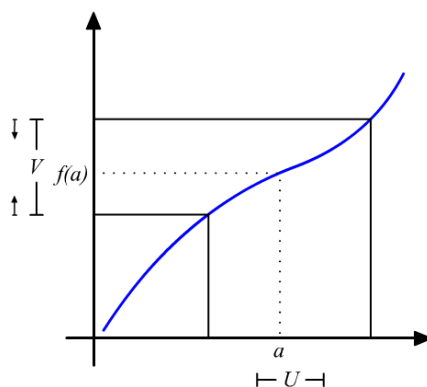


Abbildung 22

19.1.1 Definition

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **stetig** bei $a \in M$, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:

- (1) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.
- (2) Zu jeder Umgebung V von $f(a)$ gibt es eine Umgebung U von a , so dass $f(U) \subset V$ gilt.
- (3) Für alle Umgebungen V von $f(a)$ ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a .

f heißt **stetig**, wenn f bei jedem $a \in M$ stetig ist.

19.1.2 Definition

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **offen**, wenn zu allen offenen Mengen $U \subset M$ in M auch $f(U)$ offen in N ist.

19.1.3 Definition

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist ein **Homöomorphismus**, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:

- (1) f ist bijektiv, stetig und offen.
- (2) f und f^{-1} sind stetig.

19.1.4 Definition

Zwei Mengen M und N heißen **homöomorph** oder **topologisch äquivalent**, wenn es einen Homöomorphismus f von M nach N gibt.

19.1.5 Satz 1

Seien E, F zwei endlich dimensionale Vektorräume und sei $A : E \rightarrow F$ linear. Dann ist A unter der natürlichen Topologie stetig.

19.1.6 Satz 2

Sei M ein topologischer Raum sei E ein endlich dimensionaler Vektorraum und seien $f, g : M \rightarrow E$ sowie $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann sind auch $f + g$ und $h \cdot f$ stetig.

19.1.7 Satz 3

Seien E, F zwei endlich dimensionale Vektorräume und sei $A : E \rightarrow F$ surjektiv und linear.

Dann ist A offen.

19.2 Kartesisches Produkt**19.2.1 Definition**

Sei $f : M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow N_1 \times \dots \times N_m$ eine beliebige Abbildung.

$$\begin{aligned} pr_i \circ f : M_1 \times \dots \times M_n &\rightarrow N_i \\ (m_1, \dots, m_n) &\mapsto n_i \quad \text{für } i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

heißt die i -te **Projektion** oder die i -te **Projektionsfunktion** auf f .

19.2.2 Satz über stetige Abbildungen

Eine Abbildung

$$f : M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow N_1 \times \dots \times N_m$$

zwischen kartesischen Produkten von topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn die Projektionen $pr_i \circ f$ für alle $i = 1, \dots, m$ stetig sind.

Die Idee ist also zum Beispiel die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ so zu zerlegen, dass nur eindimensionale Funktionen betrachtet werden müssen, um eine Aussage über die Stetigkeit einer Abbildung zwischen mehrdimensionalen Räumen treffen zu können.

Beweisskizze

Betrachtet man zum Beispiel eine Abbildung

$$f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

so kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R} \\ \downarrow f_2 & \searrow f & \uparrow pr_1 \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{pr_2} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Es ist also egal, welchen Weg man von einer Menge zu einer anderen wählt, so lange man sich an die Pfeilrichtungen hält. Die Abbildung f ist also genau dann stetig, wenn f_1 und f_2 stetig sind.

Induktiv erhält man somit auch entsprechende Aussagen über höherdimensionale Abbildungen.

19.2.3 Beispiel 1

Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y). \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} pr_1 \circ f : (x, y) &\mapsto e^x \cos y && \text{ist stetig,} \\ pr_2 \circ f : (x, y) &\mapsto e^x \sin y && \text{ist stetig.} \end{aligned}$$

Somit ist f auf dem gesamten Definitionsbereich stetig.

19.2.4 Beispiel 2

Sei

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^5 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (a, b, c, d, e) &\mapsto (2a^2 + d, 2a^2 + e, b - c^3, 1/a). \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} pr_1 \circ g : (a, b, c, d, e) &\mapsto 2a^2 + d && \text{stetig auf ganz } \mathbb{R}^5, \\ pr_2 \circ g : (a, b, c, d, e) &\mapsto 2a^2 + e && \text{stetig auf ganz } \mathbb{R}^5, \\ pr_3 \circ g : (a, b, c, d, e) &\mapsto b - c^3 && \text{stetig auf ganz } \mathbb{R}^5, \\ pr_4 \circ g : (a, b, c, d, e) &\mapsto 1/a && \text{stetig auf } \{(a, \dots, e) \in \mathbb{R}^5 \mid a \neq 0\}. \end{aligned}$$

Somit ist auch g auf $\{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \mid a \neq 0\}$ stetig.

19.3 Stetige Fortsetzbarkeit

19.3.1 Definition

Eine stetige Abbildung $f : M \setminus \{a\} \rightarrow N$ heißt bei a **stetig fortsetzbar**, wenn es ein $f(a) \in N$ gibt, so dass f bei a stetig ist.

19.3.2 Satz 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine bei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ stetige Funktion.

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = f(a, b).$$

Bemerkung

Es ist somit notwendig, dass

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$$

gilt, damit f bei (a, b) stetig fortsetzbar ist.

19.3.3 Beispiel 1

Prüfe, ob $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

für $x + y \neq 0$ bei $(0, 0)$ stetig fortsetzbar ist.

Lösung

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = +1 \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1,$$

somit ist f bei $(0, 0)$ nicht stetig fortsetzbar.

19.3.4 Beispiel 2

Prüfe, ob $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

bei $(0, 0)$ stetig ist.

Lösung

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = +1 \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1,$$

somit ist f bei $(0, 0)$ nicht stetig.

19.3.5 Satz 2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Damit sich f bei $(0, 0)$ stetig fortsetzen lässt, ist es notwendig, dass alle Geraden durch $(0, 0)$ einen konstanten Wert c annehmen, das heißt es muss gelten:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x) = c \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

19.3.6 Satz 3

Sei $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Damit sich f bei $(0, 0, 0)$ stetig fortsetzen lässt, ist es notwendig, dass alle Ebenen durch $(0, 0, 0)$ einen konstanten Wert c annehmen, das heißt es muss gelten:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x, \mu x) = c \quad \text{für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

19.4 Umkehrabbildung mit mehreren Variablen

Umkehrungen von Abbildungen mehrerer Variablen zu finden ist generell nicht einfach. Ist die Abbildung bijektiv, so kann einen potentiellen Kandidaten g für die Umkehrung gesucht werden, danach muss dann $f \circ g = id$ und $g \circ f = id$ gezeigt werden. Vor allem die Findung eines Kandidaten ist dabei ein großes Problem. Manchmal kann man zeigen, dass es eine Umkehrabbildung gibt, aber man kann nicht zeigen, wie sie aussieht. Folgendes Beispiel soll zeigen, wie eine Umkehrung gefunden werden kann.

19.4.1 Beispiel

Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto (x^3 y, 2y). \end{aligned}$$

Ein potentieller Kandidat kann durch den Ansatz $(a, b) = (x^3 y, 2y)$ gesucht werden:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{x^3 y}{2y} = \frac{x^3}{2} &\Leftrightarrow \frac{2a}{b} = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2a}{b}} \\ b = 2y &\Leftrightarrow y = \frac{b}{2} \end{aligned}$$

Aus diesen mehr oder weniger geschickten Umformen der Gleichungen wurde nun einen potentiellen Kandidaten für die Umkehrfunktion gefunden.

Behauptung

Für die Umkehrfunktion gilt

$$\begin{aligned} g = f^{-1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \left(\sqrt[3]{\frac{2x}{y}}, \frac{y}{2} \right). \end{aligned}$$

Beweis

Es gilt:

$$g \circ f = g(f(x, y)) = g(x^3 y, 2y) = \left(\sqrt[3]{\frac{2x^3 y}{2y}}, \frac{2y}{2} \right) = (\sqrt[3]{x^3}, y) = (x, y) = id$$

$$f \circ g = f(g(x, y)) = f\left(\sqrt[3]{\frac{2x}{y}}, \frac{y}{2}\right) = \left(\left(\sqrt[3]{\frac{2x}{y}}\right)^3 \frac{y}{2}, 2 \frac{y}{2} \right) = \left(\frac{2x}{y} \frac{y}{2}, y \right) = id$$

□

Ein weiteres Beispiel siehe 20.9.8 auf Seite 206 oder in den Aufgaben.

19.5 Aufgaben

19.5.1 Aufgabe 1

Gegeben sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}. \end{aligned}$$

Prüfe, ob f im Punkt $(0, 0)$ stetig fortsetzbar ist.

Lösung 1

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x, +x^2) &= \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \\ f(x, -x^2) &= -\frac{x^4}{2x^4} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

f lässt sich also im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig fortsetzen, da

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x^2)$$

gilt.

Lösung 2

Es gilt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}, +\frac{1}{n^2}\right) &= \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \\ f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n^2}\right) &= \frac{-\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{-\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

f lässt sich also im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig fortsetzen, da

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0) \quad \text{und} \quad f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \neq f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n^2}\right)$$

gilt.

19.5.2 Aufgabe 2

Gegeben sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Prüfe, ob f im Punkt $(0, 0)$ stetig fortsetzbar ist.

Lösung

Es gilt:

$$x^2 y^2 \leq x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 \quad \Big| : (x^2 + y^2)$$

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = f(x, y) \leq x^2 + y^2.$$

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x, y) > 0$ und

$$x^2 + y^2 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} (0, 0).$$

Demnach gilt auch für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} (0, 0).$$

f lässt sich also im Punkt $(0, 0)$ stetig fortsetzen.

19.5.3 Aufgabe 3

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Zeige, dass f bei $(0, 0)$ stetig ist.

Lösung

f ist im Punkt $(0, 0)$ stetig, wenn für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$$

gilt, wenn also der Funktionswert aller Geraden durch $(0, 0)$ dort 0 ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x, \lambda x) &= \frac{x \lambda^2 x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} \\ &= \frac{x^3 \lambda^2}{x^2(1 + \lambda^2)} = \frac{x \lambda^2}{1 + \lambda^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{0}{1 + \lambda^2} = 0 \\ f(0, y) &= \frac{0 y^2}{0^2 + y^2} = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Somit ist f im Punkt $(0, 0)$ stetig.

19.5.4 Aufgabe 4

Gegeben sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Prüfe, ob f im Punkt $(0, 0)$ stetig fortsetzbar ist.

Lösung

Es gilt

$$|x^2 y| \leq (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2},$$

da $x^2 + y^2 \geq x^2$ und $\sqrt{x^2 + y^2} \geq |y|$ ist. Es folgt nun auch

$$\frac{|x^2 y|}{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Weiter gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} (0, 0),$$

somit folgt

$$\frac{|x^2 y|}{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} (0, 0).$$

f lässt sich also im Punkt $(0, 0)$ stetig fortsetzen.

19.5.5 Aufgabe 5

Gegeben sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Prüfe, ob f im Punkt $(0, 0)$ stetig fortsetzbar ist.

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x, x) &= \frac{x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \\ f(-x, x) &= \frac{-x}{\sqrt{2x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

f lässt sich im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig fortsetzen, da

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(-x, x)$$

gilt.

19.5.6 Aufgabe 6

Gegeben sei

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto \frac{xyz}{x^6 + y^4 + z^2}. \end{aligned}$$

Prüfe, ob f im Punkt $(0, 0, 0)$ stetig fortsetzbar ist.

Lösung

Es gilt

$$f(t^2, t^3, t^6) = \frac{t^2 t^3 t^6}{t^{12} + t^{12} + t^{12}} = \frac{t^{11}}{3t^{12}} = \frac{1}{3t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty,$$

somit lässt sich f bei $(0, 0, 0)$ nicht stetig fortsetzen.

19.5.7 Aufgabe 7

Finde eine Umkehrabbildung zu $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

Lösung

Der Ansatz $(a, b) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{\sin y}{\cos y} = \tan y \quad \Rightarrow \quad y = \arctan \frac{b}{a} \\ a^2 + b^2 &= e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\log(a^2 + b^2)}{2} \end{aligned}$$

Demnach ist

$$g(x, y) = \left(\frac{\log(x^2 + y^2)}{2}, \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right)$$

ein Kandidat für die Umkehrfunktion. Durch Einsetzen erkennt man, dass

$$f \circ g = g \circ f = id$$

gilt und somit g die gesuchte Umkehrfunktion von f ist.

20 Differentiation

Dieses Kapitel bezieht sich aufgrund der Übersichtlichkeit lediglich auf die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. Alle Definitionen und Sätze lassen sich jedoch für jeden endlich dimensional reellen Vektorraum leicht übertragen.

20.1 Partielle Ableitung

20.1.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $a \in M$ und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

f heißt bei a **partiell differenzierbar** nach x_k , wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow a_k} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t - a_k}$$

existiert.

Der Grenzwert heißt die **Ableitung** von f bei a_k und wird bezeichnet mit

$$D_{x_k} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

f heißt **partiell differenzierbar**, wenn für alle $a \in M$ und alle $k = 1, \dots, n$ die Ableitung $D_{x_k} f(a)$ existiert.

f heißt **stetig partiell differenzierbar**, wenn f für alle $a \in M$ partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen stetig sind.

Bemerkung

f ist also genau dann bei a partiell differenzierbar, wenn f nach allen x_k partiell stetig differenzierbar ist.

20.1.2 Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sin(xy) - \sin(x + y) + x^2 y$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y \cos(xy) - \cos(x + y) + 2xy, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x \cos(xy) - \cos(x + y) + x^2.\end{aligned}$$

20.1.3 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $a \in M$ und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Ist f bei a nach allen Variablen partiell differenzierbar, so heißt

$$\begin{aligned}\text{grad} f(a) &= (D_{x_1} f(a), \dots, D_{x_n} f(a)) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)\end{aligned}$$

der **Gradient** von f bei a .

20.2 Richtungsableitung

20.2.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $a \in M$ und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

f heißt bei $a \in M$ in **Richtung** $u \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$$

existiert.

Der Grenzwert heißt die **Richtungsableitung** von f bei a in Richtung u und wird bezeichnet mit

$$D_u f(a) = \frac{\partial f}{\partial u}(a).$$

20.2.2 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $a \in M$, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, sei $u \in \mathbb{R}^n$ und sei

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad t \mapsto f(a + tu).$$

Dann ist die Richtungsableitung von f bei a in Richtung u

$$\lim_{t \rightarrow 0} h'(t),$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Es ist zu beachten, dass erst die Ableitung $h'(x)$ berechnet werden muss, bevor der Grenzwert betrachtet werden kann (siehe Beispiel).

20.2.3 Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sin(xy)$.

Zu bestimmen ist die Richtungsableitung von f bei $a = (a, b)$ in Richtung $u = (1, 1)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(a + tu) &= f(a + t, b + t) \\ &= \sin((a + t)(b + t)) \\ &= \sin(ab + t(a + b) + t^2), \end{aligned}$$

somit folgt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} (f(a + tu))' &= \lim_{t \rightarrow 0} (\sin(ab + t(a + b) + t^2))' \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} ((\cos(ab + t(a + b) + t^2))(2t + (a + b))) \\ &= (\cos(ab + 0(a + b) + 0^2))(2 \cdot 0 + (a + b)) \\ &= \cos(ab)(a + b). \end{aligned}$$

Die Richtungsableitung von f in Richtung $(1, 1)$ ist demnach $\cos(ab)(a + b)$.

Ein weiteres Beispiel zu Richtungsableitungen siehe 20.9.1 auf Seite 202.

20.2.4 Satz 2

Das Umkehren der Richtung ändert das Vorzeichen der Richtungsableitung:

$$D_u f(a) = -D_{-u} f(a)$$

20.3 Totale Ableitung

20.3.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $a \in M$ und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$.

f heißt bei a **(total) differenzierbar**, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (1) Es gibt eine bei a stetige Abbildung $\Phi : M \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, so dass für alle $x \in M$ gilt:

$$f(x) = f(a) + \Phi(x) \cdot (x - a)$$

- (2) Es gibt ein $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und eine bei a stetige Abbildung $\varrho : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\varrho(a) = 0$, so dass für alle $x \in M$ gilt:

$$f(x) = f(a) + A \cdot (x - a) + \|x - a\| \varrho(x)$$

(3) Es gibt ein $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, so dass für alle $x \in M$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - [f(a) + A \cdot (x - a)]}{\|x - a\|} = 0$$

$A = \Phi(a)$ heißt die **Ableitung** von f bei a und wird bezeichnet mit

$$A = Df(a).$$

Anschaulich heißt f bei a (total) differenzierbar, wenn f bei a linear approximierbar ist. Die Ableitung ist dann genau die lineare Abbildung, die f bei a annähert.

20.3.2 Satz 1

Nach obiger Definition ist f genau dann bei a (total) differenzierbar, wenn alle Projektionsfunktionen f_i von f bei a nach allen x_k stetig differenzierbar sind.

20.3.3 Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y, z) = (\sin(xy), z^2 + x)$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= \sin(xy), \\ f_2(x, y, z) &= z^2 + x \end{aligned}$$

und es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= y \cos(xy) & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= x \cos(xy) & \frac{\partial f_1}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 1 & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 2z \end{aligned}$$

Demnach ist f für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (total) differenzierbar, da alle partiellen Ableitungen der Projektionsfunktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind.

20.3.4 Satz 2

Ist f bei a (total) differenzierbar, so besitzt f bei a sämtliche Richtungsableitungen und es gilt

$$D_u f(a) = Df(a) \cdot u.$$

20.3.5 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $a \in M$ und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Sind die Projektionsfunktionen f_i von f im Punkt a nach allen Variablen x_k partiell differenzierbar, so heißt die aus den partiellen Ableitungen der Projektionsfunktionen gebildete Matrix

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

die **Jacobi-Matrix** oder die **Funktionalmatrix** von f bei a .

Die Determinante $\det(J_f(a))$ im Falle $n = m$ heißt dann die **Funktional-determinante** von f bei a .

20.3.6 Satz 3

Sind alle partiellen Ableitungen der Projektionsfunktionen einer Jacobi-Matrix stetig bei a , so ist f (total) differenzierbar bei a und die Matrix bzw. die dazugehörige lineare Abbildung ist die (totale) Ableitung von f im Punkt a .

Bemerkung

Besteht die Jacobi-Matrix aus nur einer Zeile, so enthält sie dieselben Einträge wie der Gradient von f bei a .

20.3.7 Beispiel

Nach obigem Beispiel ergibt sich also folgende Jacobi-Matrix:

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} y \cos(xy) & x \cos(xy) & 0 \\ 1 & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

Für zum Beispiel $a = (0, 1, 1)$ folgt also

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

20.3.8 Totale und partielle Differenzierbarkeit

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $a \in M$. Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar bei a , so ist f bei a stetig und es existieren sämtliche partiellen Ableitungen.

Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. Die totale Differenzierbarkeit ist die "richtige" Differenzierung, da aus der partiellen Differenzierbarkeit nicht einmal die Stetigkeit gefolgert werden kann.

20.3.9 Übersicht

Seien $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ endlich dimensional, sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Dann gelten also folgende Implikationen:

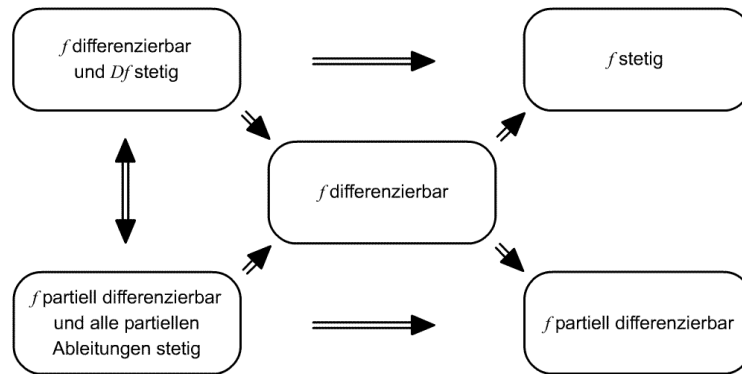


Abbildung 23

Alle anderen Implikationen sind falsch und es sind Gegenbeispiele zu finden.

20.4 Kettenregel

20.4.1 Kettenregel

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $N \subset \mathbb{R}^m$ offen und seien $a \in M$ sowie $b \in N$. Weiter seien

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow \mathbb{R}^m, \\ g : N &\rightarrow \mathbb{R}^p, \end{aligned}$$

zwei Abbildungen mit $f(a) = b$ und es sei f differenzierbar bei a und g differenzierbar bei b .

Dann ist auch $g \circ f$ differenzierbar bei a und es gilt:

$$\underbrace{D(g \circ f)(a)}_{\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)} = \underbrace{Dg(f(a))}_{\text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)} \cdot \underbrace{Df(a)}_{\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$$

Beweisskizze und Bemerkung

Der Beweis verläuft nun ganz analog zum Eindimensionalen, wenn man die Methode der Linearisierung verwendet. Vergleiche also Beweis 2 in 27.5.3 auf Seite 292.

Es ist jedoch stets darauf zu achten, dass im Mehrdimensionalen „ $\cdot$ “ meist als „angewendet auf“ anstelle von „mal“ zu verstehen ist.

Auch die folgenden drei Sätze bzw. Rechenregeln lassen sich analog über die Methode der Linearisierung recht einfach beweisen.

20.4.2 Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x, y) = (xy^2, x, y^2)$$

und sei $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$g(x, y, z) = (2yz, xyz^2).$$

Es gilt also

$$(g \circ f)(x, y) = g(xy^2, x, y^2) = (2xy^2, x^2y^6).$$

Die (totale) Ableitung von $(g \circ f)$ wird demnach gegeben durch

$$D_{(g \circ f)}(x, y) = J_{(g \circ f)}(x, y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 2xy^6 & 6x^2y^5 \end{pmatrix}.$$

Mit der Kettenregel erhält man dasselbe Ergebnis:

$$\begin{aligned} Df(x, y) &= \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 1 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ Dg(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 0 & 2z & 2y \\ yz^2 & xz^2 & 2xyz \end{pmatrix} \\ Dg(f(x, y)) &= \begin{pmatrix} 0 & 2y^2 & 2x \\ xy^4 & xy^6 & 2x^2y^4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} Dg(f(x, y)) \cdot Df(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & 2y^2 & 2x \\ xy^4 & xy^6 & 2x^2y^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 1 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 2xy^6 & 6x^2y^5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

20.4.3 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, sei $a \in M$ und seien $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ bei a differenzierbar.

Dann ist auch $(f + g) : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ bei a differenzierbar und es gilt

$$D(f + g)(a) = Df(a) + Dg(a).$$

20.4.4 Satz 2

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, sei $a \in M$ und seien $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ bei a differenzierbar.

Dann ist auch $(h \cdot f) : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ bei a differenzierbar und es gilt für $u \in \mathbb{R}^n$

$$D(hf)(a) \cdot u = (Dh(a) \cdot u) \cdot f(a) + h(a) \cdot (Df(a) \cdot u).$$

20.4.5 Satz 3

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, sei $a \in M$ und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar bei a mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in M$.

Dann ist auch

$$\frac{1}{f} : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{f(x)}$$

bei a differenzierbar und es gilt für $u \in \mathbb{R}^n$

$$D\left(\frac{1}{f}\right)(a) \cdot u = -\frac{1}{f(a)^2} \cdot Df(a) \cdot u.$$

20.5 Konvexe Mengen

20.5.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und seien $a, b \in M$ mit $a < b$.

Dann ist

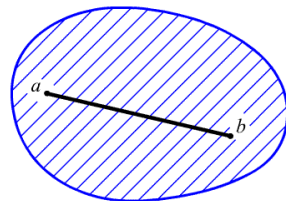
$$[a, b] := \{a + t(b - a) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

die **Strecke** von a nach b und es ist

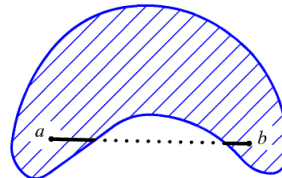
$$]a, b[:= \{a + t(b - a) \mid 0 < t < 1\}$$

die **offene Strecke** von a nach b .

20.5.2 Definition



konvexe Menge



nicht konvexe Menge

Abbildung 24

Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für alle $a, b \in K$ auch $[a, b] \subset K$ gilt.

20.5.3 Beispiel

Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und sei $\varepsilon > 0$.

Dann ist der ε -Ball $B_\varepsilon(a)$ um a einer beliebigen Norm konvex.

20.5.4 Satz 1

Der Durchschnitt konvexer Mengen ist wieder konvex, dies folgt aus der Definition.

20.5.5 Satz 2

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex.

Dann sind auch $\overline{K}$ und K° konvex.

20.5.6 Satz 3

Sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear und sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex.

Dann ist auch $A(K) \subset \mathbb{R}^m$ konvex.

20.5.7 Satz 4

Sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear und sei $L \subset \mathbb{R}^m$ konvex.

Dann ist auch $A^{-1}(L) \subset \mathbb{R}^n$ konvex.

20.5.8 Satz 5

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und sei $L \subset \mathbb{R}^m$ konvex.

Dann ist auch $K \times L \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ konvex.

20.5.9 Satz 6

Es gilt:

K konvex $\Rightarrow K$ einfach zusammenhängend $\Rightarrow K$ zusammenhängend

20.5.10 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$.

K heißt die **konvexe Hülle** von M in $\mathbb{R}^n$, wenn K der Durchschnitt aller konvexen Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist, die M enthalten.

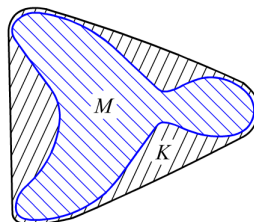


Abbildung 25

Demnach ist K also die kleinste konvexe Menge, die M enthält.

20.5.11 Satz 7

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beliebig und sei K die konvexe Hülle von M .

Dann gilt

$$K = \left\{ \sum_{k=0}^m \lambda_k a_k \in \mathbb{R}^n \mid m \in \mathbb{N}, a_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{R}, \lambda_k > 0, \sum_{k=0}^m \lambda_k = 1 \right\}.$$

20.6 Mittelwertsätze

Im Allgemeinen werden in der mehrdimensionalen Differential- und Integralrechnung nur die Mittelwertsätze 1 und 2 verwendet, der verallgemeinerte Mittelwertsatz 3 kann jedoch für einige Probleme hilfreich sein.

20.6.1 Mittelwertsatz 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und seien $a, b \in M$ mit $[a, b] \subset M$.

Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = Df(c) \cdot (b - a).$$

Beweis

Siehe 27.8.1 auf Seite 302.

20.6.2 Mittelwertsatz 2

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und seien $a, b \in M$ mit $[a, b] \subset M$.

Dann gilt

$$f(b) - f(a) = A \cdot (b - a) \quad \text{mit} \quad A = \int_0^1 Df(a + t(b - a)) dt \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Beweis

Siehe 27.8.2 auf Seite 302.

20.6.3 Mittelwertsatz 3

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, seien $a, b \in M$ mit $[a, b] \subset M$, sei f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[$ und sei K die konvexe Hülle von $\{Df(x) \mid x \in]a, b[\} \subset \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Dann gilt

$$f(b) - f(a) \in K \cdot (b - a) = \{A(b - a) \mid A \in K\} \subset \mathbb{R}^m.$$

20.6.4 Beispiel

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ konvex und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Gilt für alle $c \in M$

$$Df(c) = 0,$$

so ist f eine konstante Funktion.

Beweis

Seien $a, b \in M$ beliebig und sei $c \in]a, b[$. Nach dem Mittelwertsatz gilt dann

$$f(b) - f(a) = Df(c) \cdot (b - a) = 0 \cdot (b - a) = 0.$$

Demnach gilt also $f(b) = f(a)$ und somit ist f konstant. $\square$

20.7 Umkehrabbildungen und Differenzierbarkeit

20.7.1 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, sei $a \in M$, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar und sei J_f die Jacobi-Matrix von f .

Dann gibt es genau dann in einer Umgebung von a eine Umkehrabbildung f^{-1} von f , wenn gilt

$$\det J_f(a) \neq 0.$$

Bemerkung

Dieser Satz ist nur ein Spezialfall des Umkehrsatzes 24.4.5 auf Seite 247.

20.7.2 Satz 2

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar und sei J_f die Jacobi-Matrix von f .

Dann ist die Ableitung der Umkehrabbildung $J_{f^{-1}}$ von f die inverse Matrix von J_f , also

$$J_{f^{-1}} = (J_f)^{-1}.$$

20.7.3 Definition

Sei $f : M \rightarrow N$ umkehrbar und r -mal stetig differenzierbar.

Dann heißt f ein C^r -*Diffeomorphismus*, wenn f und f^{-1} gerade r -mal stetig differenzierbar sind.

20.8 Exkurs normierte Algebren

Dieser Exkurs soll kurz zeigen, dass die mehrdimensionale Differentiation nicht nur auf den Vektorräume $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ möglich ist, sondern zum Beispiel auch auf normierten Algebren.

20.8.1 Definition

Sei A eine Menge, und seien

$$\begin{aligned} "+" : A \times A &\rightarrow A, \\ "\cdot" : A \times A &\rightarrow A \end{aligned}$$

zwei Verknüpfungen auf A .

A heißt eine **Algebra**, wenn gilt:

- (ALG1) A ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit "+" und "\cdot".
- (ALG2) $(A, +, \cdot)$ ist ein Ring.
- (ALG3) $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $a, b \in A$.

20.8.2 Definition

A heißt **normierte Algebra**, wenn gilt:

- (1) A ist eine Algebra in $\mathbb{R}$.
- (2) Als Vektorraum ist $(A, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.
- (3) Aus $a, b \in A$ folgt $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$.
- (4) Falls $1 \in A$, dann gelte $\|1\| = 1$.

20.8.3 Definition

A heißt **Banachalgebra**, wenn A eine normierte Algebra und $(A, \|\cdot\|)$ als Vektorraum ein Banachraum ist.

20.8.4 Satz 1

Sei E ein endlich dimensionaler Vektorraum und sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf E .

Dann ist $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

20.8.5 Definition

Sei A eine normierte Algebra mit 1, es gelte also $\|1\| = 1$.

Dann ist

$$A^\times := \{x \in A \mid x \text{ ist invertierbar}\} \subset A$$

die Menge der **Einheiten** von A .

20.8.6 Satz 2

Sei A eine Banachalgebra mit 1.

Dann ist $A^\times$ offen in A .

20.8.7 Satz 3

Sei A eine normierte Algebra mit 1.

Dann ist die Abbildung $i : A^\times \rightarrow A^\times$, $a \mapsto a^{-1}$ stetig.

20.8.8 Beispiel einer Algebra

Sei A eine endlich dimensionale Algebra und sei $i : A^\times \rightarrow A^\times$, $a \mapsto a^{-1}$.

Dann ist i differenzierbar und es gilt für beliebige $b \in R$ und $a \in R^\times$

$$D_i(a) \cdot b = -a^{-1}ba^{-1}.$$

20.9 Aufgaben**20.9.1 Aufgabe 1**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}.$$

Berechne die Richtungsableitung von f bei $a = (0,0)$ in alle möglichen Richtungen nach der Definition und nach dem Satz.

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} f(a + tu) &= f(tu_1, tu_2) \\ &= \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^2(u_1^2 + u_2^2)} \\ &= \frac{tu_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2}. \end{aligned}$$

Nach der Definition

$$D_u f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$$

gilt für die Richtungsableitung

$$D_u f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{tu_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2} = \frac{u_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2}.$$

Durch das Anwenden des Satzes

$$D_u f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} (f(a + tu))'$$

erhält man dasselbe Ergebnis:

$$D_u f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{tu_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2} \right)' = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2} = \frac{u_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2}$$

20.9.2 Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x^2, xy)$.

Bestimme eine möglichst große offene Menge $M \subset \mathbb{R}^2$, so dass f auf M injektiv ist, bestimme das Bild $f(M)$ von f , berechne die Jacobi-Matrix von f und bestimme deren Determinante.

Lösung

f ist injektiv auf $M = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, da die erste Projektion f_1 auf x^2 abbildet. Damit M gerade offen ist, gilt $x > 0$ und nicht $x \geq 0$.

Auch für das Bild von f gilt

$$f(M) = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}.$$

Die Jacobi-Matrix und die Fundamentaldeterminante sind

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det J_f(x, y) = 2x^2.$$

20.9.3 Aufgabe 3

Berechne explizit mit der Definition der totalen Ableitung $Df(0, 0)$ für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + xy.$$

Lösung

Sei $x = (x, y)$ und sei $a = (0, 0)$. Nach der Definition für totale Differenzierbarkeit muss also $f(x) - f(a) = \Phi(x) \cdot (x - a)$ gelten:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= (x + xy) - (0 + 0) \\ &= (1 \quad x) \cdot (x, y) \\ &= \Phi(x) \cdot (x - a) \end{aligned}$$

Somit gilt $\Phi(a) = (1 \quad 0) = Df(0, 0)$.

20.9.4 Aufgabe 4

Berechne explizit mit der Definition der totalen Ableitung $Df(0, 0)$ für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

Lösung

Sei $x = (x, y)$ und sei $a = (0, 0)$. Nach der Definition für totale Differenzierbarkeit muss also $f(x) - f(a) = \Phi(x) \cdot (x - a)$ gelten:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= (x^2 + y^2) - (0 + 0) \\ &= (x \quad y) \cdot (x, y) \\ &= \Phi(x) \cdot (x - a) \end{aligned}$$

Somit gilt $\Phi(a) = (0 \quad 0) = Df(0, 0)$.

20.9.5 Aufgabe 5

Sei $\|x\|_2$ die übliche euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$, sei $a \in \mathbb{R}$, sei $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \|x\|_2^a$.

Prüfe, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Funktion f differenzierbar nach 0 fortsetzbar ist.

Lösung

Es gilt

$$f(x) = \|x\|_2^a = \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)^a,$$

also

$$\begin{aligned} J_f(x) &= \left(\frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \cdot a \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)^{a-1} \quad \dots \right) \\ &= \left(x_1 a \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)^{a-2} \quad x_2 a \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)^{a-2} \quad \dots \right). \end{aligned}$$

Für alle $a \geq 2$ ist f somit differenzierbar nach 0 fortsetzbar.

20.9.6 Aufgabe 6

Berechne nur mittels der Definition die totale Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 y.$$

Lösung

Sei $x = (x, y)$ und sei $a = (a, b)$. Nach der Definition für totale Differenzierbarkeit muss also $f(x) - f(a) = \Phi(x) \cdot (x - a)$ gelten:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= x^2 y - a^2 b \\ &= x^2 y - a^2 y + a^2 y - a^2 b \\ &= x^2 y - a^2 y + a^2 (y - b) \\ &= y(x^2 - a^2) + a^2 (y - b) \\ &= y(x + a)(x - a) + a^2 (y - b) \\ &= \begin{pmatrix} y(x + a) & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a & y - b \end{pmatrix} \\ &= \Phi(x) \cdot (x - a) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\Phi(a) = \begin{pmatrix} b(a + a) & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & a^2 \end{pmatrix} = Df(a).$$

20.9.7 Aufgabe 7

Seien $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = (\cos y, x + z^2) \quad \text{und} \quad g(x, y) = xe^{xy}$$

sowie $a = (0, \pi, 1)$ gegeben.

Berechne mit Hilfe der Kettenregel $D(g \circ f)(a)$.

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(a) &= (-1, 1) \\ Df(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 0 & -\sin y & 0 \\ 1 & 0 & 2z \end{pmatrix} \\ Dg(x, y) &= \begin{pmatrix} e^{xy}(1 + xy) & x^2 e^{xy} \end{pmatrix} \\ Df(a) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$Dg(f(a)) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix}$$

$$Dg(f(a)) \cdot Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{e} & 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix} = D(g \circ f)(a)$$

20.9.8 Aufgabe 8

Es sei $f_1(x, y)$ der euklidische Abstand von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zu $(-1, 0)$ und $f_2(x, y)$ der euklidische Abstand von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zu $(+1, 0)$. Es gelte

$$f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

(1) Zeige, dass f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ differenzierbar ist.

(2) Finde die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(M) = N \rightarrow M$ von f .

(3) Zeige, dass f^{-1} auf ganz N differenzierbar ist.

Lösung Teil 1

Durch den euklidischen Abstand ergeben sich folgende Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \\ f_2(x, y) &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Demnach gilt

$$f(x, y) = \left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2}, \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \right)$$

und es ergibt sich folgende Jacobi-Matrix:

$$\begin{aligned} J_f(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}((x+1)^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+2) & \frac{1}{2}((x+1)^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y \\ \frac{1}{2}((x-1)^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x-2) & \frac{1}{2}((x-1)^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} \\ \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alle Einträge der Jacobi-Matrix sind auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ stetig, demnach ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ differenzierbar.

Lösung Teil 2

Zunächst wird ein potentieller Kandidat gesucht:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= \left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \right)^2 - \left(\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \right)^2 \\ &= (x+1)^2 + y^2 - ((x-1)^2 + y^2) \\ &= (x+1)^2 - (x-1)^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 \\ &= 4x \end{aligned}$$

Es folgt also schon einmal $x = \frac{a^2 - b^2}{4}$. Weiter soll

$$f\left(\frac{a^2 - b^2}{4}, y\right) = (a, b) = id_N$$

gelten, daher folgt

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{4} - 1\right)^2 + y^2}, \\ b^2 &= \left(\frac{a^2 - b^2 - 4}{4}\right)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - 4}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{-a^4 + a^2b^2 + 4a^2 + a^2b^2 - b^4 - 4b^2 + 4a^2 - 4b^2 - 16 + 16b^2}{16}} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{-a^4 - b^4 + 2a^2b^2 + 8a^2 + 8b^2 - 16}. \end{aligned}$$

Angenommen es ist nun

$$f^{-1}(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{4}, \frac{1}{4}\sqrt{-x^4 - y^4 + 2x^2y^2 + 8x^2 + 8y^2 - 16}\right)$$

die gesuchte Umkehrfunktion, so muss $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$ gelten:

$$\begin{aligned} &(f \circ f^{-1})(x, y) \\ &= \left(\sqrt{\left(\frac{x^2 - y^2}{4} + 1\right)^2 - \frac{x^4 + y^4 - 2x^2y^2 - 8x^2 - 8y^2 + 16}{16}}, \right. \\ &\quad \left.\sqrt{\left(\frac{x^2 - y^2}{4} - 1\right)^2 - \frac{x^4 + y^4 - 2x^2y^2 - 8x^2 - 8y^2 + 16}{16}}\right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{(x^2 - y^2 + 4)^2 - x^4 - y^4 + 2x^2y^2 + 8x^2 + 8y^2 - 16}{16}}, \right. \\ &\quad \left.\sqrt{\frac{(x^2 - y^2 - 4)^2 - x^4 - y^4 + 2x^2y^2 + 8x^2 + 8y^2 - 16}{16}}\right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{16x^2}{16}}, \sqrt{\frac{16y^2}{16}}\right) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

$(f^{-1} \circ f)(x, y) = (x, y)$ folgt ganz analog.

Damit wurde gezeigt, dass $f^{-1}(x, y)$ wirklich die gesuchte Umkehrfunktion von $f(x, y)$ ist.

Lösung Teil 3

Es lässt sich folgende Jacobi-Matrix berechnen:

$$J_{f^{-1}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & -\frac{y}{2} \\ \frac{-x^3+xy^2+4x}{\sqrt{-x^4-y^4+2x^2y^2+8x^2+8y^2-16}} & \frac{-y^3+x^2y+4y}{\sqrt{-x^4-y^4+2x^2y^2+8x^2+8y^2-16}} \end{pmatrix}$$

Da alle Einträge von $J_{f^{-1}}(x, y)$ auf ganz N stetig sind, ist auch f^{-1} differenzierbar.

20.9.9 Aufgabe 9

Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x$ und

$$g(x, y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{für } x^2 \leq y \\ \frac{y^2 - x^2 y}{x^2} & \text{für } 0 \leq y < x^2 \\ -g(x, -y) & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

gegeben und sei $Fs = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Zeige, dass dann gilt:

- (1) F ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar.
- (2) F hat bei $(0, 0)$ die Funktionaldeterminante 1.
- (3) Es gibt keine Umgebung U von $(0, 0)$, so dass $F|_U$ injektiv ist.

Lösung Teil 1

Für g gilt also

$$g(x, y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{für } x^2 \leq y, & y \geq 0 \\ \frac{y^2 - x^2 y}{x^2} & \text{für } 0 \leq y < x^2, & y \geq 0 \\ y + x^2 & \text{für } x^2 \leq -y, & y < 0 \\ \frac{-y^2 - x^2 y}{x^2} & \text{für } 0 \leq -y < x^2, & y < 0 \end{cases}$$

und für F folgt

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) = (x, g(x, y)).$$

Somit ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{cases} -2x & \text{für } x^2 \leq y, & y \geq 0 \\ \frac{-2y^2}{x^3} & \text{für } 0 \leq y < x^2, & y \geq 0 \\ 2x & \text{für } x^2 \leq y, & y < 0 \\ \frac{2y^2}{x^3} & \text{für } 0 \leq y < x^2, & y < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{cases} 1 & \text{für } x^2 \leq y, & y \geq 0 \\ \frac{2y-x^2}{x^2} & \text{für } 0 \leq y < x^2, & y \geq 0 \\ 1 & \text{für } x^2 \leq y, & y < 0 \\ \frac{-2y-x^2}{x^2} & \text{für } 0 \leq y < x^2, & y < 0 \end{cases}$$

Es folgt also $J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial g}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$, somit ist F auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Lösung Teil 2

Es gilt

$$J_F(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) \\ 0 & \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demnach gilt $\det(J_F(0, 0)) = 1$.

Lösung Teil 3

Sei $\varepsilon > 0$ und sei

$$U_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (0, 0)\| < \varepsilon\}$$

eine beliebige Umgebung von $(0, 0)$.

Sei $x \in U_\varepsilon$ mit $0 < x < 1$ und seien $y_1 = x^2$ sowie $y_2 = -x^2$, also $y_1 \neq y_2$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x, y_1) &= F(x, x^2) = (x, x^2 - x^2) = (x, 0), \\ F(x, y_2) &= F(x, -x^2) = (x, -x^2 + x^2) = (x, 0), \end{aligned}$$

somit folgt $F(x, y_1) = F(x, y_2)$. Das zeigt aber gerade, dass es keine Umgebung U von $(0, 0)$ gibt, so dass $F|_U$ injektiv ist.

21 Höhere Ableitungen

21.1 Zweite partielle Ableitung

21.1.1 Beispiel 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(x^2 + y)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y \cos(xy) - 2x \sin(x^2 + y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x \cos(xy) - \sin(x^2 + y)\end{aligned}$$

Beide partiellen Ableitungen können nun wiederum nach x und y partiell abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) &= -y^2 \sin(xy) - 2 \sin(x^2 + y) - 4x^2 \cos(x^2 + y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) &= -x^2 \sin(xy) - \cos(x^2 + y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \cos(xy) - xy \sin(xy) - 2x \cos(x^2 + y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \cos(xy) - xy \sin(xy) - 2x \cos(x^2 + y)\end{aligned}$$

21.1.2 Beispiel 2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = +1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Es stellt sich also die Frage, wann $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ gilt.

21.1.3 Satz von H.A.Schwarz**Einfache Form**

Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $a \in M$.

Ist f bei a partiell differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig differenzierbar bei a , dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(a) \quad .$$

Beweis

Siehe 27.8.3 auf Seite 303.

Allgemeine Form

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, sei $a \in M$ und seien $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Ist f auf einer Umgebung von a in Richtung u und in Richtung v differenzierbar und seien die Richtungsableitungen $D_u f$ und $D_v f$ differenzierbar bei a , dann gilt

$$D_v D_u f(a) = D_u D_v f(a).$$

21.1.4 Folgerung 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und seien die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

gegeben.

Damit eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existiert ist es notwendig, dass für alle $i, j = 1, \dots, n$ gerade

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}$$

gilt.

21.1.5 Folgerung 2

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und seien die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

gegeben.

Damit eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existiert ist es hinreichend, dass für alle $i, j = 1, \dots, n$ gerade

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}$$

gilt und dass M einfach zusammenhängend ist.

21.1.6 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und seien die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

gegeben.

Ist M einfach zusammenhängend und gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n,$$

so existiert eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit den gegebenen partiellen Ableitungen und es gilt für ein geeignetes $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) dt.$$

Dieses Integral heißt **Wegintegral**.

21.1.7 Beispiel

Es seien

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^5 + y \cos(xy) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 5x^3y^4 + x \cos(xy)$$

gegeben.

Finde alle partiell differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Lösung

Sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ beliebig.

Dann ergeben sich folgende partiell differenzierbare Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{a_1}^x \frac{\partial f}{\partial x}(t, a_2) dt + \int_{a_2}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt \\ &= \int_{a_1}^x (3t^2a_2^5 + a_2 \cos(ta_2)) dt + \int_{a_2}^y (5x^3t^4 + x \cos(xt)) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[t^3 a_2^5 + \sin(ta_2) \right]_{a_1}^x + \left[x^3 t^5 + \sin(xt) \right]_{a_2}^y \\
&= x^3 a_2^5 + \sin(xa_2) - a_1^3 a_2^5 - \sin(a_1 a_2) \\
&\quad + x^3 y^5 + \sin(xy) - x^3 a_2^5 - \sin(xa_2) \\
&= x^3 y^5 + \sin(xy) - a_1^3 a_2^5 - \sin(a_1 a_2)
\end{aligned}$$

21.2 Höhere Ableitung

21.2.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, sei $a \in M$ und sei Df bei a differenzierbar.

f heißt bei a **zweimal** differenzierbar und

$$D(Df)(a) = D^2f(a) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) =: \text{Hom}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

ist die zweite Ableitung von f bei a .

21.2.2 Hesse-Matrix

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, sei $a \in M$ und sei f bei a zweimal differenzierbar.

$D^2f(a)$ heißt die **Hesse-Form** von f bei a .

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

heißt die **Hesse-Matrix** von f bei a .

$H_f(a) = D^2f(a)$ ist also die zweite Ableitung von f bei a .

Gilt der Satz von H.A.Schwarz auf Seite 211, so ist $H_f(a)$ symmetrisch.

21.2.3 Beispiel

Sei $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 + 1$.

Es gilt also $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ und $\frac{\partial f}{\partial z} = -2z$.

Somit ergibt sich

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

21.2.4 Laplaceoperator

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

Der **Laplaceoperator** Δ ordnet der Funktion f die Funktion $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

zu.

21.2.5 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ und sei $a \in M$.

f heißt bei a **r -mal** differenzierbar mit der Ableitung

$$D^r f : M \rightarrow \text{Hom}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

wenn f bei a $(r-1)$ -mal differenzierbar ist und auch

$$D^{(r-1)} f : M \rightarrow \text{Hom}^{(r-1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

differenzierbar ist.

21.2.6 Beispiel

Sei $f(x, y) = e^x y$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} Df(x, y) &= J_f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x y & e^x \end{pmatrix}, \\ D^2 f(x, y) &= H_f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x y & e^x \\ e^x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$D^3 f(x, y)$ lässt sich nun nicht mehr so übersichtlich aufschreiben. Eine sinnvolle Schreibweise ist zum Beispiel diese:

$$D^3 f(x, y) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x y & e^x \\ e^x & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

21.2.7 Schreibweisen

Auch für die Schreibweisen von höheren partiellen Ableitungen nach unterschiedlichen Variablen gibt es viele sinnvolle Möglichkeiten.

Sei $f(x_1, \dots, x_n)$. Beispiele für mögliche Schreibweisen bestimmter partieller Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial^3 x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial^3 x_1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_3 \partial x_3 \partial x_3} = \frac{\partial f}{\partial^2 x_1 \partial^3 x_3} = \frac{\partial^5 f}{\partial^2 x_1 \partial^3 x_3}.$$

Gilt der Satz von H.A.Schwarz auf Seite 211, so kann die Reihenfolge der partiellen Ableitungen beliebig getauscht werden, das heißt es gilt dann zum Beispiel

$$\frac{\partial f}{\partial x_1 \partial^2 x_2 \partial x_3} = \frac{\partial f}{\partial x_3 \partial^2 x_2 \partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_3 \partial x_2}.$$

21.2.8 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $a \in M$, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar und bei a zweimal differenzierbar und seien $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Dann ist die Richtungsableitung $D_u f$ differenzierbar bei a und es gilt

$$D(D_u f)(a) \cdot v = D^2 f(a) \cdot (u, v).$$

21.2.9 Satz 2

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ r -mal differenzierbar und seien die Vektoren $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{R}^n$.

Dann gibt es eine Funktion $D_{u_r} \dots D_{u_1} f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ für die gilt:

$$(D_{u_r} \dots D_{u_1} f)(x) = (D^r f(x)) \cdot (u_1, \dots, u_r)$$

21.2.10 Erklärungen

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ und sei $a \in M$.

Es gilt also $D^r f(x) \in \text{Hom}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

$$D^r f(x) \cdot (a, \dots, a)_{r\text{-mal}} \in \mathbb{R}^m$$

bedeutet, dass der Vektor a r -mal auf $D^r f(x)$ angewendet wird. Dabei erhält man einen Vektor aus $\mathbb{R}^m$.

21.2.11 Satz 3

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$ fest, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bei a r -mal differenzierbar und sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in M$.

Dann gilt

$$D^r f(x) \cdot a^r = \sum_{\substack{r_1, \dots, r_n \geq 0 \\ r_1 + \dots + r_n = r}} a_1^{r_1} \cdot \dots \cdot a_n^{r_n} \cdot \frac{\partial^r f}{\partial^{r_1} x_1 \dots \partial^{r_n} x_n}(x) \in \mathbb{R}.$$

21.2.12 Beispiel

Sei $f(x, y, z) = x^3 \sin y + z^3$ und sei $a = (a_1, a_2, a_3)$.

Dann gilt

$$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6x \sin y & 3x^2 \cos y & 0 \\ 3x^2 \cos y & -x^3 \sin y & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{pmatrix},$$

$$D^2 f(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich

$$D^2 f(1, 0, 1) \cdot (a_1, a_2, a_3)^2 = 3a_1 a_2 + 3a_2 a_1 + 6a_3^2 = 6a_1 a_2 + 6a_3^2.$$

21.2.13 Satz 4

Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ und $N \subset \mathbb{R}^m$ offen, seien $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie $g : N \rightarrow \mathbb{R}^l$ r -mal differenzierbar und sei $f(M) \subset N$.

Dann ist auch

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$$

r -mal differenzierbar.

21.2.14 Satz 5

Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ und $N \subset \mathbb{R}^m$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ r -mal differenzierbar, sei $g : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, sei $g(N) \subset M$, sei $f \circ g = id_N$ und sei $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ für alle $x \in M$ ein Isomorphismus.

Dann ist auch g r -mal differenzierbar.

21.2.15 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Dann gilt:

$$\mathcal{C}^r(M, \mathbb{R}^m) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ ist } r\text{-mal differenzierbar, } D^r f \text{ ist stetig}\}$$

$$\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^m) := \bigcap_{r=1}^{\infty} \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R}^m)$$

f heißt **∞ -oft differenzierbar**, wenn $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ gilt.

21.3 Aufgaben

21.3.1 Aufgabe 1

Seien

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Finde alle partiell differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den gegebenen partiellen Ableitungen.

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x \partial y} &= \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 + 8xy^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{-2x(x^2 + y^2) + 8xy^2}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{-2x^3 - 2xy^2 + 8xy^2}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3} \\ \frac{\partial f}{\partial y \partial x} &= \frac{2x(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{2x(x^2 + y^2) + 4x(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{2x^3 + 2xy^2 + 4xy^2 - 4x^3}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

Nach der Folgerung von dem Satz von H.A.Schwarz kann es also ein gesuchtes f geben. Da $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ aber nicht einfach zusammenhängend ist, kann der Satz 21.1.6 auf Seite 212 nicht angewendet werden.

$$f_1(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + c_y$$

sind alle Stammfunktionen von $\frac{\partial f}{\partial x}$, denn es ist $\frac{f_1}{dx}(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$.

$$f_2(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + c_x$$

sind alle Stammfunktionen von $\frac{\partial f}{\partial y}$, denn es ist $\frac{f_2}{dy}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

Für die gesuchte Abbildung f muss $c_y = c_x$ gelten, dies gilt für alle $c \in \mathbb{R}$.

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig sind also alle gesuchten Funktionen.

21.3.2 Aufgabe 2

Seien

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{e^y}{(1 + x^2)^2}.$$

Finde alle partiell differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit den gegebenen partiellen Ableitungen.

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x \partial y} &= \frac{-2xe^y(1 + x^2)^2}{(1 + x^2)^4} = \frac{-2xe^y}{(1 + x^2)^2} \\ \frac{\partial g}{\partial y \partial x} &= \frac{-4x(1 + x^2)^2 e^y}{(1 + x^2)^4} = \frac{-4xe^y}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

Nach der Folgerung von Schwarz kann es also kein gesuchtes g geben, da

$$\frac{\partial g}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial y \partial x}$$

gilt.

21.3.3 Aufgabe 3

Seien

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

Finde alle partiell differenzierbaren Funktion $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den gegebenen partiellen Ableitungen.

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x \partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial h}{\partial y \partial x} &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Nach der Folgerung von Schwarz kann es also ein gesuchtes h geben. Da $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ aber nicht einfach zusammenhängend ist, kann auch hier der Satz 21.1.6 auf Seite 212 nicht angewendet werden.

$$h_1(x, y) = \arctan \frac{x}{y} + c_y$$

sind alle Stammfunktionen von $\frac{\partial f}{\partial x}$, denn es ist

$$\frac{h_1}{dx}(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{y}{y^2} = \frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y^2}} \cdot \frac{y}{y^2} = \frac{y}{y^2+x^2}.$$

Weiter sind

$$h_2(x, y) = \arctan \frac{x}{y} + c_x$$

alle Stammfunktionen von $\frac{\partial f}{\partial y}$, denn es ist

$$\frac{h_2}{dy}(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y^2}} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{y^2+x^2}.$$

Für die gesuchte Abbildung h muss $c_y = c_x$ gelten, dies gilt für alle $c \in \mathbb{R}$. Somit folgt

$$h(x, y) = \arctan \frac{x}{y} + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

Da die nun gefundenen Funktionen h aber nur auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ definiert sind, gibt es keine gesuchte Funktion h , da diese auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiert sein müsste.

21.3.4 Aufgabe 4

Es seien

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2xy^2 + z \cos(xz), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 2x^2y, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= x \cos(xz) - 3z^2 \end{aligned}$$

gegeben.

Finde alle partiell differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Lösung

Sei $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, kann der Satz 21.1.6 auf Seite 212 angewendet werden:

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= \int_{a_1}^x \frac{\partial f}{\partial x}(t, a_2, a_3) dt + \int_{a_2}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t, a_3) dt + \int_{a_3}^z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, t) dt \\
 &= \int_{a_1}^x (2ta_2^2 + a_3 \cos(ta_3)) dt + \int_{a_2}^y (2x^2t) dt \\
 &\quad + \int_{a_3}^z (x \cos(xt) - 3t^2) dt \\
 &= \left[2ta_2^2 + a_3 \cos(ta_3) \right]_{a_1}^x + \left[2x^2t \right]_{a_2}^y + \left[x \cos(xt) - 3t^2 \right]_{a_3}^z \\
 &= x^2y^2 + \sin(xz) - z^3 - (a_1^2a_2^2 + \sin(a_1a_3) - a_3^3)
 \end{aligned}$$

21.3.5 Aufgabe 5

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y \sin x$.

Berechne die r -te Ableitung von f angewendet auf $(a, b)^r$ mit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, berechne also

$$D^r f(x, y) \cdot (a, b)^r \in \mathbb{R}.$$

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^r f}{\partial^r x} &= \begin{cases} y \sin x & \text{für } \frac{r}{4} \text{ hat Rest } 0 \\ y \cos x & \text{für } \frac{r}{4} \text{ hat Rest } 1 \\ -y \sin x & \text{für } \frac{r}{4} \text{ hat Rest } 2 \\ -y \cos x & \text{für } \frac{r}{4} \text{ hat Rest } 3 \end{cases} \\
 \frac{\partial^r f}{\partial^{r-1} x \partial y} &= \begin{cases} \sin x & \text{für } \frac{r-1}{4} \text{ hat Rest } 0 \\ \cos x & \text{für } \frac{r-1}{4} \text{ hat Rest } 1 \\ -\sin x & \text{für } \frac{r-1}{4} \text{ hat Rest } 2 \\ -\cos x & \text{für } \frac{r-1}{4} \text{ hat Rest } 3 \end{cases} \\
 \frac{\partial^r f}{\partial^{r-l} x \partial^l y} &= 0 \quad \text{für alle } l \geq 2
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$D^r f(x, y) \cdot (a, b)^r = \begin{cases} a^r \cdot y \sin x - r \cdot a^{r-1} \cdot b \cdot \cos x & \text{für } \frac{r}{4} \text{ hat Rest } 0 \\ a^r \cdot y \cos x + r \cdot a^{r-1} \cdot b \cdot \sin x & \text{für } \frac{r}{4} \text{ hat Rest } 1 \\ -a^r \cdot y \sin x + r \cdot a^{r-1} \cdot b \cdot \cos x & \text{für } \frac{r}{4} \text{ hat Rest } 2 \\ -a^r \cdot y \cos x - r \cdot a^{r-1} \cdot b \cdot \sin x & \text{für } \frac{r}{4} \text{ hat Rest } 3 \end{cases}.$$

22 Extrema

22.1 Lineare Algebra

Folgende Definitionen und Sätze sollten aus der Linearen Algebra bekannt sein.

22.1.1 Definition

Sei $b : V \times V \rightarrow K$ eine beliebige Bilinearform.

b heißt **positiv definit**, wenn für alle $u \in V$ mit $u \neq 0$ gilt: $b(u, u) > 0$.

b heißt **negativ definit**, wenn für alle $u \in V$ mit $u \neq 0$ gilt: $b(u, u) < 0$.

b heißt **indefinit**, wenn es $u, v \in V$ gibt mit $b(u, u) > 0$ und $b(v, v) < 0$.

b heißt **positiv semidefinit**, wenn für alle $u \in V$ mit $u \neq 0$ gilt: $b(u, u) \geq 0$.

b heißt **negativ semidefinit**, wenn für alle $u \in V$ mit $u \neq 0$ gilt: $b(u, u) \leq 0$.

22.1.2 Satz 1

Sei b eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und sei $B = (\beta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ die zu b gehörige symmetrische Matrix, also $\beta_{ij} = b(e_i, e_j)$.

Dann ist b genau dann positiv definit, wenn für alle $r \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\det(\beta_{ij})_{1 \leq i, j \leq r} > 0$$

22.1.3 Satz 2

Sei b eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und sei $B = (\beta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ die zu b gehörige symmetrische Matrix, also $\beta_{ij} = b(e_i, e_j)$.

Dann ist b genau dann negativ definit, wenn für alle $r \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$(-1)^r \cdot \det(\beta_{ij})_{1 \leq i, j \leq r} > 0$$

22.2 Lokale Extrema

22.2.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $a \in M$.

f hat bei a ein **lokales Minimum** $:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall x \in B_\varepsilon(a) : f(a) \leq f(x)$.

f hat bei a ein **lokales Maximum** $:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall x \in B_\varepsilon(a) : f(a) \geq f(x)$.

f hat bei a ein **absolute Minimum** $:\Leftrightarrow \forall x \in M : f(a) \leq f(x)$.

f hat bei a ein **absolute Maximum** $:\Leftrightarrow \forall x \in M : f(a) \geq f(x)$.

f hat bei a ein **lokales Extremum**, wenn f bei a ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum hat.

22.2.2 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit einem lokalen Extremum bei $a \in M$.

Dann gilt

$$Df(a) = 0.$$

Es ist also notwendig, dass $Df(a) = 0$ gilt, damit f bei a ein lokales Extremum haben kann.

Beweis

Siehe 27.8.4 auf Seite 304.

22.2.3 Satz 2

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bei $a \in M$ zweimal differenzierbar und sei $Df(a) = 0$.

Dann gilt:

- (1) Ist $D^2f(a)$ positiv definit, so hat f ein lokales Minimum bei a .
- (2) Ist $D^2f(a)$ negativ definit, so hat f ein lokales Maximum bei a .
- (3) Ist $D^2f(a)$ indefinit, so hat f kein lokales Extremum bei a , sondern einen Sattelpunkt.

Bei Semidefinitheit kann keine Aussage über ein lokales Extremum getroffen werden.

Beweisskizze

Siehe 27.8.5 auf Seite 305.

22.2.4 Beispiel 1

Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$ und sei $a = (0, 0)$.

Dann gilt $Df(a) = 0$ sowie

$$D^2f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D^2f(a).$$

Da $D^2f(a)$ positiv definit ist, hat f bei a ein lokales Minimum.

22.2.5 Beispiel 2

Sei $f(x, y) = xy$, sei $a = (0, 0)$ und sei $u = (u_1, u_2)$.

Dann gilt $Df(a) = 0$ sowie

$$D^2f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = D^2f(a).$$

Weiter ist $D^2f(a) \cdot (u_1, u_2)^2 = 2u_1u_2$ und somit folgt $D^2f(1, 1) = 2$ und $D^2f(1, -1) = -2$.

$D^2f(a)$ ist also indefinit und hat somit bei $a = (0, 0)$ kein lokales Extremum.

22.2.6 Satz von Weierstraß

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und kompakt und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann hat f ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum in M .

22.3 Extrema mit Nebenbedingungen

22.3.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, sei $N = \{x \in M \mid f(x) = 0\} \subset M$ mit $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, sei $a \in N$ und es gelte $m < n$.

Dann gilt:

- (1) φ hat bei a ein **lokales Maximum** mit der Nebenbedingung $f(x) = 0$, wenn a ein lokales Maximum von $\varphi|_N$ ist.
- (2) φ hat bei a ein **lokales Minimum** mit der Nebenbedingung $f(x) = 0$, wenn a ein lokales Minimum von $\varphi|_N$ ist.

Lokale Extrema mit Nebenbedingung sind also lokale Extrema einer Funktion, die auf einer bestimmten Teilmenge eingeschränkt ist.

22.3.2 Satz von Lagrange

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, sei

$$N = \{x \in M \mid f_i(x) = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, m\} \subset M$$

mit der stetig differenzierbaren Funktion $f = (f_1, \dots, f_m) : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in N$ und es gelte $m < n$.

Sei weiter a ein lokales Extremum von φ mit der Nebenbedingung $f(x) = 0$.

Dann gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, so dass für alle $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) = 0$$

Bemerkung

Wenn es also $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ gibt und für alle $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) = 0$$

gilt, so ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum unter Nebenbedingungen erfüllt.

Ob es sich nun bei dem Punkt a wirklich um ein Extremum oder nur um einen Sattelpunkt handelt, ist manchmal nur schwer zu überprüfen.

22.3.3 Beispiel

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$.

Gesucht ist ein lokales Extremum von φ unter der Nebenbedingung

$$f(x, y) = y - x - 1 = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 & \Leftrightarrow & 2x - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 & \Leftrightarrow & 2y + \lambda = 0, \end{aligned}$$

somit folgt $x = -y$.

Wegen der Nebenbedingung $y - x - 1 = 0$ gilt also

$$y + y - 1 = 2y - 1 = 0$$

und es ergibt sich $x = -\frac{1}{2}$ sowie $y = \frac{1}{2}$.

$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist ein lokales Minimum unter der gegebenen Nebenbedingung, da φ für große (x, y) beliebig groß werden kann.

22.4 Aufgaben

22.4.1 Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Finde alle lokalen Extrema von f .

Lösung

Es muss also $Df(x, y) = 0$ gelten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$Df(x, y) = 0$ gilt also nur für $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Es ist nun die zweite Ableitung zu untersuchen:

$$\begin{aligned} D^2 f(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{-2(x^2+y^2+1)^2+8x^2(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^4} & \frac{8xy(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^4} \\ \frac{8xy(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^4} & \frac{-2(x^2+y^2+1)^2+8y^2(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^4} \end{pmatrix} \\ D^2 f(0, 0) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$D^2 f(0, 0)$ ist negativ definit und somit hat f bei $(0, 0)$ ein lokales Maximum.

22.4.2 Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x + 3y$.

Finde alle lokalen Extrema von f .

Lösung

Für ein lokales Extremum von f ist es notwendig, dass $Df(x, y) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 + 3\end{aligned}$$

f hat keine lokalen Extrema, da für kein $y \in \mathbb{R}$ gerade $Df(x, y) = 0$ gilt.

22.4.3 Aufgabe 3

Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x, y, z) = x + y + z.$$

Finde alle lokalen Extrema von φ unter den Nebenbedingungen

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \text{und} \quad x + z = 1.$$

Lösung

Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zu den beiden Nebenbedingungen ist also

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 2, x + z - 1) = (0, 0).$$

Es muss also folgendes Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \lambda 2x + \mu = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \lambda 2y = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial z} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \mu = 0\end{aligned}$$

Es ergeben sich die Lösungen

$$\lambda = -\frac{1}{2y}, \quad \mu = -1 \quad \text{und} \quad x = 0.$$

Es müssen nun noch die beiden Nebenbedingungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned}x + z = 1 &\Rightarrow z = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 &\Rightarrow y = \pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

Unter den gegebenen Nebenbedingungen hat φ also bei $(0, -\sqrt{2}, 1)$ ein lokales Minimum und bei $(0, \sqrt{2}, 1)$ ein lokales Maximum.

22.4.4 Aufgabe 4

Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x, y, z) = xy + 2z.$$

Finde mögliche lokale Extrema von φ unter den Nebenbedingungen

$$x + y = -z \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 24.$$

Lösung

Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zu den beiden Nebenbedingungen ist also

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2 - 24) = (0, 0).$$

Es muss also folgendes Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0 & \Leftrightarrow & y + \lambda + \mu 2x = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 0 & \Leftrightarrow & x + \lambda + \mu 2y = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial z} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0 & \Leftrightarrow & 2 + \lambda + \mu 2z = 0 \end{aligned}$$

Es ergeben sich die Lösungen

$$\lambda = -\mu 2x - y, \quad \lambda = -\mu 2y - x \quad \text{und} \quad \mu = 1/2.$$

Es müssen nun noch die beiden Nebenbedingungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 & \Rightarrow & z = -1 \\ & & \Rightarrow & x = 1 - y \\ x^2 + y^2 + z^2 - 24 &= 0 & \Rightarrow & y = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 11} \\ & & \Rightarrow & x = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 11} \end{aligned}$$

Mögliche lokalen Extrema unter den Nebenbedingungen kann es also bei den vier Punkten

$$\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 11}, \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 11}, -1 \right)$$

geben.

22.4.5 Aufgabe 5

Sei $f(x, y) = (2x^2 + y^2)e^{-x^2 - 2y^2}$.

Berechne alle lokalen Extrema von f .

Lösung

Damit f bei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ein lokales Extremum haben kann, ist es notwendig, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ gilt.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 4x \cdot e^{-x^2-2y^2} + (2x^2 + y^2) \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2-2y^2} \\ &= (4x - 4x^3 - 2xy^2) e^{-x^2-2y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \cdot e^{-x^2-2y^2} + (2x^2 + y^2) \cdot (-4y) \cdot e^{-x^2-2y^2} \\ &= (2y - 8x^2y - 4y^3) e^{-x^2-2y^2}\end{aligned}$$

Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow (4x - 4x^3 - 2xy^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 &\Leftrightarrow (2y - 8x^2y - 4y^3) = 0\end{aligned}$$

Somit ergeben sich durch

$$\begin{aligned}x^3 + \frac{1}{2}xy^2 - x &= \left(x^2 + \left(\frac{1}{2}y^2 - 1\right)\right)x = 0 \quad \text{und} \\ y^3 + 2x^2y - \frac{1}{2}y &= \left(y^2 + \left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)\right)y = 0\end{aligned}$$

folgende drei Mengen:

$$\begin{aligned}A &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x = 0 \text{ und } x = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}y^2} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x = 0 \text{ und } x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2 - y^2} \right\} \\ B &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \mid y = 0 \text{ und } y = \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - x^2} \right\} \\ C &= A \cap B \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \mid Df(x, y) = 0 \right\} \\ &= \left\{ (0, 0), (1, 0), (-1, 0), \left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right), \left(0, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \right\}\end{aligned}$$

Nach der notwendigen Bedingung kann f also nur bei den Punkten aus C ein lokales Extremum haben.

f hat bei $(x, y) \in C$ ein lokales Minimum, wenn $D^2f(x, y) = H_f(x, y)$ positiv definit ist, und ein lokales Maximum, wenn $D^2f(x, y) = H_f(x, y)$ negativ definit ist:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x \partial x} &= (4 - 20x^2 - 2y^2 + 8x^4 + 4x^2y^2) e^{-x^2-2y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y \partial y} &= (2 - 8x^2 - 20y^2 + 32x^2y^2 + 16y^4) e^{-x^2-2y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y \partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = (16x^3y + 8xy^3 - 20xy) e^{-x^2-2y^2}\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}H_f(0, 0) &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{positiv definit} \\ H_f(1, 0) &= \begin{pmatrix} -\frac{8}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{e} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{8}{e} & 0 \\ 0 & \frac{6}{e} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{negativ definit} \\ H_f(-1, 0) &= \begin{pmatrix} -\frac{8}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{e} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{8}{e} & 0 \\ 0 & \frac{6}{e} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{negativ definit} \\ H_f\left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{3}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{indefinit} \\ H_f\left(0, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{3}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{indefinit}\end{aligned}$$

Es ergeben sich somit folgende lokale Extrema von f :

- (1) Lokales Minimum bei $(0, 0)$.
- (2) Lokales Maximum bei $(1, 0)$.
- (3) Lokales Maximum bei $(-1, 0)$.

22.4.6 Aufgabe 6

Zeige mit dem Satz über lokale Extrema mit Nebenbedingungen, dass auf der 2-Sphäre $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ stets $\frac{1}{3} \leq x^4 + y^4 + z^4 \leq 1$ gilt.

Lösung

Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$.

Es sind also alle lokalen Extrema von φ unter der Nebenbedingung

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

zu finden.

Notwendig für ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung ist, dass es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 &\Leftrightarrow & 4x^3 - \lambda 2x = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 &\Leftrightarrow & 4y^3 - \lambda 2y = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 &\Leftrightarrow & 4z^3 - \lambda 2z = 0\end{aligned}$$

Mit geeigneten λ gelten alle Gleichungen nur dann, wenn

$$\begin{aligned}x &= \pm y = \pm z \\ \text{oder} \quad x &= 0, y = \pm z \\ \text{oder} \quad y &= 0, x = \pm z \\ \text{oder} \quad z &= 0, x = \pm y \\ \text{oder} \quad y &= z = 0, x \neq 0 \\ \text{oder} \quad x &= z = 0, y \neq 0 \\ \text{oder} \quad x &= y = 0, z \neq 0.\end{aligned}$$

Da aber auch noch die Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gelten muss, gibt es folgende Möglichkeiten für x , y und z :

$x = y = z$	$\Rightarrow$	$x = y = z = \pm \sqrt{1/3}$	8 Punkte
$x = 0, y = z$	$\Rightarrow$	$y = z = \pm \sqrt{1/2}$	4 Punkte
$y = 0, x = z$	$\Rightarrow$	$x = z = \pm \sqrt{1/2}$	4 Punkte
$z = 0, x = y$	$\Rightarrow$	$x = y = \pm \sqrt{1/2}$	4 Punkte
$y = z = 0, x \neq 0$	$\Rightarrow$	$x = \pm 1$	2 Punkte
$x = z = 0, y \neq 0$	$\Rightarrow$	$y = \pm 1$	2 Punkte
$x = y = 0, z \neq 0$	$\Rightarrow$	$z = \pm 1$	2 Punkte

Für alle Funktionswerte c der 26 möglichen lokalen Extrema und Sattelpunkte von φ gilt $\frac{1}{3} \leq c \leq 1$:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}\right) &= 1/3 \\ \varphi\left(\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3}\right) &= 1/3 \\ \varphi\left(0, \sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}\right) &= 1/2 \\ &\vdots \\ \varphi(0, 0, 1) &= 1 \\ \varphi(0, 0, -1) &= 1\end{aligned}$$

Für alle $(x, y, z) \in S^2$ gilt demnach $\frac{1}{3} \leq x^4 + y^4 + z^4 \leq 1$.

23 Taylorreihen

23.1 Definitionen und Sätze

23.1.1 Taylorpolynom

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, sei $a \in M$ fest und sei f bei a r -mal differenzierbar.

Dann heißt

$$\begin{aligned} p_{r-1} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} \cdot D^k f(a) \cdot (x-a)^k \end{aligned}$$

das r -te **Taylorpolynom** von f bei a .

p_{r-1} ist wie im Eindimensionalen eine Annäherung von f um den Punkt a .

23.1.2 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$ fest, sei f bei a r -mal differenzierbar und sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in M$.

Dann wird das Taylorpolynom p_{r-1} gegeben durch

$$p_{r-1} = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_n = r}} \frac{1}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n!} \cdot (x_1 - a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x_n - a_n)^{k_n} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_n} x_n}(a).$$

Durch diesen Satz lassen sich viele Aufgaben recht schnell und einfach lösen.

23.1.3 Taylorformel

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, sei $a \in M$ fest und sei f bei a r -mal differenzierbar.

$$f(x) = p_{r-1}(x) + R_r(x, a)$$

ist die **Taylorformel** von f an der Stelle a .

$R_r(x, a)$ ist dabei das r -te **Restglied** von f mit Entwicklungspunkt a .

23.1.4 Restglieddarstellung

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, sei $a \in M$ fest und $x \in M$, sei $[a, x] \subset M$ und sei $p \in \mathbb{N}$.

Lagrange Restglied

$$R_r(x, a) = \frac{1}{r!} \cdot D^r f(a + t(x - a)) \cdot (x - a)^r$$

für ein $t \in]0, 1[$.

Schlömilchsches Restglied

$$R_r(x, a) = \frac{(1 - t)^{r-p}}{(r - 1)! \cdot p} \cdot D^r f(a + t(x - a)) \cdot (x - a)^r$$

für ein $t \in]0, 1[$.

Cauchysches Restglied

$$R_r(x, a) = \frac{(1 - t)^{r-1}}{(r - 1)!} \cdot D^r f(a + t(x - a)) \cdot (x - a)^r$$

für ein $t \in]0, 1[$.

Das Lagrange Restglied ist das Schlömilchsche Restglied mit $p = r$ und das Cauchysche Restglied das mit $p = 1$.

23.1.5 Beispiel 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^x y$.

Berechne alle Taylorpolynome p_r und die Taylorreihe von $f(x, y)$ um den Punkt $a = (0, 1)$.

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(0, 1) &= 1 \\ Df(x, y) &= (e^x y \quad e^x) \\ Df(0, 1) &= (1 \quad 1) \\ D^2 f(x, y) &= \begin{pmatrix} e^x y & e^x \\ e^x & 0 \end{pmatrix} \\ D^2 f(0, 1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^3 f(x, y) &= \begin{pmatrix} (e^x y & e^x) & (e^x & 0) \\ (e^x & 0) & (0 & 0) \end{pmatrix} \\
D^3 f(0, 1) &= \begin{pmatrix} (1 & 1) & (1 & 0) \\ (1 & 0) & (0 & 0) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nach dem Taylorpolynom

$$p_r(x) = \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} \cdot D^k f(a) \cdot (x - a)^k$$

ergeben sich also für p_0 bis p_3 folgende Polynome:

$$\begin{aligned}
p_0(x, y) &= f(0, 1) = 1 \\
p_1(x, y) &= p_0(x, y) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x, y - 1) \\
&= 1 + x + y - 1 = x + y \\
p_2(x, y) &= p_1(x, y) + \frac{1}{2!} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x, y - 1)^2 \\
&= p_1(x, y) + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x + y - 1 & x \end{pmatrix} \cdot (x, y - 1) \\
&= p_1(x, y) + \frac{1}{2}(x^2 + xy - x + xy - x) \\
&= p_1(x, y) + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy - 2x) \\
&= x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy - 2x) \\
p_3(x, y) &= p_2(x, y) + \frac{1}{3!} \cdot \begin{pmatrix} (1 & 1) & (1 & 0) \\ (1 & 0) & (0 & 0) \end{pmatrix} \cdot (x, y - 1)^3 \\
&= p_2(x, y) + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} x^2 + 2xy - 2x & x^2 \end{pmatrix} \cdot (x, y - 1) \\
&= p_2(x, y) + \frac{1}{6} \cdot (x^3 + 3x^2y - 3x^2) \\
&= x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy - 2x) + \frac{1}{6} \cdot (x^3 + 3x^2y - 3x^2)
\end{aligned}$$

Gesucht sind alle Taylorpolynome von $f(x, y)$, also p_r mit $r \in \mathbb{N}$ beliebig. Das einzige Problem dabei ist, dass die r -te Ableitung von $f(x, y)$ benötigt wird. Wie man jedoch sogar schon an den ersten drei Ableitungen erkennt, gilt aber

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^r f}{\partial^r x}(x, y) &= id = e^x y, \\
\frac{\partial^r f}{\partial^r x}(0, 1) &= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^r f}{\partial^{r-1}x \partial^1 y}(x, y) &= e^x, \\
\frac{\partial^r f}{\partial^{r-1}x \partial^1 y}(0, 1) &= 1, \\
\frac{\partial^r f}{\partial^{r-l}x \partial^l y}(x, y) &= 0 \quad \text{für alle } l \in \mathbb{N} \text{ mit } 2 \leq l \leq r.
\end{aligned}$$

Da es nach dem Satz von H.A.Schwarz egal ist, in welcher Reihenfolge nach x und nach y abgeleitet wird, folgt also

$$\begin{aligned}
D^r f(0, 1) \cdot (x, y - 1)^r &= r \cdot \underbrace{\frac{\partial^r f}{\partial^{r-1}x \partial^1 y}(0, 1)}_{=1} \cdot x^{r-1} \cdot (y - 1) + \underbrace{\frac{\partial^r f}{\partial^r x}(0, 1)}_{=1} \cdot x^r \\
&= r \cdot (x^{r-1} \cdot (y - 1)) + x^r \\
&= rx^{r-1}y - rx^{r-1} + x^r.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun genau das r -te Taylorpolynom

$$p_r(x, y) = 1 + \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} (kx^{k-1}y - kx^{k-1} + x^k).$$

Das Ergebnis stimmt genau mit den ausgerechneten p_0 bis p_3 überein.

$p_r(x, y)$ lässt sich jedoch noch weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned}
p_r(x, y) &= 1 + \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} (kx^{k-1}y - kx^{k-1} + x^k) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^r \left(\frac{x^{k-1}y}{(k-1)!} - \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{x^k}{k!} \right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^r \frac{x^{k-1}y}{(k-1)!} + \frac{x^r}{r!} \\
&= 1 + y \cdot \sum_{k=1}^r \frac{x^k}{(k-1)!} + \frac{x^r}{r!} \\
&= y \cdot \sum_{k=0}^r \frac{x^k}{k!} + \frac{x^r}{r!}
\end{aligned}$$

Für $r \rightarrow \infty$ ergibt sich also die Taylorreihe

$$f(x, y) = y \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

da $\frac{x^r}{r!}$ für $r \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

23.1.6 Beispiel 2

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = \sin x \cos y e^z$.

Berechne das Taylorpolynom p_2 um den Punkt $a = (0, 0, 0)$.

Lösung

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= 0 \\ Df(x, y, z) &= (\cos x \cos y e^z \quad -\sin x \sin y e^z \quad \sin x \cos y e^z) \\ Df(0, 0, 0) &= (1 \quad 0 \quad 0) \\ D^2 f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} -\sin x \cos y e^z & -\cos x \sin y e^z & \cos x \cos y e^z \\ -\cos x \sin y e^z & -\sin x \cos y e^z & -\sin x \sin y e^z \\ \cos x \cos y e^z & -\sin x \sin y e^z & \sin x \cos y e^z \end{pmatrix} \\ D^2 f(0, 0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ergeben sich nun folgende Polynome:

$$\begin{aligned} p_0(x, y, z) &= f(0, 0, 0) = 0 \\ p_1(x, y, z) &= p_0(x, y, z) + (1 \quad 0 \quad 0) \cdot (x, y, z) \\ &= x \\ p_2(x, y, z) &= p_1(x, y, z) + \frac{1}{2!} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x, y, z)^2 \\ &= p_1(x, y, z) + \frac{1}{2} \cdot (xz + zx) \\ &= x + xz \end{aligned}$$

Es gilt sogar folgender Satz:

23.1.7 Satz 2

Eine Taylorreihe im $\mathbb{R}^n$ kann als Produkt von den einzelnen konvergenten Taylorreihen dargestellt werden.

23.1.8 Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = \sin x \cos y e^z$.

Dann gilt also

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= \sin x \cos y e^z \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots \right) \cdot \left(1 - \frac{y^2}{2} + \dots \right) \cdot \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots \right) \\
 &= x + xz - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}xz^2 + \dots
 \end{aligned}$$

23.2 Aufgaben

23.2.1 Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x - y^2}.$$

Finde die Taylorreihe von f um $(0, 0)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x + y^2| < 1$.

Lösung

Nach der geometrischen Reihe gilt

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \frac{1}{1 - (x + y^2)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (x + y^2)^n \\
 &= 1 + (x + y^2) + (x + y^2)^2 + (x + y^2)^3 + \dots \\
 &= 1 + x + y^2 + x^2 + 2xy^2 + y^4 + x^3 + 3x^2y^2 + 3xy^4 + y^6 + \dots
 \end{aligned}$$

Demnach ist die Taylorreihe von f um $(0, 0)$ für $|x + y^2| < 1$ gerade

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x + y^2)^n.$$

Dank der geometrischen Reihe entfällt also das Ausrechnen der r -ten Ableitung und die Abschätzung des Restgliedes.

23.2.2 Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y \sin x$.

Berechne das Taylorpolynom p_4 um den Punkt $a = (0, 0)$.

Lösung

Es gilt:

$$f(0,0) = 0$$

$$Df(x,y) = (y \cos x \quad \sin x)$$

$$Df(0,0) = (0 \quad 0)$$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -y \sin x & \cos x \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^3 f(x,y) = \begin{pmatrix} (-y \cos x & -\sin x) & (-\sin x & 0) \\ (-\sin x & 0) & (0 & 0) \end{pmatrix}$$

$$D^3 f(0,0) = \begin{pmatrix} (0 & 0) & (0 & 0) \\ (0 & 0) & (0 & 0) \end{pmatrix}$$

$$D^4 f(x,y) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (y \sin x & -\cos x)(-\cos x & 0) \\ (-\cos x & 0)(0 & 0) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (-\cos x & 0)(0 & 0) \\ (0 & 0)(0 & 0) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$D^4 f(0,0) = \begin{pmatrix} ((0 & -1) & (-1 & 0)) & ((-1 & 0) & (0 & 0)) \\ ((-1 & 0) & (0 & 0)) & ((0 & 0) & (0 & 0)) \end{pmatrix}$$

Somit ergeben sich also folgende Taylorpolynome:

$$p_0(x,y) = f(0,0) = 0$$

$$p_1(x,y) = p_0(x,y) + (0 \quad 0) \cdot (x,y) = 0$$

$$\begin{aligned} p_2(x,y) &= p_1(x,y) + \frac{1}{2!} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x,y)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (xy + yx) = yx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(x,y) &= p_2(x,y) + \frac{1}{3!} \cdot \begin{pmatrix} (0 & 0) & (0 & 0) \\ (0 & 0) & (0 & 0) \end{pmatrix} \cdot (x,y)^3 \\ &= p_2(x,y) + 0 = yx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4(x,y) &= p_3(x,y) + \frac{1}{4!} \cdot D^4 f(0,0) \cdot (x,y)^4 \\ &= p_3(x,y) + \frac{1}{24} (-4yx^3) = yx - \frac{1}{6} yx^3 \end{aligned}$$

24 Implizite Funktionen

Es kann das Problem auftreten, Gleichungen und Ungleichungen betrachten zu müssen, die keine Funktionen sind.

Da man jedoch mit Funktionen besonders gut umgehen kann, versucht man eine gegebene Gleichung oder Ungleichung so auf eine Teilmenge der gegebenen Menge zu beschränken, dass sie durch eine äquivalente Funktion ersetzt werden kann.

Implizite Funktionen beschäftigen sich somit auch mit der Umkehrbarkeit im Mehrdimensionalen.

Beispiel

Gegeben sei in $\mathbb{R}^2$ die Gleichung

$$x^2 + 4y^2 = 2.$$

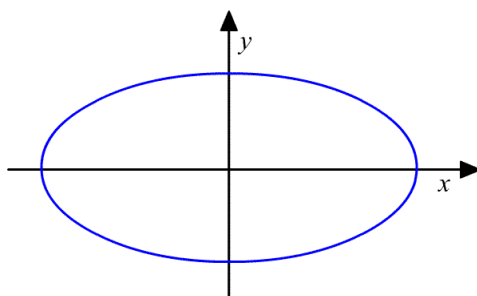


Abbildung 26

Diese Gleichung lässt sich weder als Funktion $y = f(x)$ noch als $x = f(y)$ schreiben. Auf der Teilmenge

$$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

ist $x^2 + 4y^2 = 2$ jedoch äquivalent zum Graph von

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - x^2}.$$

Des Weiteren werden in diesem Kapitel einige Begriffe der höheren Analysis eingeführt.

24.1 Definitionen und Sätze

24.1.1 Grundlegende Definitionen

Sei (M, d) ein metrischer Raum.

Eine Abbildung $T : M \rightarrow M$ heißt eine **Transformation** von M .

Sind S und T Transformationen auf einer Menge M , so schreibt man kurz ST für $S \circ T$. Analog schreibt man für ein $a \in M$ auch Ta für $T(a)$.

Es wird definiert

$$T^0 := id_M, \quad T^1 := T, \quad T^{n+1} := TT^n.$$

24.1.2 Definition

Sei $T : M \rightarrow M$ eine Transformation und sei $a \in M$.

Dann heißt a ein **Fixpunkt** von T , wenn $Ta = a$ gilt.

24.1.3 Beispiel

Sei $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $T(x, y) = (y, x)$. Dann ist

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

die Menge aller Fixpunkte von T .

24.1.4 Satz 1

Sei $T : M \rightarrow M$ eine Transformation und sei $n \in \mathbb{N}$.

Hat T^n genau einen Fixpunkt, dann hat auch T genau einen Fixpunkt.

Beweis

Es ist klar, dass jeder Fixpunkt a von T auch ein Fixpunkt von T^n ist, also kann T höchstens einen Fixpunkt haben.

Sei nun a ein Fixpunkt von T^n , dann ist auch Ta ein Fixpunkt von T^n , da

$$T^n Ta = T^{n+1}a = T^{1+n}a = TT^n a = Ta$$

gilt. Weil T^n aber genau einen Fixpunkt hat, folgt $Ta = a$. □

24.1.5 Definition

Sei $T : M \rightarrow M$ eine Transformation auf einem metrischen Raum (M, d) .

T heißt eine **Kontraktion** oder **Zusammenziehung** von M , wenn eine der äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

$$(1) \quad \exists q < 1 \quad \forall x, y \in M : d(Tx, Ty) \leq qd(x, y)$$

$$(2) \quad \forall x, y \in M : d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

24.1.6 Satz 2

Eine Kontraktion kann höchstens einen Fixpunkt haben.

Beweis

Sei $T : M \rightarrow M$ eine Kontraktion mit $q < 1$ auf einem metrischen Raum (M, d) und seien $a, b \in M$ zwei Fixpunkte von T .

Dann gilt

$$d(a, b) = d(Ta, Tb) \leq qd(a, b),$$

aber da $q < 1$ ist, kann diese Ungleichung nur für $d(a, b) = 0$ und somit $a = b$ richtig sein. $\square$

24.1.7 Fixpunktsatz von Banach

Sei $T : M \rightarrow M$ eine Kontraktion mit $q < 1$ auf einem vollständig metrischen Raum (M, d) .

Dann hat T genau einen Fixpunkt.

Beweis

Siehe 27.8.6 auf Seite 305.

24.2 Differentialgleichungen

24.2.1 Satz 1

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Sei weiter $T : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ eine Transformation mit genau einem Fixpunkt f .

Dann gibt es eine Abbildung $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Abbildung $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, so dass f folgende Eigenschaften hat:

$$(1) \quad f(a) = 0,$$

$$(2) \quad \text{für alle } x \in I \text{ gilt } f(x) = \int_a^x (A(t)f(t) + b(t)) dt,$$

$$(3) \quad f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist differenzierbar.}$$

24.2.2 Beispiel

Zeige, dass es genau eine differenzierbare Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) = x^3 \cdot f(x)^2 + 2x \sin x$$

gibt.

Lösung

Sei $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Sei nun $T : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ eine Transformation mit

$$Tf(x) = \int_0^x (t^3 \cdot f(t)^2 + 2t \sin t) \, dt.$$

Sei weiter $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ein Fixpunkt von T , dann gilt

$$f(x) = Tf(x) = \int_0^x (t^3 \cdot f(t)^2 + 2t \sin t) \, dt.$$

Nach dem Hauptsatz der Analysis folgt

$$f'(x) = x^3 \cdot f(x)^2 + 2x \sin x$$

und es gilt $f(0) = 0$.

Es ist also noch zu zeigen, dass T genau einen Fixpunkt hat.

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes lässt sich zeigen, dass für jeden Fixpunkt f von T gilt:

$$f(x) \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } x \in I$$

Sei $\mathcal{B} := \{g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \mid g \leq \frac{1}{2}\}$ und seien $g, h \in \mathcal{B}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} |Tg(x) - Th(x)| &= \left| \int_0^x (t^3 \cdot g(t)^2 + 2t \sin t - t^3 \cdot h(t)^2 - 2t \sin t) \, dt \right| \\ &= \left| \int_0^x (t^3 (g(t)^2 - h(t)^2)) \, dt \right| \\ &= \int_0^x (t^3 \cdot \underbrace{|g(t) + h(t)|}_{\leq 1} \cdot |g(t) - h(t)|) \, dt \\ &\leq \int_0^x t^3 \, dt \cdot |g(t) - h(t)| \\ &= \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_{t=0}^x \cdot |g(t) - h(t)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}x^4 \cdot |g(t) - h(t)| \\
&\leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot |g(t) - h(t)| \\
&= \frac{1}{64} \cdot |g(t) - h(t)|.
\end{aligned}$$

Das heißt, dass $T|_{\mathcal{B}}$ eine Kontraktion von $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ist. Da $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ vollständig ist, ist auch $\mathcal{B}$ vollständig. Des Weiteren liegen alle möglichen Fixpunkte von T in $\mathcal{B}$, also folgt nach dem Fixpunktsatz von Banach, dass T genau einen Fixpunkt hat.

Dieser Fixpunkt erfüllt die geforderten Bedingungen.

24.3 Implizite Funktionen

24.3.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen und nicht leer, sei $Q : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $(x, y) \mapsto Q(x, y)$ und sei $f : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $N \subset \mathbb{R}^n$.

Die Funktion f heißt eine durch Q **impliziert definierte** Funktion, wenn gilt:

- (1) Für alle $x \in N$ gilt $(x, f(x)) \in M$.
- (2) Für alle $x \in N$ gilt $Q(x, f(x)) = 0$.

24.3.2 Beispiel 1

Aus dem Beispiel oben ist

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 2\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

und es ergibt sich $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Q(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2$.

Sei nun $N =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\subset \mathbb{R}$, dann gilt für $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - x^2}$$

$(x, f(x)) \in M$ und $Q(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in N$. Also ist f eine durch Q impliziert definierte Funktion.

24.3.3 Beispiel 2

Sei $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Q(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

$\{Q(x, y) = 0\}$ ist also genau der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$.

Für folgende x ist $Q(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ also eindeutig nach y auflösbar:

$$\begin{array}{ll} |x| > 1 & \text{unlösbar} \\ |x| = 1 & y = 0 \\ |x| < 1 & y = \pm \sqrt{1 - x^2} \end{array}$$

24.3.4 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, sei $Q : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ r -mal differenzierbar und sei f eine durch Q impliziert definierte Funktion.

Dann ist auch f r -mal differenzierbar.

24.3.5 Satz über implizite Funktionen 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, sei $Q : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $(x, y) \mapsto Q(x, y)$ stetig differenzierbar, $(a, b) \in M$ mit $Q(a, b) = 0$ und sei $D_{(2)}Q(a, b) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ invertierbar.

Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$ und eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ mit $b \in V$, so dass gilt:

- (1) $U \times V \subset M$,
- (2) es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung $f : U \rightarrow V$, so dass $Q(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in U$ gilt,
- (3) f ist stetig differenzierbar,
- (4) $f(a) = b$.

Das heißt $Q(x, y)$ kann in einer Umgebung von (a, b) durch eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow V$ dargestellt werden.

Dabei ist $D_{(2)}Q$ die durch die Projektionen von Q auf $Q_1, \dots, Q_m$ gegebene Determinante (vergleiche Satz über implizite Funktionen 2).

24.3.6 Beispiel 1

Sei $Q(x, y) = x^2 - y^2$. Es soll untersucht werden, für welche $x \in \mathbb{R}$ nun Q durch eine Funktion f mit $Q(x, f(x))$ dargestellt werden kann.

Es gilt

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= 0 \quad \text{für } y = \pm x, \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) &= -2y. \end{aligned}$$

Gesucht sind also alle $x \in \mathbb{R}$, für die $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, \pm x)$ invertierbar ist. Es gilt

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x, \pm x) = \pm 2x,$$

daher folgt, dass $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, \pm x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$ gilt.

Somit ist $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, \pm x) = \pm 2x$ für alle $x \neq 0$ invertierbar und es kann Q in einer Umgebung von $Q(x, f(x))$ durch eine Funktion f dargestellt werden.

24.3.7 Beispiel 2

Sei $Q(x, y) = (x - y)^2$. Es soll untersucht werden, für welche $x \in \mathbb{R}$ nun Q durch eine Funktion f mit $Q(x, f(x))$ dargestellt werden kann.

Es gilt

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= 0 \quad \text{für } y = x, \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) &= -2(x - y). \end{aligned}$$

Gesucht sind also alle $x \in \mathbb{R}$, für die $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, x)$ invertierbar ist. Es gilt

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x, x) = 0,$$

somit ist $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, x)$ für kein $x \in \mathbb{R}$ invertierbar.

Demnach kann Q in keiner Umgebung von $Q(x, f(x))$ durch eine Funktion f dargestellt werden.

24.3.8 Beispiel 3

Sei $Q(x, y) = x^3 + y^3$. Es soll untersucht werden, für welche $x \in \mathbb{R}$ nun Q durch eine Funktion f mit $Q(x, f(x))$ dargestellt werden kann.

Es gilt

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= 0 \quad \text{für } y = -x, \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) &= 3y^2. \end{aligned}$$

Gesucht sind also alle $x \in \mathbb{R}$, für die $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, -x)$ invertierbar ist. Es gilt

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x, -x) = 3x^2,$$

daher folgt, dass $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, -x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$ gilt.

Somit ist $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, -x) = 3x^2$ für alle $x \neq 0$ invertierbar und es kann Q in einer Umgebung von $Q(x, f(x))$ durch eine Funktion f dargestellt werden.

24.3.9 Satz über implizite Funktionen 2

Sei $M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, sei $Q : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, sei (a, b) eine Lösung des durch $Q(x, y) = 0$ gegebenen Gleichungssystems und es gelte für die durch die Projektionen von Q auf $Q_1, \dots, Q_m$ gegebene Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial Q_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \cdot (a, b) \neq 0.$$

Dann kann das Gleichungssystem $Q(x, y) = 0$ in einer Umgebung von (a, b) stetig differenzierbar nach $y = (y_1, \dots, y_m)$ aufgelöst werden.

Bemerkung

Der Satz über implizite Funktionen 1 ist so allgemein gehalten, dass dieser Satz im Grunde nur ein vereinfachter aber ausreichender Spezialfall des ersten Satzes ist.

Beweisskizze

Siehe 27.8.7 auf Seite 306.

24.3.10 Beispiel 1

Sei $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Q(x, y) = x^2 + y^3 - 12$.

Dann ist $(2, 2)$ eine Lösung des Gleichungssystems $Q(x, y) = 0$. Es gilt

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial y} \right| \cdot (2, 2) = \frac{\partial Q}{\partial y} \cdot (2, 2) = 3y^2 \cdot (2, 2) = 12 \neq 0.$$

Somit kann das Gleichungssystems $Q(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(2, 2)$ nach $y = f(x)$ aufgelöst werden.

24.3.11 Beispiel 2

Sei $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Q(x, y, z) = xy + yz + xz - xyz - 4$.

Dann ist $(2, 2, -3)$ eine Lösung des Gleichungssystems $Q(x, y, z) = 0$. Es gilt

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial z} \right| \cdot (2, 2, -3) = \frac{\partial Q}{\partial z} \cdot (2, 2, -3) = y + x - xy \cdot (2, 2, -3) = 0.$$

Das Gleichungssystems $Q(x, y, z) = 0$ kann also in keiner Umgebung von $(2, 2, -3)$ nach $z = f(x, y)$ aufgelöst werden.

24.4 Umkehrsatz und Satz vom Rang

24.4.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und sei $a \in M$.

Dann ist

$$\operatorname{rg}_a f := \operatorname{rang}(Df(a))$$

der **Rang** von f bei a .

24.4.2 Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x^2 - y^2, xy)$. Dann gilt

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Anhand der Determinante $\det(Df(x, y)) = 2x^2 + 2y^2$ erkennt man, dass

$$\operatorname{rg}_a f = \begin{cases} 2 & \text{für } a \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } a = (0, 0) \end{cases}$$

gilt.

24.4.3 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und sei $a \in M$.

a heißt **regulärer Punkt** von f oder f heißt **regulär** bei a , wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (1) $Df(a)$ ist surjektiv.
- (2) $Df(a)$ hat maximalen Rang.
- (3) $\operatorname{rg}_a f = \min\{n, m\}$.

$f(a)$ heißt dann **regulärer Wert** von f .

Ist a nicht regulär, so heißt a **singulärer Punkt** von f und $f(a)$ heißt **kritischer Wert** von f .

24.4.4 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, sei $a \in M$ und sei $\operatorname{rg}_a f = k$.

Dann gibt es eine Umgebung $U \subset M$ mit $a \in U$, so dass für alle $x \in U$ gilt:

$$\operatorname{rg}_x f \geq k$$

24.4.5 Umkehrsatz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ r -mal stetig differenzierbar und sei $a \in M$ ein regulärer Punkt von f .

Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$ und eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ mit $b = f(a) \in V$, so dass es weiter eine Funktion

$$g : V \rightarrow U$$

gibt, die r -mal stetig differenzierbar ist und für die $g(b) = a$ sowie $f \circ g = id_V$ gilt.

g ist also die Umkehrfunktion von f in der Umgebung V .

Beweisskizze

Der Umkehrsatz ist eine Folgerung aus dem Satz über implizite Funktionen.

Sei $Q : M \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $Q(x, y) = x - f(y)$. Dann ist auch Q r -mal stetig differenzierbar und $(a, b) = (f(a), a)$ ist eine Lösung des durch $Q(x, y) = 0$ gegebenen Gleichungssystems. Weiter gilt

$$\det \left(\frac{\partial Q}{\partial y}(a, b) \right) \neq 0,$$

da a ein regulärer Punkt von f ist.

Es gibt nun eine eindeutig bestimmte Auflösungsfunktion $x = g(y)$, was gerade der lokalen Umkehrfunktion von f entspricht.

24.4.6 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar.

f heißt eine **Immersion**, wenn für alle $x \in M$ $\operatorname{rg}_x f = n$ gilt.

f heißt eine **Submersion**, wenn für alle $x \in M$ $\operatorname{rg}_x f = m$ gilt.

24.4.7 Kleiner Satz vom Rang

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ r -mal stetig differenzierbar und sei $a \in M$ mit $\operatorname{rg}_a f = m$.

Dann gibt es offene Menge $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$ und es gibt einen C^r -Diffeomorphismen $g : V \rightarrow U$, so dass gilt:

$$(f \circ g)(x) = Df(a) \cdot (x) \in \mathbb{R}^m \quad \text{für alle } x \in V$$

24.4.8 Satz vom Rang

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ r -mal stetig differenzierbar und sei $a \in M$ mit $\operatorname{rg}_a f = k$ konstant.

Dann gibt es offene Menge $U, V \subset \mathbb{R}^n$, offene Mengen $W, N \subset \mathbb{R}^m$ und zwei C^r -Diffeomorphismen $g : V \rightarrow U$ und $h : N \rightarrow W$, so dass gilt:

(1) $f(U) \subset N$

(2) $(h \circ f \circ g)(x) = Df(a) \cdot (x) \in \mathbb{R}^m$ für alle $x \in V$

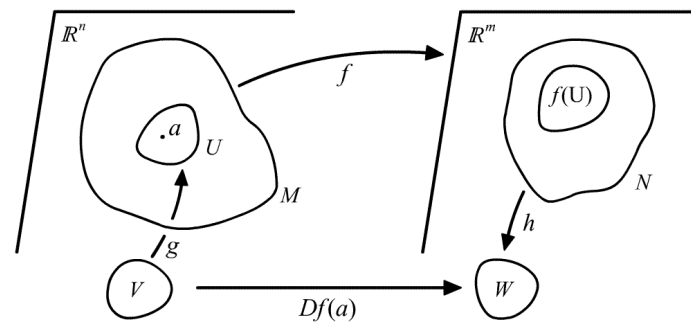


Abbildung 27

24.5 Aufgaben

24.5.1 Aufgabe 1

Sei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy - z \log y + e^{xz} = 1\}$.

Zeige, ob sich M in einer Umgebung von $(0, 1, 1)$ als Graph von $y = f(x, z)$ oder von $z = g(x, y)$ darstellen lässt.

Lösung

Sei $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Q(x, y, z) = xy - z \log y + e^{xz} - 1$. Dann ist $Q(x, y, z) = 0$ also das zu M gehörige homogene Gleichungssystem.

Da Q stetig differenzierbar und $(0, 1, 1)$ eine Lösung dieses Gleichungssystems ist, lässt sich durch den Satz über implizite Funktionen überprüfen, ob Q in einer Umgebung von $(0, 1, 1)$ nach $y = f(x, z)$ auflösbar ist. Es gilt

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial y} \right| = \frac{\partial Q}{\partial y} = x - \frac{z}{y} \quad \text{und}$$

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial y} \right| \cdot (0, 1, 1) = 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

Das Gleichungssystem $Q(x, y, z) = 0$ kann also in einer Umgebung von $(0, 1, 1)$ nach $y = f(x, z)$ aufgelöst werden.

Demnach kann M in einer Umgebung von $(0, 1, 1)$ als Graph von $y = f(x, z)$ dargestellt werden.

Weiter ist zu überprüfen, ob Q in einer Umgebung von $(0, 1, 1)$ nach $z = g(x, y)$ auflösbar ist.

Es gilt

$$\left| \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right| = \frac{\partial Q}{\partial z} = \log y + xe^{xz} \quad \text{und} \\ \left| \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right| (0, 1, 1) = 0 + 0 = 0.$$

Das Gleichungssystem $Q(x, y, z) = 0$ kann also in keiner Umgebung von $(0, 1, 1)$ nach $y = f(x, z)$ aufgelöst werden.

M kann also in keiner Umgebung von $(0, 1, 1)$ als Graph von $y = f(x, z)$ dargestellt werden.

24.5.2 Aufgabe 2

Sei die Menge M gegeben durch

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 20 \text{ oder } x - xy + z = 4\}.$$

Zeige, ob sich M in einer Umgebung von $(0, 2, 4)$ als Graph von $y = f_1(x)$ oder von $z = f_2(x)$ darstellbar lässt.

Lösung

Seien $Q_1, Q_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$Q_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 20 \quad \text{und} \\ Q_2(x, y, z) = x - xy + z - 4.$$

Dann bilden $Q_1(x, y, z) = 0$ und $Q_2(x, y, z) = 0$ das zu M gehörigen homogene Gleichungssystem.

Da Q_1 und Q_2 stetig differenzierbar sind und $(0, 2, 4)$ eine Lösung des Gleichungssystems ist, kann der Satz über implizite Funktionen angewendet werden. Es gilt

$$D \cdot (x, y, z) := \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial y} & \frac{\partial Q_1}{\partial z} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial y} & \frac{\partial Q_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 2y + 2xz.$$

Da $D \cdot (0, 2, 4) = 4 \neq 0$, kann $Q = (Q_1, Q_2)$ also in einer Umgebung von $(0, 2, 4)$ nach $y = f_1(x)$ und $z = f_2(x)$ aufgelöst werden und somit lässt sich M in dieser Umgebung als Graph von $y = f_1(x)$ und $z = f_2(x)$ darstellen.

24.5.3 Aufgabe 3

Sei $Q(x, y) = x^2 - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}y^4$.

Untersuche, für welche $x \in \mathbb{R}$ nun Q durch eine Funktion f mit $Q(x, f(x))$ dargestellt werden kann.

Lösung

Gesucht sind zunächst alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $Q(x, y) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}y^4 &= 0 &\Rightarrow & x_{1,2} = \frac{1}{4}y^2 \pm \sqrt{\frac{1}{16}y^4 + \frac{1}{2}y^4} \\ & & & x_{1,2} = \frac{1}{4}y^2 \pm \sqrt{\frac{9}{16}y^4} \\ & & & x_{1,2} = \frac{1}{4}y^2 \pm \frac{3}{4}y^2 \\ & & & x = -\frac{1}{2}y^2 \quad \text{oder} \quad x = y^2 \end{aligned}$$

Somit gilt also

$$y = \pm \sqrt{-2x} \quad \text{für } x \leq 0 \quad \text{oder} \quad y = \pm \sqrt{x} \quad \text{für } x \geq 0.$$

Gesucht sind alle x , für die $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$ mit $Q(x, y) = 0$ invertierbar ist. Es gilt

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = -xy - 2y^3.$$

Für alle $(x, y) \neq (x, 0)$ ist demnach $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \neq 0$.

Auf dieser Menge kann $Q(x, f(x))$ also in einer Umgebung von x durch eine Funktion f dargestellt werden.

25 Integrationstheorie

Die Integrationstheorie für die mehrdimensionale Integration kann auf unterschiedliche Weisen hergeleitet werden, alle späteren Sätze sind jedoch im Grunde äquivalent.

Dieses Kapitel erklärt exemplarisch das Lebesgue Integral.

25.1 Elementarintegrale

25.1.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht leere Menge und seien $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ zwei beliebige Funktionen.

Dann gelten folgende Definitionen punktweise ($f + g$ heißt also $f(x) + g(x)$ für alle $x \in M$):

- (1) $f + g, f \cdot g, \lambda f, |f|$
- (2) $f \vee g := \max\{f, g\}$
- (3) $f \wedge g := \min\{f, g\}$
- (4) $f^+ := f \vee 0$
- (5) $f^- := -(f \wedge 0)$

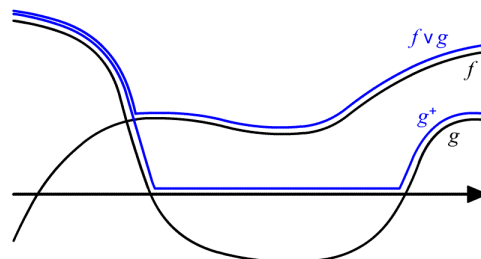


Abbildung 28

25.1.2 Definition und Satz

Sei $\mathcal{E}$ ein Vektorraum von reellen Funktionen auf einer nicht leeren Menge M .

Dann sind äquivalent:

- (1) $f \in \mathcal{E} \Rightarrow |f| \in \mathcal{E}$
- (2) $f \in \mathcal{E} \Rightarrow f^+ \in \mathcal{E}$
- (3) $f \in \mathcal{E} \Rightarrow f^- \in \mathcal{E}$

$$(4) \quad f, g \in \mathcal{E} \Rightarrow f \vee g \in \mathcal{E}$$

$$(5) \quad f, g \in \mathcal{E} \Rightarrow f \wedge g \in \mathcal{E}$$

Ein Vektorraum $\mathcal{E}$ mit diesen Eigenschaften heißt **Rieszscher Raum**.

25.1.3 Definition

Sei $\mathcal{E}$ ein Rieszscher Raum auf M .

Eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \mu(f)$$

heißt **positives lineares Funktional**, wenn gilt:

$$(1) \quad \mu \text{ ist linear}$$

$$(2) \quad \text{aus } f \in \mathcal{E} \text{ mit } f \geq 0 \text{ folgt } \mu(f) \geq 0$$

25.1.4 Definition

Sei $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ ein solches positives lineares Funktional auf einem Rieszschen Raum $\mathcal{E}$.

Dann heißt $(\mathcal{E}, \mu)$ **Elementarintegral** oder **Präintegral**, wenn gilt:

$$\forall f_n \in \mathcal{E} : f_n \searrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) = 0$$

25.1.5 Beispiel

Sei $M = \mathbb{N}$ und sei $\mathcal{E} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists N \forall n > N : f(n) = 0\}$, also die Menge aller abbrechender Folgen.

Dann ist $\mathcal{E}$ ein Rieszscher Raum und bildet zusammen mit

$$\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

ein Elementarintegral.

25.2 Treppenfunktion

25.2.1 Definition

Seien $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ offene, geschlossene oder halboffene Intervalle.

Dann heißt

$$Q = I_1 \times \dots \times I_n$$

ein (**achsenparalleler**) **Quader**.

$$v(Q) := l(I_1) \cdot \dots \cdot l(I_n)$$

ist das Volumen von Q , dabei ist $l(I_i)$ die Länge von I_i für $i = 1, \dots, n$.

25.2.2 Definition

Sei M eine nicht leere Menge und sei $A \subset M$.

Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} 1_A : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \in M \setminus A \end{cases} \end{aligned}$$

die *charakteristische Funktion* von A .

25.2.3 Definition

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es zu r Quadern $Q_i \subset \mathbb{R}^n$ gerade r Werte $c_i \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

$$f(x) = \sum_{i=1}^r c_i 1_{Q_i}(x)$$

$\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge aller Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$.

25.2.4 Folgerung

Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ gibt es paarweise disjunkte Quader $Q_1, \dots, Q_r$ mit

$$f(x) = \sum_{i=1}^r c_i \cdot 1_{Q_i}(x).$$

25.2.5 Satz 1

$\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Riezischer Raum.

25.2.6 Definition und Satz

Sei $f \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ mit $f = \sum_{i=1}^r c_i \cdot 1_{Q_i}(x)$.

Dann hängt die Abbildung

$$\lambda_n : \mathcal{T}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) \mapsto \sum_{i=1}^r c_i \cdot v(Q_i)$$

weder von der Wahl der Quader Q_i noch von der Zahl r ab.

25.2.7 Satz 2

$(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ ist ein Elementarintegral.

25.3 Lebesgue Integral

25.3.1 Definition

Sei $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Dann gilt:

- (1) $a + \infty = \infty + a = \infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$
- (2) $\infty + \infty = \infty + \infty = \infty$
- (3) $c \cdot \infty = \infty \cdot c = \infty$ für alle $c > 0$
- (4) $c \cdot -\infty = -\infty \cdot c = -\infty$ für alle $c > 0$
- (5) $c \cdot \infty = \infty \cdot c = -\infty$ für alle $c < 0$
- (6) $c \cdot -\infty = -\infty \cdot c = \infty$ für alle $c < 0$
- (7) $c \cdot \infty = \infty \cdot c = 0$ für $c = 0$
- (8) $-\infty + \infty$ ist nicht erlaubt

25.3.2 Definition und Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und sei

$$\mathcal{E}^\times := \{f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid \text{es gibt eine Folge } f_n \in \mathcal{E} \text{ mit } f_n \nearrow f\}.$$

Dann gilt:

- (1) Aus $f \in \mathcal{E}^\times$ folgt $f(x) \neq -\infty$ für alle $x \in M$.
- (2) $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^\times$.
- (3) Für $f, g \in \mathcal{E}^\times$ sind auch $f + g$, $f \vee g$, $f \wedge g$, $c \cdot f$ mit $c \in \mathbb{R}$ alle Elemente von $\mathcal{E}^\times$.
- (4) Aus $f_n \in \mathcal{E}^\times$ mit $f_n \nearrow f$ folgt $f \in \mathcal{E}^\times$.

25.3.3 Satz 1

Sei $(\mathcal{E}^\times, \mu)$ ein Elementarintegral, seien $f, g \in (\mathcal{E}^\times, \mu)$ und seien $f_n, g_n \in \mathcal{E}$ mit $f_n \nearrow f$ und $g_n \nearrow g$.

Dann gilt:

- (1) Aus $f \leq g$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(g_n)$.
- (2) Aus $f = g$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(g_n)$.

25.3.4 Definition und Satz

Sei $(\mathcal{E}^\times, \mu)$ ein Elementarintegral, sei $f \in (\mathcal{E}^\times, \mu)$ und sei $f_n \in \mathcal{E}$ mit $f_n \nearrow f$.

Für die Abbildung

$$\mu^\times : \mathcal{E}^\times \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n)$$

gilt dann:

(1) $\mu^\times|_{\mathcal{E}} = \mu$.

(2) Aus $f, g \in \mathcal{E}^\times$ folgt $\mu^\times(f + g) = \mu^\times(f) + \mu^\times(g)$.

25.3.5 Definition

Sei $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

$$\mu^{\times \times}(f) := \inf\{\mu^\times(g) \mid g \in \mathcal{E}^\times \text{ mit } f \leq g\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

heißt **oberes Integral** von f .

$\mu_{\times \times}(f) := -\mu^{\times \times}(-f)$ heißt **unteres Integral** von f .

f heißt **integrierbar** bezüglich $(\mathcal{E}, \mu)$, wenn gilt:

$$\mu^{\times \times}(f) = \mu_{\times \times}(f) \in \mathbb{R}$$

$\overline{\mu}(f) = \mu^{\times \times}(f) = \mu_{\times \times}(f)$ heißt dann das **Integral** von f .

f heißt **Lebesgue integrierbar**, wenn f integrierbar bezüglich μ ist.

25.3.6 Satz 2

Sei $(\mathcal{E}^\times, \mu)$ ein Elementarintegral und sei $f_n \in \mathcal{E}$ mit $f_n \geq 0$.

Dann gilt

$$\mu^{\times \times}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{\times \times}(f_n).$$

25.3.7 Satz 3

Sei $(\mathcal{E}^\times, \mu)$ ein Elementarintegral und sei $f \in \mathcal{E}^\times$.

Dann ist f genau dann integrierbar, wenn $\mu^\times(f) < \infty$ gilt.

25.3.8 Satz 4

Sei $(\mathcal{E}^\times, \mu)$ ein Elementarintegral und sei $f \in \mathcal{E}^\times$.

Ist f integrierbar, so gilt $\overline{\mu}(f) = \mu^\times(f)$.

25.3.9 Definition und Satz

Sei

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mu) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist integrierbar}\}.$$

Dann ist $(\mathcal{L}, \bar{\mu})$ ein Elementarintegral.

25.3.10 Definition

$$\left(\mathcal{L}(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n), \lambda_n), \overline{\lambda_n} \right)$$

heißt das *Lebesgue Integral* auf $\mathbb{R}^n$.

Schreibweise

$$\int_M f(x) \, d\lambda_n(x)$$

ist das Integral der Funktion f bezüglich λ_n über der Menge M integriert nach x .

25.4 Konvergenzsätze

25.4.1 Definition

Sei $(\mathcal{E}, \mu)$ ein Elementarintegral auf M .

$N \subset M$ heißt eine *Nullmenge* bezüglich $(\mathcal{E}, \mu)$, wenn $\mu^{\times \times} 1_N = 0$ gilt.

25.4.2 Folgerung

- (1) Die leere Menge ist eine Nullmenge.
- (2) Teilmengen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.
- (3) Endliche Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.

25.4.3 Satz 1

Das Innere einer Nullmenge ist stets leer.

25.4.4 Beispiele

- (1) Alle Geraden im Raum sind Nullmengen.
- (2) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist eine Nullmenge.
- (3) Der Graph jeder stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

(4) Sei $(\lambda_n, \mathcal{T}(\mathbb{R}^n))$ das Elementarintegral über den Treppenfunktionen und sei

$$Q = \{x\} \times I_2 \times \dots \times I_n$$

ein Quader.

Dann gilt $v(Q) = 0$ und $\lambda_n 1_Q = 0$, also ist Q eine Nullmenge.

25.4.5 Definition

Sei M eine beliebige Menge und sei N eine geeignete Nullmenge.

Eine Aussage gilt **fast überall**, wenn die Aussage auf $M \setminus N$ gilt.

25.4.6 Satz von B.Levi (monotone Konvergenz)

Seien f_n integrierbar und es gelte $f_n \nearrow f$ fast überall.

Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu.$$

25.4.7 Lemma von Fatou

Seien f_n nicht negativ, f_n konvergiere fast überall gegen f und es gebe ein $g : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $\mu^{\times \times} g < \infty$. Es gelte weiter $f_n \leq g$ fast überall.

Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mu} f_n \leq \overline{\mu} f.$$

25.4.8 Satz von Lebesgue (majorantische Konvergenz)

Seien f_n integrierbar und es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ punktweise und fast überall.

Es gebe weiter ein $g : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $\mu^{\times \times} g < \infty$ und es gelte $|f_n| \leq g$ fast überall.

Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\overline{\mu} f = \overline{\mu} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mu} f_n.$$

Gibt es also solch eine Funktion g mit $|f_n| \leq g$ fast überall, dann ist Grenzwert und Integral vertauschbar.

25.5 Rechenregeln

25.5.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

$$Trf := \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}$$

heißt der **Träger** von f und ist stets abgeschlossen.

Es sei weiter

$$\mathcal{K}(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig und } Trf \text{ ist kompakt in } M\}.$$

25.5.2 Satz 1

$\mathcal{K}(M)$ ist ein Rieszscher Raum und bildet zusammen mit jeder positiven linearen Funktion $\mu : \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Elementarintegral.

25.5.3 Multiplikation mit Funktionen

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\mu : \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Elementarintegral und seien

$$\begin{aligned} h : M &\rightarrow]0, \infty[\\ \mu_h : \mathcal{K}(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \mu(f \cdot h). \end{aligned}$$

Dann ist $\mu_h^{\times \times} f = \mu^{\times \times} (f \cdot h)$ und es gilt

$$\int_M f(x) \, d\mu_h(x) = \int_M f(x) \cdot h(x) \, d\mu(x).$$

25.5.4 Transport mit Homöomorphismen

Seien $M, N \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\varphi : M \rightarrow N$ ein Homöomorphismus und sei

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{K}(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \mu(f \circ \varphi) \end{aligned}$$

ein Elementarintegral.

Dann sei

$$(\varphi_{\#}\mu)f := \mu(f \circ \varphi).$$

25.5.5 Satz 2

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$ und sei

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \alpha x\end{aligned}$$

ein Homöomorphismus. Sei weiter $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ λ_n integrierbar.

Dann gilt $\varphi_\# \lambda_n = \frac{1}{|\alpha^n|} \lambda_n$ und es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\alpha x) d\lambda_n(x) = \frac{1}{|\alpha^n|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda_n(x).$$

25.6 Zusammenfassung

In der folgenden Übersicht sind noch einmal die wichtigsten Punkte der Integrationstheorie zusammengetragen.

25.6.1 Integrationstheorie im Mehrdimensionalen

- (1) Definition eines Rieszchen Raumes.
- (2) Definition eines positiv linearen Funktional.
- (3) Definition eines Elementarintegrals.
- (4) Definition einer Treppenfunktion mit $\sum_{i=1}^n c_i 1_{Q_i}(x)$.
- (5) Definition der Abbildung $\lambda_n : \mathcal{T}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$.
- (6) Satz, dass $(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ ein Elementarintegral ist.
- (7) Definition von

$$\mathcal{E}^\times = \{f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid \text{es gibt eine Folge } f_n \in \mathcal{E} \text{ mit } f_n \nearrow f\}.$$

- (8) Definition der Abbildung $\mu^\times : \mathcal{E}^\times \rightarrow \mathbb{R}$ als Fortsetzung von μ .
- (9) Definition von

$$\mu^{\times \times}(f) = \inf\{\mu^\times(g) \mid g \in \mathcal{E}^\times \text{ mit } f \leq g\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

- (10) Eine Funktion f heißt nun integrierbar, wenn

$$\mu^{\times \times}(f) = \mu_{\times \times}(f) =: \bar{\mu}(f)$$

gilt.

(11) Definition von

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mu) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist integrierbar}\}.$$

(12) $(\mathcal{L}(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n), \lambda_n), \overline{\lambda_n})$ heißt dann gerade das Lebesgue Integral auf $\mathbb{R}^n$.

Nach den Definitionen einer Nullmenge N durch $\mu^{\times \times} 1_N = 0$ und den fast überall Aussagen sind nun die Konvergenzsätze von B. Levi sowie Lebesgue die wichtigsten Ergebnisse der Integrationstheorie.

25.7 Aufgaben

25.7.1 Aufgabe 1

Prüfe, wobei es sich um ein Elementarintegrale $(\mathcal{E}, \mu)$ handelt.

- (1) $\mathcal{E} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar, } f > 0\}$ mit $\mu(f) = f'(0)$.
- (2) $\mathcal{E} = \{\lambda \text{id}_{[0, \infty[} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit $\mu(f) = f(1)$.
- (3) $\mathcal{E} = \{\lambda \text{id}_{\mathbb{R}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit $\mu(f) = f(1)$.
- (4) $\mathcal{E} = \mathcal{C}(\mathbb{R}) =$ Menge aller stetigen Funktionen f mit $\mu(f) = f(a)$ und a fest.

Lösung

Es ist also jeweils zu überprüfen, ob gilt:

- (1) $\mathcal{E}$ ist ein Riezscherscher Raum.
- (2) μ ist ein positives lineares Funktional.
- (3) Für alle $f_n \in \mathcal{E}$ mit $f_n \searrow 0$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) = 0$.

Teil 1

$\mathcal{E}$ ist ein Riezscherscher Raum, μ aber kein positives lineares Funktional, denn zum Beispiel ist $f(x) = e^{-x}$ ein Gegenbeispiel.

Somit ist $(\mathcal{E}, \mu)$ kein Elementarintegral.

Teil 2

$\mathcal{E}$ ist ein Riezscherscher Raum, μ ist ein positives lineares Funktional und alle gegen 0 konvergenten Funktionenfolgen haben den Grenzwert 0.

Somit ist $(\mathcal{E}, \mu)$ ein Elementarintegral.

Teil 3

$\mathcal{E}$ ist kein Riezischer Raum.

Somit ist $(\mathcal{E}, \mu)$ kein Elementarintegral.

Teil 4

$\mathcal{E}$ ist ein Riezischer Raum, μ ist ein positives lineares Funktional da a fest ist und alle gegen 0 konvergenten Funktionenfolgen haben den Grenzwert 0.

Somit ist $(\mathcal{E}, \mu)$ ein Elementarintegral.

26 Integration

Alle folgenden Sätze lassen sich aus der Lebesgue-Theorie sowie aus anderen Integrationstheorien folgern.

26.1 Integrationsregeln

26.1.1 Satz von Fubini

Einfache Form

Sei $I = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset \mathbb{R}^2$ ein Quader und sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrierbar.

Dann gilt

$$\int_I f(x, y) \, dx dy = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1}^{y_2} f(x, y) \, dy \right) dx .$$

Allgemeine Form

Sei $I_x \subset \mathbb{R}^k$ und $I_y \subset \mathbb{R}^l$, sei $I = I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 < k, l < n$ sowie $k + l = n$ und sei weiter $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gerade λ_n integrierbar.

Dann gilt

$$\int_I f(x, y) \, dx dy = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y) \, dy \right) dx .$$

26.1.2 Bemerkung 1

Beim Satz von Fubini kann die Reihenfolge von x und y stets vertauscht werden, das heißt es gilt

$$\int_I f(x, y) \, dx dy = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) \, dx \right) dy .$$

Solange noch nicht feststeht, ob erst nach x oder erst nach y integriert wird, so schreibt man auch

$$\int_I f(x, y) \, dx dy = \int_I f(x, y) \, d(x, y).$$

26.1.3 Bemerkung 2

Um eine Lebesgue integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n > 2$ zu integrieren, kann der Satz von Fubini also rekursiv mehrmals angewendet werden.

26.1.4 Beispiel

Berechne $\int_I (2x + 2y) \, dy dx$ auf $I = [0, 1] \times [0, 1]$.

Lösung

Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned} \int_I (2x + 2y) \, dy dx &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 (2x + 2y) \, dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 [2xy + y^2]_{y=0}^1 dx \\ &= \int_{x=0}^1 (2x + 1) dx \\ &= [x^2 + x]_{x=0}^1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

26.1.5 Prinzip von Cavalieri

Das Prinzip von Cavalieri ist genau genommen ein Spezialfall des Satzes von Fubini.

Seien $K, L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zwei Mengen und sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Seien

$$\begin{aligned} K_t &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, t) \in K\} \subset \mathbb{R}^n \quad \text{und} \\ L_t &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, t) \in L\} \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ist für alle $t \in \mathbb{R}$ das Volumen von $K_t = L_t$, so haben auch K und L gleiches Volumen.

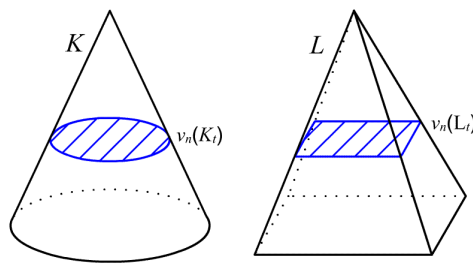


Abbildung 29

26.2 Transformationsformel

26.2.1 Substitutionsregel oder Transformationsformel

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und es gelte für alle $x \in M$

$$\det(D\Phi(x)) \neq 0.$$

Dann ist auch $N = \Phi(M)$ offen in $\mathbb{R}^n$.

Sei weiter $f : \Phi(M) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Dann ist f genau dann λ_n integrierbar über N , wenn $f(\Phi) \cdot |\det(D\Phi)|$ gerade λ_n integrierbar über M ist.

Es folgt dann

$$\int_N f(y) \, dy = \int_M f(\Phi(x)) \cdot |\det(D\Phi(x))| \, dx.$$

26.2.2 Beispiel

Berechne $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, d(x,y)$.

Lösung

Sei $\Phi : M =]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\Phi(x, y) = (x \cos y, x \sin y).$$

Dann ist $\Phi(M) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, 0) \mid u \geq 0\}$ und es gilt

$$\det(D\Phi(x, y)) = \det \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix} = x \cos^2 y + x \sin^2 y = x > 0.$$

Sei $f : \Phi(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

Da $\{(u, 0) \mid u > 0\}$ eine Nullmenge ist, kann f auf ganz $\mathbb{R}^2$ betrachtet werden.

Aus der Transformationsformel folgt nun

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} f \, d(x, y) &= \int_M (f(\Phi(x, y)) \cdot |\det(D\Phi(x, y))| \, d(x, y)) \\
 &= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{2\pi} e^{-[(x \cos y)^2 + (x \sin y)^2]} x \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{2\pi} x e^{-x^2} \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=0}^{\infty} \left[x y e^{-x^2} \right]_{y=0}^{2\pi} \, dx \\
 &= 2\pi \int_{x=0}^{\infty} x e^{-x^2} \, dx \quad \Big| \quad t := x^2, \, dt = 2x \, dx \\
 &= 2\pi \int_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-t} \, dt \\
 &= \pi \left[-e^{-t} \right]_{t=0}^{\infty} \, dt = \pi.
 \end{aligned}$$

26.3 Volumenberechnung im Raum

Hat man eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch zum Beispiel

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a < x < b, \, 0 < y < g(x), \, 0 < z < f(x, y)\},$$

so ergibt sich für das Volumen V_M dieser Menge

$$V_M = \int_M 1_M \, d(x, y, z),$$

dabei sind f, g stetige Funktionen und 1_M ist die charakteristische Funktion auf der Menge M .

26.3.1 Zylinderkoordinaten

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a < x < b, \, -g(x) < y < g(x), \, 0 < z < f(x, y)\}.$$

Durch Anwenden der Transformationsformel mit

$$\begin{aligned}
 \Phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 (r, \varphi) &\mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))
 \end{aligned}$$

lässt sich die Menge M durch geeignete Wahl von φ_1 und φ_2 sowie den Integrationsgrenzen in so genannten **Zylinderkoordinaten** darstellen, um

das Volumen V_M leichter berechnen zu können.

Es ergibt sich dann

$$V_M = \int_M 1_M \, d(x, y, z) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(\Phi(x, y)) \cdot r \, dr d\varphi.$$

Ein Beispiel hierzu siehe 26.5.5 auf Seite 274.

26.3.2 Polarkoordinaten

Ein Spezialfall von Zylinderkoordinaten zur Berechnung eines Volumenintegrals sind **Polarkoordinaten**.

Damit lässt sich das Volumen unter einer Funktion $f(x, y)$ mit einem Kreissektor vom Radius R um den Ursprung als Grundfläche berechnen.

Wiederum durch Anwenden der Transformationsformel mit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \varphi) &\mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

lässt sich eine solches Volumen V_M durch geeignete Wahl von φ_1 und φ_2 darstellen.

Es ergibt sich dann

$$V_M = \int_M 1_M \, d(x, y, z) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^R f(\Phi(x, y)) \cdot r \, dr d\varphi.$$

26.3.3 Beispiel

Sei $f(x, y) = xy^2$ und $M \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < \sqrt{R^2 - y^2}, 0 < y < R, 0 < z < f(x, y)\}.$$

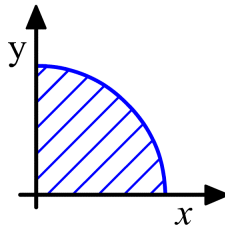


Abbildung 30

Das Volumen V_M ist also das Volumen unter dem Graphen der Funktion $f(x, y)$ mit einem Viertelkreis als Grundfläche. In diesem Fall lässt sich das Volumen in kartesischen sowie Polarkoordinaten berechnen:

Kartesische Koordinaten

Die Grenzen des Volumenintegrals ergeben sich direkt aus der gegebenen Menge M . Es gilt also

$$\begin{aligned}
 V_M &= \int_M 1_M \, d(x, y, z) = \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} xy^2 \, dx \, dy \\
 &= \int_0^R \frac{1}{2} (R^2 - y^2) y^2 \, dy \\
 &= \int_0^R \left(\frac{1}{2} R^2 y^2 - \frac{1}{2} y^4 \right) dy \\
 &= \left[\frac{1}{6} R^2 y^3 - \frac{1}{10} y^5 \right]_{y=0}^R \\
 &= \frac{1}{15} R^5.
 \end{aligned}$$

Polarkoordinaten

In Polarkoordinaten gilt nun $x = r \cos(\varphi)$ und $y = r \sin(\varphi)$. Um den gegebenen Viertelkreis zu erhalten, muss φ in den Grenzen von 0 bis $\pi/2$ gewählt werden. Es folgt somit

$$\begin{aligned}
 V_M &= \int_M 1_M \, d(x, y, z) = \int_0^{\pi/2} \int_0^R f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \cdot r \, dr \, d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^R r \cos(\varphi) \cdot r^2 \sin^2(\varphi) \cdot r \, dr \, d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^4 \cos(\varphi) \sin^2(\varphi) \, dr \, d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{5} R^5 \cos(\varphi) \sin^2(\varphi) \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{5} R^5 \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \sin^2(\varphi) \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{5} R^5 \cdot \left[\frac{\sin^3(\varphi)}{3} \right]_{\varphi=0}^{\pi/2} \\
 &= \frac{1}{5} R^5 \cdot \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{15} R^5.
 \end{aligned}$$

26.4 Parameterintegrale

26.4.1 Satz 1 (Ableiten nach der oberen Grenze)

Sei f stetig und sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt.$$

Dann gilt

$$F'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} = f(x).$$

Das heißt man differenziert nach der oberen Grenze, indem man diese in den stetigen Integranden einsetzt.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem Hauptsatz der Analysis.

26.4.2 Satz 2 (Ableiten nach Parameter im Integranden)

Sei $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig und sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) \, dt.$$

Dann gilt

$$F'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \, dt.$$

Das heißt man differenziert nach einem Parameter im Integranden, indem man die stetige partielle Ableitung nach diesem Parameter integriert.

26.4.3 Satz 3 (Ableiten durch Ersetzen der Grenzen)

Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \mathcal{F}(u, v, x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) \, dt.$$

Dann gilt

$$F'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} = f(x, v(x)) \cdot v'(x) - f(x, u(x)) \cdot u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \, dt.$$

26.4.4 Beispiel

Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} \, dt.$$

Berechne $F'(x)$.

Lösung nach Satz 1

Sei $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$G(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Nach Satz 1 folgt also

$$G'(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \int_1^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt - \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt \\ &= G(x^3) - G(x^2). \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel folgt nun

$$\begin{aligned} F'(x) &= (G(x^3) - G(x^2))' \\ &= G'(x^3) \cdot 3x^2 - G'(x^2) \cdot 2x \\ &= \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot 3x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot 2x \\ &= 3 \cdot \frac{\sin x^3}{x} - 2 \cdot \frac{\sin x^2}{x}. \end{aligned}$$

Lösung nach Satz 3

Sei

$$F(x) = \mathcal{F}(u, v, x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt.$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} u(x) = x^2 &\Rightarrow u'(x) = 2x \\ v(x) = x^3 &\Rightarrow v'(x) = 3x^2 \\ f(x, t) = \frac{\sin t}{t} &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 0 \end{aligned}$$

Nach Satz 3 folgt nun

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x, v(x)) \cdot v'(x) - f(x, u(x)) \cdot u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \\ &= f(x, x^3) \cdot v'(x) - f(x, x^2) \cdot u'(x) + \int_{x^2}^{x^3} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \\ &= \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot 3x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot 2x + \int_{x^2}^{x^3} 0 dt \\ &= 3 \cdot \frac{\sin x^3}{x} - 2 \cdot \frac{\sin x^2}{x}. \end{aligned}$$

26.5 Aufgaben

26.5.1 Aufgabe 1

Berechne

$$\int_I \frac{\sin x}{x} dx dy$$

auf $I = [0, 1] \times [0, x]$.

Lösung

Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned} \int_I \frac{\sin x}{x} dx dy &= \int_I \frac{\sin x}{x} dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^x \frac{\sin x}{x} dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left[\frac{\sin x}{x} \cdot y \right]_{y=0}^x dx \\ &= \int_{x=0}^1 \sin x dx \\ &= [-\cos x]_{x=0}^1 \\ &= 1 - \cos 1. \end{aligned}$$

Die Überlegung, ob man zuerst nach x oder nach y integriert kann von großer Bedeutung sein. Bei dieser Aufgabe würde es sehr viel schwieriger werden, wenn man zuerst nach x und nicht nach y integriert würde.

26.5.2 Aufgabe 2

Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_{e^{3x}}^{\sin x} x^2 t dt.$$

Berechne $F'(x)$.

Lösung

Sei

$$F(x) = \mathcal{F}(u, v, x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt.$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} u(x) = e^{3x} &\Rightarrow u'(x) = 3e^{3x} \\ v(x) = \sin x &\Rightarrow v'(x) = \cos x \\ f(x, t) = x^2 t &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 2xt \end{aligned}$$

Es folgt nun

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x, v(x)) \cdot v'(x) - f(x, u(x)) \cdot u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \, dt \\ &= x^2 \sin x \cdot \cos x - x^2 e^{3x} \cdot 3e^{3x} + \int_{e^{3x}}^{\sin x} 2xt \, dt. \end{aligned}$$

26.5.3 Aufgabe 3

Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\}$. Berechne

$$\int_M x^2 y \, d\lambda_2(x, y).$$

Lösung

Für die Menge M gilt

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, y < 1 - x\},$$

demnach folgt

$$\begin{aligned} \int_M x^2 y \, d(x, y) &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} x^2 y \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=0}^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 x^2 (1-x)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 x^2 - 2x^3 + x^4 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{5} x^5 \right]_{x=0}^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

26.5.4 Aufgabe 4

Berechne das Volumen eines Kreiszylinders im $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe der Transformationsformel.

Lösung

Sei V das Volumen eines Kreiszylinders im $\mathbb{R}^3$ mit dem Radius r und der Höhe h .

Das Volumen kann dann genau berechnet werden als Integral unter der konstanten Funktion $f = h$ auf der Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\},$$

das heißt

$$V = \int_M f \, d(x, y).$$

Sei

$$\begin{aligned} \Phi :]0, r[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x \cos(y), x \sin(y)). \end{aligned}$$

Dann ist das Bild von Φ genau M , es gilt $|\det(D\Phi(x, y))| = x$ und es folgt nach der Transformationsformel

$$\begin{aligned} V &= \int_M f \, d(x, y) \\ &= \int_{y=0}^{2\pi} \int_{x=0}^r f(\Phi(x, y)) \cdot |\det(D\Phi(x, y))| \, dx dy \\ &= \int_{y=0}^{2\pi} \int_{x=0}^r hx \, dx dy \\ &= \int_{y=0}^{2\pi} \frac{hr^2}{2} \, dy \\ &= \frac{2\pi \cdot hr^2}{2} = \pi r^2 \cdot h. \end{aligned}$$

26.5.5 Aufgabe 5

Aus einer Kugel im $\mathbb{R}^3$ vom Radius $r > 0$ wird ein Zylinder vom Radius $r/2$ so herausgebohrt, dass der Zylindermantel durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

Berechne das Volumen, dass aus der Kugel entfernt wurden ist.

Lösung

Zunächst werden zwei Stammfunktionen berechnet, die später benötigt werden:

(1)

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot x \, dx = -\frac{1}{3} \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^3$$

Wählt man

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad \varphi(x) = r^2 - x^2 \quad \text{und} \quad \varphi'(x) = -2x,$$

so erhält man nach der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int \sqrt{r^2 - x^2} x \, dx &= -\frac{1}{2} \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int f(z) \, dz \quad \Big| \quad z = \varphi(x) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (\sqrt{z})^3 \\ &= -\frac{1}{3} \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^3 \end{aligned}$$

(2)

$$\int \sin^3(x) \, dx = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int \sin^3(x) \, dx &= \int \sin(x)(1 - \cos^2(x)) \, dx \\ &= -\cos(x) - \int \sin(x) \cos^2(x) \, dx \\ &= -\cos(x) - \int \sqrt{1 - \cos^2(x)} \cos^2(x) \, dx. \end{aligned}$$

Durch Substitution von $z = \cos(x)$ erhält man

$$\begin{aligned} \int \sin^3(x) \, dx &= -\cos(x) + \int \frac{\sqrt{1 - z^2} \cdot z^2}{\sin(x)} \, dz \\ &= -\cos(x) + \int \frac{\sqrt{1 - z^2} \cdot z^2}{\sqrt{1 - z^2}} \, dz \\ &= -\cos(x) + \frac{z^3}{3} \\ &= -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3}. \end{aligned}$$

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel, deren Mittelpunkt bei $(0,0,0)$ liegt und die den Radius r hat. Weiter sei Z der Teil der Kugel, der oberhalb der xy -Ebene aus der Kugel herausgebohrt wurde. Für das gesuchte Volumen V gilt dann $V = 2V_Z$.

Die Menge Z kann beschrieben werden durch

$$\begin{aligned} Z = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid & 0 \leq x \leq r, \\ & -\sqrt{(r/2)^2 - (x - r/2)^2} \leq y \leq \sqrt{(r/2)^2 - (x - r/2)^2}, \\ & 0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \Big\}. \end{aligned}$$

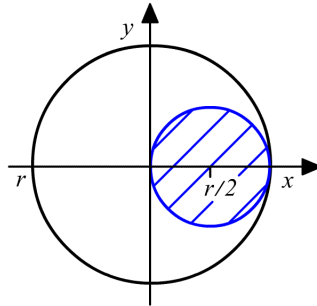


Abbildung 31

Diese Beschreibung der Menge Z ist recht offensichtlich: Nach oben wird Z durch die Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ begrenzt, daher gilt

$$0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}.$$

In der xy -Ebene wird die Grundfläche durch einen Kreis mit dem Radius $(r/2)$ und dem Mittelpunkt $(r/2, 0)$ gegeben, daher gilt

$$-\sqrt{(r/2)^2 - (x - r/2)^2} \leq y \leq \sqrt{(r/2)^2 - (x - r/2)^2} \quad \text{und} \quad 0 \leq x \leq r.$$

Es bietet sich an, die Menge Z in Zylinderkoordinaten darzustellen, um später leichter integrieren zu können. Anhand der Skizze

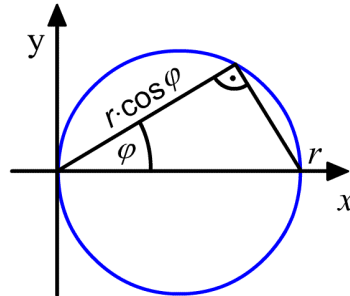


Abbildung 32

erkennt man leicht, dass dann gilt:

$$Z = \left\{ (\varphi, c, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < c < r \cdot \cos(\varphi), 0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - c^2} \right\}$$

Es folgt nun

$$\begin{aligned} V_Z &= \int_Z 1_Z \, d(x, y, z) \\ &= \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{c=0}^{r \cos(\varphi)} \sqrt{r^2 - c^2} \cdot c \, dc \, d\varphi \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\left(\sqrt{r^2 - c^2} \right)^3 \right]_{c=0}^{r \cos(\varphi)} d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3 - \left(\sqrt{r^2 - r^2 \cos^2(\varphi)} \right)^3 d\varphi \\
&= -\frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3 - \left(\sqrt{r^2(1 - \cos^2(\varphi))} \right)^3 d\varphi \\
&= -\frac{r^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - \left(\sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} \right)^3 d\varphi \\
&= -\frac{r^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - |\sin^3(\varphi)| d\varphi \\
&= -\frac{r^3}{3} \left(-\pi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin^3(\varphi)| d\varphi \right) \\
&= -\frac{r^3}{3} \left(-\pi - \int_{-\pi/2}^0 \sin^3(\varphi) d\varphi - \int_0^{\pi/2} \sin^3(\varphi) d\varphi \right) \\
&= -\frac{r^3}{3} \left(-\pi - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right) \\
&= -\frac{r^3}{3} \left(-\pi + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) \\
&= -\frac{r^3}{3} \left(\frac{4}{3} - \pi \right) = \frac{r^3}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right).
\end{aligned}$$

Für das gesuchte Volumen V gilt also

$$V = 2V_Z = \frac{2}{3}r^3 \left(\pi - \frac{4}{3} \right).$$

26.5.6 Aufgabe 6

Durch

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$$

wird im $\mathbb{R}^2$ eine geschlossene Kurve beschrieben, die **Astroide**.

Berechne den von dieser Kurve eingeschlossene Flächeninhalt F mit Hilfe der Transformation $(x, y) \mapsto (x \cos^3(y), x \sin^3(y))$.

Lösung

Sei also $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\Phi(x, y) = (x \cos^3(y), x \sin^3(y)).$$

Dann gilt

$$|\det(D\Phi(x, y))| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos^3(y) & -3x \cos^2(y) \sin(y) \\ \sin^3(y) & 3x \cos(y) \sin^2(y) \end{pmatrix} \right| = \frac{3}{4} x \sin^2(2y).$$

Sei

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1\}.$$

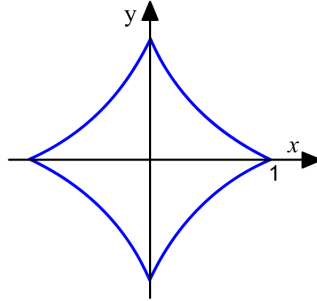


Abbildung 33

Die gesuchte Fläche F ist dann genau

$$F = \int_M 1_M \, d(x, y)$$

mit der charakteristischen Funktion 1_M .

Um die Transformationsformal anwenden zu können, muss eine Menge N gefunden werden, für die $\Phi(N) = M$ gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} &= 1 \\ \sqrt[3]{x \cos^3(y)} + \sqrt[3]{x \sin^3(y)} &= 1 \\ \sqrt[3]{x^2} \cdot (\cos^2(y) + \sin^2(y)) &= 1 \\ x &\leq 1 \end{aligned}$$

Demnach gilt für $N =]0, 1[\times]0, 2\pi[$ genau $\Phi(N) = M$ und es folgt

$$\begin{aligned} F &= \int_M 1_M \, d(x, y) \\ &= \int_N 1_M(\Phi(x, y)) \cdot \frac{3}{4} x \sin^2(2y) \, d(x, y) \\ &= \int_{y=0}^{2\pi} \int_{x=0}^1 \frac{3}{4} x \sin^2(2y) \, dx \, dy \\ &= \int_{y=0}^{2\pi} \left[\frac{3}{8} x^2 \sin^2(2y) \right]_{x=0}^1 \, dy \\ &= \frac{3}{8} \int_{y=0}^{2\pi} \sin^2(2y) \, dy \\ &= \frac{3}{8} \left[\frac{4y - \sin(4y)}{8} \right]_0^{2\pi} = \frac{3}{8} \pi. \end{aligned}$$

27 Beweise

27.1 Zahlensysteme

27.1.1 Binomische Formel

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis

Beweis durch vollständige Induktion:

(IV) Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(IA) Es gilt

$$(a + b)^1 = a + b = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = b + a.$$

(IS) Es gilt

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n \cdot (a + b) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \cdot (a + b) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(a^{k+1} b^{n-k} + a^k b^{n+1-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{(n+1)-(k+1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Die binomische Formel gilt somit für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

27.1.2 Satz von Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c gilt

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Beweis

Folgendes Quadrat besteht aus vier identischen, aber beliebigen, rechtwinkligen Dreiecken mit den Seitenlängen a, b und c und einem großen Quadrat in der Mitte:

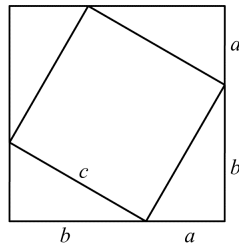


Abbildung 34

Der Flächeninhalt A des gesamten Quadrates lässt sich auf unterschiedlichen Weisen berechnen:

$$(1) \quad A = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2) \quad A = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2 = 2ab + c^2$$

Durch diese beiden Gleichungen erhält man $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$ und somit $a^2 + b^2 = c^2$. $\square$

27.2 Folgen und Funktionalgleichungen

27.2.1 Funktionalgleichung des Logarithmus

Für alle $x, y > 0$ gilt

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y).$$

Beweis

Sei wie üblich $(x_n)_{n \geq 0}$ eine rekursive Folge mit $x_0 = x$ und $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$. Seien nun analog auch $(y_n)_{n \geq 0}$ und $(z_n)_{n \geq 0}$ zwei rekursive Folgen mit $y_0 = y$, $z_0 = z$, $y_{n+1} = \sqrt{y_n}$ und $z_{n+1} = \sqrt{z_n}$.

Es sei dabei stets $z = x \cdot y$. Somit gilt auch $z_n = x_n \cdot y_n$ für alle $n \geq 0$.

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ und die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 2^n(x_n - 1)$ konvergiert gegen $\log(x)$. Überträgt man dieses Ergebnis, so erhält man

$$\begin{aligned} \log(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n(z_n - 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n(x_n y_n - 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n x_n y_n - 2^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n x_n y_n - 2^n x_n + 2^n x_n - 2^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n x_n (y_n - 1) + 2^n (x_n - 1)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n (y_n - 1)) + \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n (x_n - 1)) \\ &= \log(y) + \log(x). \end{aligned}$$

□

27.2.2 Funktionalgleichungen des Arkustangens

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot y < 1$ gilt

$$\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \arctan x + \arctan(y).$$

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot y > -1$ gilt

$$\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \arctan x - \arctan(y).$$

Beweis

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot y < 1$ und sei

$$z = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Definiert man nun wie üblich die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ mit $x_0 = x$ und

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + \sqrt{1 + x_n^2}}$$

sowie ganz analog $(y_n)_{n \geq 0}$ und $(z_n)_{n \geq 0}$, so gilt für alle $n \geq 0$ gerade

$$z_n = \frac{x_n + y_n}{1 - x_n y_n}.$$

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ und die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 2^n x_n$ konvergiert gegen $\arctan(x)$. Überträgt man dieses Ergebnis, so erhält man

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) &= \arctan(z) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n z_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n x_n + 2^n y_n}{1 - x_n y_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n y_n \\ &= \arctan(x) + \arctan(y). \end{aligned}$$

Ersetzt man y durch $-y$, so erhält man die zweite Behauptung. $\square$

27.2.3 Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis

Es gilt $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und $\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$. Für den n -ten Summanden der Produktreihe ergibt sich nach der Binomischen Formel gerade

$$t_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} (x+y)^n.$$

Somit folgt also

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

$\square$

27.2.4 Funktionalgleichung von Sinus und Cosinus

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$$

Beweis

Es gilt nach Definition gerade

$$\cos(x) + i \sin(x) = \exp(ix).$$

Weiter folgt aus

$$\overline{\exp(ix)} = \exp(\overline{ix}) = \exp(-ix) = \frac{1}{\exp(ix)}$$

gerade $\overline{\exp(ix)} \cdot \exp(ix) = 1$. Demnach gilt nun für alle $x \in \mathbb{R}$ auch gerade $|\exp(ix)|^2 = 1$. $\square$

27.2.5 Cauchysches Konvergenzkriterium

$(\mathbb{R}, | \cdot |)$ und $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ sind vollständig metrische Räume.

Beweis 1

Zunächst soll die Behauptung für die reellen Zahlen bewiesen werden. Dabei bietet es sich an, das Dedekindsche Schnittaxiom zu nutzen.

Sei also $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und seien

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x < a_n\}, \\ B &= \{y \in \mathbb{R} \mid \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : y > a_n\}. \end{aligned}$$

Die Menge A enthält also alle $x \in \mathbb{R}$, die ab einem $N \in \mathbb{N}$ kleiner sind als die Folgenglieder. B hingegen enthält alle $y \in \mathbb{R}$, die ab einem $N \in \mathbb{N}$ größer sind als die Folgenglieder.

Die beiden Mengen A und B sind offenbar nicht leer, da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Weiter gilt $x < y$ für alle $x \in A$ und $y \in B$ und es ist $A \cup B = \mathbb{R}$.

Nach dem Dedekindschen Schnittaxiom gibt es also eine Schnitzzahl $s \in \mathbb{R}$ mit $x \leq s \leq y$ für alle $x \in A$ und $y \in B$.

Es soll nun gezeigt werden, dass gerade dieses s der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig und wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n, m \geq N$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2$$

gilt. Für alle $n \geq N$ folgt nun

$$a_N - \varepsilon/2 < a_n < a_N + \varepsilon/2,$$

also gilt $a_N - \varepsilon/2 \in A$ sowie $a_N + \varepsilon/2 \in B$. Es ist also gerade

$$a_N - \varepsilon/2 \leq s \leq a_N + \varepsilon/2$$

und es ergibt sich somit

$$|a_n - s| \leq |a_n - a_N| + |a_N - s| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Damit ist die Vollständigkeit der reellen Zahlen gezeigt. Nun zu den komplexen, dabei soll das Problem einfach auf die reellen Zahlen vereinfacht werden.

Eine komplexe Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, wenn die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus dem Realteil von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus dem Imaginärteil von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ sind. Da nun aber die reellen Cauchyfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergent sind, seien die Grenzwerte dieser beiden Folgen x bzw. y mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist aber genau $x + iy \in \mathbb{C}$ der Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, somit ist auch jede komplexe Cauchyfolge konvergent. $\square$

Beweis 2

Sei also $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$. Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und hat somit einen Häufungspunkt a . Es soll nun gezeigt werden, dass dieser Häufungspunkt gerade der Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig und wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n, m \geq N$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2$$

gilt. Es gibt nun aber auch ein $m \geq N$ mit $|a_m - a| < \varepsilon/2$. Zusammen folgt nun nach der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_m| + |a_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

$\square$

27.3 Reihen

27.3.1 Cauchy Kriterium für Reihen

Eine reelle oder komplexe Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall k \geq 0 : \left| \sum_{i=n}^{n+k} a_i \right| < \varepsilon$$

Beweis

Sei $s_l = \sum_{i=0}^l a_i$ die l -te Partialsumme. Dann ist gerade

$$|s_{n+k} - s_{n-1}| = \left| \sum_{i=n}^{n+k} a_i \right|.$$

Die gegebene Bedingung besagt also, dass $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Da aber nun $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ vollständig sind, konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und die gegebene Reihe ist somit konvergent. $\square$

27.3.2 Satz über absolut konvergente Reihen

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Beweis

Sei also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine beliebige absolut konvergente Reihe.

Nach dem Cauchy Kriterium für Reihen gibt es nun zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ und $k \geq 0$ gilt:

$$\sum_{i=n}^{n+k} |a_i| < \varepsilon$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt dann aber auch gerade für die gleichen n und k

$$\left| \sum_{i=n}^{n+k} a_i \right| \leq \sum_{i=n}^{n+k} |a_i| < \varepsilon,$$

somit ist jede absolut konvergente Reihe auch konvergent.

Dass nicht jede konvergente Reihe auch absolut konvergent ist, zeigt zum Beispiel die alternierende harmonische Reihe. $\square$

27.3.3 Geometrische Reihe

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ konvergiert für alle $|q| < 1$.

Beweis

Nach der endlich geometrischen Reihe aus Beispiel 5.4.2 gilt für die Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ gerade

$$\sum_{n=0}^k q^n = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1},$$

da $|q| < 1$ gilt. Somit konvergiert die Folge der Partialsummen gegen

$$\frac{-1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q}.$$

$\square$

27.3.4 Majorantenkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert und für alle $n \in \mathbb{N}$ gerade $|a_n| \leq b_n$ gilt.

Beweis

Es sind also alle $b_n \geq 0$ und somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ auch

$$\sum_{n=1}^k b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

aber somit gilt auch

$$\sum_{n=1}^k |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Die monoton wachsende Folge der Partialsummen von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist somit durch den Grenzwert von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ beschränkt, also ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch konvergent und in diesem Falle sogar absolut konvergent. $\square$

27.3.5 Quotientenkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ gilt. Die Reihe divergiert, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ gilt.

Beweis

Sei zunächst $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = t \in [0, 1[$. Da das Abändern endlich vieler Summanden das Konvergenzverhalten nicht beeinträchtigt, gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq t \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Durch Induktion ergibt sich somit

$$|a_n| \leq |a_1| \cdot t^{n-1}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_1| \cdot t^{n-1}$ für $0 \leq t < 1$ nach der geometrischen Reihe konvergiert, wurde also eine Majorante für die gegebene Reihe gefunden.

Für den zweiten Teil der Behauptung argumentiere man analog und finde eine Minorante. $\square$

27.3.6 Wurzelkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ gilt. Die Reihe divergiert, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ gilt.

Beweis

Der Beweis ist dem Quotientenkriterium sehr ähnlich.

Sei zunächst $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = t \in [0, 1[$. Da das Abändern endlich vieler Summanden das Konvergenzverhalten nicht beeinträchtigt, gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq t \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es ergibt sich somit

$$|a_n| \leq t^n.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ für $0 \leq t < 1$ nach der geometrischen Reihe konvergiert, wurde also eine Majorante für die gegebene Reihe gefunden.

Für den zweiten Teil der Behauptung argumentiere man analog und finde eine Minorante. $\square$

27.3.7 Leibnizkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert, wenn a_n eine monotone Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Beweis

Da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge ist, gilt $a_n - a_{n+1} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $s_l = \sum_{n=1}^l (-1)^n a_n$ die l -te Partialsumme der gegebenen Reihe. Dann ist die Folge $(s_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned} s_{2k} &= -a_1 + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \dots + (a_{2k-2} - a_{2k-1}) + a_{2k} \\ &= -(a_1 - a_2) - (a_2 - a_4) - \dots - (a_{2k-1} + a_{2k}) \end{aligned}$$

monoton fallend und durch $-a_1$ nach unten beschränkt, also konvergent. Analog ist die Folge $(s_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned} s_{2k+1} &= -a_1 + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \dots + (a_{2k} - a_{2k+1}) \\ &= -(a_1 - a_2) - (a_2 - a_4) - \dots - (a_{2k-1} + a_{2k}) - a_{2k+1} \end{aligned}$$

monoton wachsend und durch 0 nach oben beschränkt, also konvergent.

Es gilt weiter

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} - \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_{2k} - s_{2k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{2k+1}) = 0,$$

somit ist auch die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergent. $\square$

27.3.8 Verdichtungskriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert bzw. divergiert, wenn a_n eine monoton fallende Nullfolge ist und $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert bzw. divergiert.

Beweis

Es wird nur die Aussage für die Konvergenz gezeigt.

Es gilt zunächst für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2} \cdot (2^k a_{2^k}) = 2^{k-1} a_{2^k} \leq \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} a_n,$$

da die Summe genau 2^{k-1} Summanden hat und a_{2^k} der kleinste davon ist.

Es folgt somit

$$b_m := \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^m 2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^m \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} a_n = \sum_{n=2}^{2^m} a_n.$$

Die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist somit monoton wachsend und durch die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach oben beschränkt, also auch konvergent. Demnach ist aber durch

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = 2 \cdot (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

die Folge der Partialsummen konvergent. $\square$

27.3.9 Integralkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn $\int_1^{\infty} f(x) dx$ mit $f(n) = a_n$ uneigentlich existiert und die Abbildung f monoton wachsend und $f \geq 0$ ist.

Beweis

Zunächst werden die beiden Treppenfunktionen $a, b : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\left. \begin{aligned} a(x) &= f(n) \\ b(x) &= f(n+1) \end{aligned} \right\} \quad \text{für } n \leq x < n+1.$$

Da f monoton fallend ist, gilt

$$b \leq f \leq a.$$

Somit folgt

$$\sum_{n=2}^N f(n) = \int_1^N b(x) \, dx \leq \int_1^N f(x) \, dx \leq \int_1^N a(x) \, dx = \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Falls nun $\int_1^\infty f(x) \, dx$ uneigentlich existiert, ist die Folge der Partialsummen von $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ nicht nur monoton fallend, sondern auch beschränkt und somit konvergent. $\square$

27.4 Stetigkeit

27.4.1 Folgenkriterium

Seien (M, d) , (N, d) metrische Räume, sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung und sei $a \in M$.

Dann ist f genau dann stetig bei a , wenn zu jeder gegen a konvergenten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M auch die Bildfolge $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in N gegen $f(a)$ konvergiert.

Beweis

Sei f stetig bei a und sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge in M . Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ auch ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in M$ mit $d(x, a) < \delta$ gerade $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ folgt.

Wähle nun ein $m \in \mathbb{N}$, für das aus $n \geq m$ gerade $d(a_n, a) < \delta$ folgt. Dann gilt ja aber gerade auch $d(f(a_n), f(a)) < \varepsilon$ für alle $n \geq m$, also konvergiert die Bildfolge $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in N gegen $f(a)$.

Es muss nun noch umgekehrt gezeigt werden, dass bei einer Stelle a , bei der f unstetig ist auch die Bildfolge einer gegen a konvergenten Folge nicht stetig ist.

Sei also f unstetig bei $a \in M$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $\delta > 0$ auch ein $x \in M$ gibt mit $d(x, a) < \delta$ und $d(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$. Diese

Aussage ist also auch für $\delta = 1/n$ erfüllt. Dann gibt es somit $a_n \in M$ mit $d(a_n, a) < 1/n$ und $d(f(a_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Somit konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a , da es zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein $m \geq 1/\varepsilon'$ gibt und für alle $n \geq m$ dann

$$d(a_n, a) < 1/n \leq 1/m \leq \varepsilon'$$

gilt. Die Bildfolge $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert aber nicht gegen $f(a)$, da für den Abstand gerade $d(f(a_n), f(a)) > \varepsilon$ gilt. $\square$

27.4.2 Satz von Bolzano

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.

Gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit $f(\xi) = 0$.

Beweis

Da wir uns wieder auf die reellen Zahlen beziehen, lässt sich das Dedekindsche Schnittaxiom nutzen.

Seien dazu

$$\begin{aligned} A &= \{x \in [a, b] \mid \forall t \in [a, x] : f(t) < 0\}, \\ B &= \{y \in [a, b] \mid \exists t \in [a, y] : f(t) \geq 0\}. \end{aligned}$$

Geht man alle Punkt der Reihe nach von a nach b ab, so beinhaltet A also alle Punkte aus $[a, b]$, bei denen noch keine Nullstelle vorlag. B hingegen besteht aus allen Punkten aus $[a, b]$, bei denen schon mindestens eine Nullstelle durchlaufen wurde.

Es gilt somit $A \cup B = [a, b]$, es ist offenbar $x < y$ für alle $x \in A$ und $y \in B$ und A sowie B sind nicht leer, denn es gilt $a \in A$ und $b \in B$.

Nach dem Dedekindsche Schnittaxiom gibt es somit ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $x \leq \xi \leq y$ für alle $x \in A$ und $y \in B$ sowie $\xi \in [a, b]$. Es soll nun gezeigt werden, dass gerade $f(\xi) = 0$ gilt.

Angenommen es gilt $f(\xi) < 0$, so gäbe es wegen der Stetigkeit von f bei ξ ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in [a, b]$ mit $|y - \xi| < \delta$ gerade $f(y) < 0$ gilt. Es gibt somit auch ein y mit $\xi < y < \xi + \delta$. Da dieses y nun aber größer ist als ξ , liegt es in B . Somit gibt es ein $t \in [a, y]$ mit $f(t) \geq 0$ nach Definition von B . t kann nun aber nicht zwischen ξ und y liegen, denn dort sind alle Funktionswerte kleiner als 0. Da t aber gar nicht in A sein kann, ist die Annahme falsch und der Fall $f(\xi) < 0$ kann gar nicht eintreten.

Angenommen es gilt $f(\xi) > 0$, dann muss $\xi > a$ gelten und man findet analog einen Punkt x mit $a \leq x < \xi$, für den $f(x) > 0$ gilt. Somit ist auch diese Annahme falsch.

Notwendiger Weise gilt somit $f(\xi) = 0$. $\square$

27.4.3 Zwischenwertsatz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.

Dann ist auch $f(I)$ ein Intervall.

Beweis

Seien $a, b \in f(I)$, sei $a < b$ und sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig mit $a < c < b$.

Wähle $x, y \in I$ mit $f(x) = a$ und $f(y) = b$.

Sei $x < y$ und sei

$$\begin{aligned} g : [x, y] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t) - c. \end{aligned}$$

Dann ist auch g stetig und es gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - c = a - c < 0, \\ g(y) &= f(y) - c = b - c > 0. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Bolzano gibt es dann ein $\xi \in]x, y[$ mit $g(\xi) = 0$.

Somit ist $f(\xi) = c$ und es gilt $c \in f(I)$.

Da es also zwischen je zwei Punkten $a, b \in f(I)$ einen weiteren Punkt c gibt, muss $f(I)$ ein Intervall sein. $\square$

27.4.4 Satz über stetige Umkehrfunktionen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und sei $M = f(I)$.

Dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : M \rightarrow I$ ist stetig.

Beweis

Dieser Satz ist dient dazu, den folgenden Umkehrsatz möglichst einfach beweisen zu können. Hier wird jedoch weder die Stetigkeit von f gefordert noch vorausgesetzt, dass M ein Intervall ist.

Sei nun f streng monoton wachsend, sei $b \in M$ beliebig aber fest und sei $a \in I$ mit $f(a) = b$. Für die Stetigkeit von f^{-1} muss nun also nach Definition gerade

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I : |f(x) - b| < \delta \Rightarrow |x - a| < \varepsilon$$

gezeigt werden.

Diese Behauptung lässt sich noch einmal unterteilen:

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall x \in I, x < a : b - f(x) < \delta_1 \Rightarrow a - x < \varepsilon$$

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall x \in I, x > a : f(x) - b < \delta_2 \Rightarrow x - a < \varepsilon$$

Zur ersten Teilbehauptung: Wenn es gar kein $x \in I$ mit $x < a$ gibt, ist die Behauptung trivial. Wähle nun ein $c \in I$ mit $c < a$ und mit $a - c \leq \varepsilon$ und setze $\delta_1 = b - f(c)$. Es gilt $\delta_1 > 0$, da f streng monoton wachsend ist. Sei nun $x \in I$ mit $x < a$ und sei $b - f(x) < \delta_1 = b - f(c)$. Somit gilt $f(c) < f(x)$ und auch $c < x$ wegen der Monotonie von f . Es folgt demnach

$$a - x < a - c \leq \varepsilon.$$

Die zweite Teilbehauptung zeigt man ganz analog. Ebenso die gesamte Behauptung für eine streng monoton fallende Funktion. $\square$

27.4.5 Umkehrsatz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend bzw. fallend.

Dann ist auch $M = f(I)$ ein Intervall und die Umkehrfunktion $f^{-1} : M \rightarrow I$ ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend bzw. fallend.

Beweis

Der Umkehrsatz ist nun sehr leicht zu beweisen:

Nach dem Zwischenwertsatz ist M gerade ein Intervall, f^{-1} ist nach dem vorherigen Satz 11.4.5 stetig und f^{-1} ist auch offenbar streng monoton wachsend bzw. fallend. $\square$

27.5 Differentiation

Die folgenden Differentiationsregeln lassen sich auch mittel Satz 13.1.3 bzw. Satz 27.5.1 über die Methode der Linearisierung beweisen. Dieses Verfahren wird anhand der Kettenregel im Beweis 2 gezeigt, ansonsten werden die üblichen teilweise nicht ganz so schönen Beweise vorgeführt. Die Methode der Linearisierung hat den großen Vorteil, dass die Beweise entsprechender Sätze im Mehrdimensionalen fast analog zum Eindimensionalen verlaufen.

Die Beweise der Differentiationsregeln sind auch jeweils anders als die angegebenen Regel punktweise zu verstehen.

27.5.1 Satz über die Linearisierung

Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $a \in M$ ein Häufungspunkt von M .

Dann sind äquivalent:

(1) f ist differenzierbar bei a .

(2) Es gibt ein $m \in \mathbb{R}$ und eine Abbildung $\varrho : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(a) + m(x - a) + \varrho(x) \cdot (x - a) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varrho(x) = 0,$$

das heißt es gilt also $\varrho(a) = 0$ und ϱ ist stetig bei a .

(3) Es gibt eine bei a stetige Abbildung $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in M$ gilt:

$$f(x) = f(a) + (x - a) \cdot \varphi(x).$$

Es gilt dann $m = \varphi(a) = f'(a)$.

Beweis

Es gelte zunächst (3). Setzt man nun $\varphi(x) = m + \varrho(x)$, so erhält man direkt Aussage (2).

Nun gelte (2), dann gilt für alle $x \neq a$ gerade

$$f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m + \varrho(x).$$

Es folgt $\lim_{x \rightarrow a} (m + \varrho(x)) = m$, somit ist f bei a differenzierbar mit $f'(a) = m$, also Aussage (1).

Es gelte nun (1) und es soll daraus (3) gefolgert werden. Man erhält jedoch sofort für $x \neq a$ durch

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(a)$$

eine bei a stetige Funktion, da f bei a differenzierbar ist. □

27.5.2 Polynome

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

Dann gilt

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}.$$

Beweisskizze

Diese Differentiationsregel folgt aus der Definition der Differenzierbarkeit sowie durch induktives Anwenden der Rechenregeln über Grenzwerte von Funktionen.

27.5.3 Kettenregel

Seien $M, N \subset \mathbb{R}$ beliebig, seien $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $f(M) \subset N$.

Dann gilt

$$(g \circ f)' = (g(f))' = g'(f) \cdot f' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Beweis 1

Es sei nun $f : M \rightarrow N$ eine bei a differenzierbar und $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ eine bei $f(a) = b$ differenzierbare Funktion. Dann ist f bei a auch stetig, also gilt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Somit folgt dann auch

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g(f))(x) - (g(f))(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{(g(f))(x) - (g(f))(a)}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g(f))(x) - (g(f))(a)}{f(x) - f(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= g'(f(a)) \cdot f'(a) \\ &= (g' \circ f)(a) \cdot f'(a). \end{aligned}$$

□

Beweis 2

Sei wieder $f : M \rightarrow N$ eine bei a differenzierbar und $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ eine bei $f(a) = b$ differenzierbare Funktion.

Es soll nun die Methode der Linearisierung angewendet werden:

Nach Satz 13.1.3 gibt es also eine bei a stetige Funktion $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ und eine bei b stetige Funktion $\psi : N \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in M$ bzw. für alle $y \in N$ gerade

$$f(x) - f(a) = \varphi(x) \cdot (x - a) \quad \text{und} \quad g(y) - g(b) = \psi(y) \cdot (y - b)$$

gilt. Es folgt nun

$$\begin{aligned} & (g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) \\ &= g(f(x)) - g(f(a)) \\ &= \psi(f(x)) \cdot [f(x) - f(a)] \\ &= (\psi \circ f)(x) \cdot \varphi(x) \cdot (x - a) \\ &= ((\psi \circ f) \cdot \varphi)(x) \cdot (x - a). \end{aligned}$$

Die Funktion $(\psi \circ f) \cdot \varphi$ ist stetig bei a , somit ist $(g \circ f)$ bei a differenzierbar und die Ableitung ist gerade

$$(\psi \circ f)(a) \cdot \varphi(a) = \psi(b) \cdot \varphi(a) = g'(b) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

□

27.5.4 Produktregel

Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig und seien $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Dann gilt

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f.$$

Beweis

Für alle $a \in M$ gilt

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)(g(x) - g(a))}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a)(f(x) - f(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= f(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot f'(a) \\ &= f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a). \end{aligned}$$

□

27.5.5 Quotientenregel

Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig und seien $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Dann gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}.$$

Beweis

Sei zunächst $f = 1$. Dann gilt für alle $a \in M$ gerade

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a} \cdot \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a} \cdot \left(\frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)}\right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \left(\frac{g(a) - g(x)}{x - a}\right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} \cdot (-1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
 &= \frac{1}{g^2(a)} \cdot (-1)g'(a) \\
 &= -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.
 \end{aligned}$$

Das Gesamtergebnis ergibt sich nun aus der Produktregel:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) \\
 &= f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} - f(a) \cdot \frac{g'(a)}{g^2(a)} \\
 &= \frac{f'(a)g(a)}{g^2(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g^2(a)} \\
 &= \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}
 \end{aligned}$$

□

27.5.6 Ableitung über Umkehrfunktion

Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebig und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und umkehrbar.

Dann gilt

$$f' = \frac{1}{(f^{-1})'(f)}.$$

Beweis

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $M \setminus \{a\}$ mit dem Grenzwert a . Da f stetig ist, konvergiert die Bildfolge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach dem Folgenkriterium gegen

$f(a) = b$. Da f umkehrbar also auch bijektiv ist, folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b}{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(b)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(b)}{b_n - b}} = \frac{1}{(f^{-1})'(b)}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit

$$f'(a) = \frac{1}{(f^{-1})'(b)} = \frac{1}{(f^{-1})'(f(a))}.$$

□

27.5.7 Satz über lokale Extrema

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ und es gelte $f(a) = f(b)$.

Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$, so dass f bei ξ ein lokales Extremum hat.

Beweis

Sei f eine nicht konstante Funktion, denn sonst wäre nichts zu zeigen. Das Bild von f ist nach dem Zwischenwertsatz auch ein Intervall, also etwa $[c, d] \subset \mathbb{R}$ mit $c < d$.

Gilt nun $d > f(a)$, so gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit $f(\xi) = d$ und es gilt dann $f(x) \leq f(\xi)$ für alle $x \in [a, b]$. Somit hat f bei ξ ein Maximum.

Gilt umgekehrt $c < f(a)$, so gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit $f(\xi) = c$ und es gilt dann $f(x) \geq f(\xi)$ für alle $x \in [a, b]$. Somit hat f bei ξ ein Minimum. □

27.5.8 Satz über die Notwendigkeit für Extrema

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $\xi \in]a, b[$, sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bei ξ differenzierbar und es sei ξ ein lokales Extremum von f .

Dann gilt

$$f'(\xi) = 0.$$

Beweis

Sei ξ zunächst ein lokales Maximum von f . Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in B_\varepsilon(\xi) =]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[\subset [a, b]$ gerade $f(x) \leq f(\xi)$ gilt.

Sei nun $\xi - \varepsilon < x < \xi$. Dann gilt für alle diese x gerade

$$g(x) := \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0.$$

Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $]\xi - \varepsilon, \xi[$ die gegen ξ konvergiert. Somit gilt dann $f'(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \geq 0$.

Ist nun $\xi < x < \xi + \varepsilon$. Dann gilt für alle diese x gerade $g(x) \leq 0$ und man erhält ebenso $f'(\xi) \leq 0$. Somit muss also $f'(\xi) = 0$ gelten.

Hat f nun bei ξ ein lokales Minimum, so argumentiere man analog. $\square$

27.5.9 Satz von Rolle

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sowie auf $]a, b[$ sogar differenzierbar und es gelte $f(a) = f(b)$.

Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis

Die Behauptung folgt unmittelbar aus den vorherigen Sätzen:

Nach Satz 27.5.7 hat f bei ξ ein lokales Extremum und nach Satz 27.5.8 gilt demnach $f'(\xi) = 0$. $\square$

27.5.10 Mittelwertsatz

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sowie auf $]a, b[$ sogar differenzierbar.

Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis

Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Dann ist auch g stetig und auf $]a, b[$ sogar differenzierbar. Weiter gilt

$$g(a) = f(a) = g(b).$$

Nach dem Satz von Rolle gibt es somit ein $\xi \in]a, b[$ mit $g'(\xi) = 0$.

Es ist weiter

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

und man erhält durch

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

die Behauptung. $\square$

27.6 Integration

27.6.1 Mittelwertsatz der Integration

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $a < b$.

Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$f(\xi) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Beweis

Das Bild von f ist nach dem Zwischenwertsatz auch ein Intervall, also etwa $[c, d] \subset \mathbb{R}$ mit $c < d$.

Es ist somit $c \leq f(x) \leq d$ für alle $x \in [a, b]$, also gilt

$$c(b - a) = \int_a^b c \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b d \, dx = d(b - a).$$

Demnach ist $\int_a^b f(x) \, dx = \eta(b - a)$ mit einem $\eta \in]c, d[$ und es gibt somit auch ein $\xi \in]a, b[$ mit $f(\xi) = \eta$. $\square$

27.6.2 Hauptsatz der Analysis Teil 1

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $a < b$.

Dann ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

differenzierbar auf $[a, b]$ und es gilt $F' = f$.

Beweis

Sei $c \in [a, b]$ beliebig. Dann muss gezeigt werden, dass F bei c differenzierbar ist und dort die Ableitung $f(c)$ hat.

Für alle $x \in [a, b]$ gibt es nach dem Mittelwertsatz der Integration gerade ein $\xi \in]x, c[$, so dass

$$F(x) - F(c) = \int_a^x f(t) \, dt - \int_a^c f(t) \, dt = \int_c^x f(t) \, dt = (x - c) \cdot f(\xi)$$

gilt.

Da dieses ξ nun aber von x abhängt, wird dafür ξ_x geschrieben. Es ist nun

$\xi_x \in]x, c[$ und somit folgt für $x \rightarrow c$ gerade $\xi_x = c$.

Man erhält nun zusammen

$$F'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{(x - c) \cdot f(\xi_x)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} f(\xi_x) = f(c),$$

was die Behauptung zeigt. $\square$

27.6.3 Hauptsatz der Analysis

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, sei $a < b$ und sei F eine Stammfunktion von f .

Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Beweis

Es ist $G(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ eine Stammfunktion von f , somit ist gerade

$$G(x) - F(x) = c$$

eine Konstante. Es gilt $G(a) = 0$, somit ist $c = -F(a)$ und zusammen folgt nun

$$G(x) = F(x) - F(a).$$

Es folgt schon die Behauptung

$$F(b) - F(a) = G(b) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

$\square$

27.6.4 Partielle Integration

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.

Dann gilt

$$\int (f' \cdot g) \, dx = f \cdot g - \int (f \cdot g') \, dx.$$

Beweis

Nach der Produktregel gilt gerade

$$\left(f \cdot g - \int (f \cdot g') \, dx \right)' = (f' \cdot g) + (g' \cdot f) - (f \cdot g') = (f' \cdot g).$$

Der letzte Ausdruck entspricht gerade dem Integranden des zu untersuchenden Integrals, somit wurde die Behauptung gezeigt. $\square$

27.7 Topologie

27.7.1 Satz über die Bilder zusammenhängender Mengen

Seien M, N topologische bzw. metrische Räume, sei $f : M \rightarrow N$ stetig und sei $Z \subset M$ zusammenhängend.

Dann ist auch $f(Z)$ zusammenhängend.

Beweis

Seien $U, V \subset N$ beliebige offene Mengen mit

$$f(Z) \subset U \cup V \quad \text{und} \quad f(Z) \cap U \cap V = \emptyset.$$

Es muss gezeigt werden, dass nun auch $f(Z)$ zusammenhängend ist.

Nach den Rechenregeln für Urbilder aus Satz 4.3.3 gilt nun

$$\begin{aligned} Z \subset f^{-1}(U \cup V) &= f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \quad \text{sowie} \\ Z \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Es sind $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offen in M und da Z zusammenhängend ist, folgt

$$Z \subset f^{-1}(U) \quad \text{oder} \quad Z \subset f^{-1}(V).$$

Somit gilt aber auch gerade $f(Z) \subset U$ oder $f(Z) \subset V$. $\square$

27.7.2 Satz über stetige Abbildungen auf kompakten Mengen

Sei M ein metrischer Raum und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.

Ist $K \subset M$ kompakt, dann ist f gleichmäßig stetig auf K .

Beweis

Sei also K kompakt und f stetig auf K . Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $a \in K$ auch ein von a abhängiges $\delta_a > 0$, so dass für alle $x \in M$, für die $d(x, a) < 2\delta_a$ gilt, auch $d(f(x) - f(a)) < \varepsilon/2$ folgt.

Die Umgebungen $B_{\delta_a}(a)$ bilden eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von K und da K kompakt ist, gibt es dazu auch eine endliche Teilüberdeckung, also etwa

$$\mathcal{W} = \left\{ B_{\delta_{a_1}}, \dots, B_{\delta_{a_n}} \right\}$$

mit geeigneten $a_1, \dots, a_n$. Sei nun $\delta = \min\{\delta_{a_1}, \dots, \delta_{a_n}\}$.

Dann gibt es zu allen $x, y \in K$ mit $d(x, y) < \delta$ auch ein k mit $x \in B_{\delta_{a_k}}$, also $d(x, a_k) < \delta_{a_k}$. Es folgt nun

$$d(y, a_k) \leq d(y, x) + d(x, a_k) < \delta + \delta_{a_k} \leq 2\delta_{a_k}.$$

Nach Voraussetzung ist $d(f(x) - f(a_k)) < \varepsilon/2$ sowie $d(f(y) - f(a_k)) < \varepsilon/2$, somit folgt

$$d(f(x) - f(y)) < \varepsilon.$$

□

27.7.3 Satz über kompakte Mengen

Sei M ein topologischer bzw. metrischer Raum.

Ist $K \subset M$ kompakt, dann ist K abgeschlossen in M .

Beweis

Es ist zu zeigen, dass $M \setminus K$ offen ist, dass es also zu jedem $a \in M \setminus K$ ein $\delta > 0$ gibt mit $B_\delta(a) \cap K = \emptyset$.

Für jedes $x \in K$ ist nun $\varepsilon_x = \frac{1}{2}d(x, a) > 0$, da $a \notin K$. Die Menge

$$\mathcal{U} = \{B_{\varepsilon_x}(x) \mid x \in K\}$$

ist daher eine offene Überdeckung von K und da K gerade kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_n \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i).$$

Sei nun $\delta = \min\{\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, \dots, \varepsilon_{x_n}\} > 0$. Für alle $x \in K$ gibt es wie bereits bekannt ist ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $x \in B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$, also gilt auch $d(x, x_i) < \varepsilon_{x_i}$. Es folgt demnach

$$d(x, a) \geq d(x_i, a) - d(x, x_i) > 2\varepsilon_{x_i} - \varepsilon_{x_i} = \varepsilon_{x_i} \geq \delta.$$

Daraus ergibt sich nun auch genau $B_\delta(a) \cap K = \emptyset$.

□

27.7.4 Satz über Teilmengen kompakter Mengen

Sei M ein topologischer bzw. metrischer Raum.

Ist $K \subset M$ kompakt und ist $A \subset K$ abgeschlossen in M , dann ist auch A kompakt.

Beweis

Sei $\mathcal{U}$ eine beliebige offene Überdeckung von A . Dann ist $\mathcal{U} \cup (M \setminus A)$ eine offene Überdeckung von K . Da K aber gerade kompakt ist, gibt es endlich viele $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$, so dass

$$U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n \cup (M \setminus A)$$

eine endliche Teilüberdeckung von K und somit auch von A ist. Da aber gerade $A \subset K \subset M$ gilt, folgt

$$A \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$$

und somit wurde eine endliche Teilüberdeckung gefunden. $\square$

27.7.5 Satz von Heine-Borel

Sei E ein endlich dimensionaler Vektorraum und sei $K \subset E$.

K ist genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis

Der Satz von Heine-Borel wird nur für den Vektorraum $E = \mathbb{R}$ bewiesen.

Sei zunächst K kompakt, dann ist K nach Satz 18.8.8 auch abgeschlossen in M . Somit muss nur noch gezeigt werden, dass K auch beschränkt ist. Zu der offenen Überdeckung $\mathcal{U} = \{b_n(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ von K muss es aber auch eine endliche Teilüberdeckung geben und dies ist nur möglich, wenn K beschränkt ist.

Sei nun umgekehrt K abgeschlossen und beschränkt durch $K \subset [-c, c] \subset \mathbb{R}$. Dann ist $[-c, c]$ als geschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ auch kompakt und somit ist nach Satz 18.8.9 auch K kompakt. $\square$

27.7.6 Satz über die Bilder kompakter Mengen

Seien M, N topologische bzw. metrische Räume, sei $f : M \rightarrow N$ stetig und sei $K \subset M$ kompakt.

Dann ist auch $f(K)$ kompakt.

Beweis

Sei $\mathcal{U}'$ eine offene Überdeckung von $f(K)$ in N . Da bei einer stetigen Abbildung die Urbilder offener Mengen wieder offen sind, erhält man zu $\mathcal{U}'$ auch die offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}'\}$ von K . Da K kompakt ist, gibt es zu $\mathcal{U}$ auch eine endlich Teilüberdeckung von K , etwa

$$K \subset f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_n).$$

Demnach gilt aber auch

$$f(K) \subset U_1 \cup \dots \cup U_n$$

und somit wurde zu $\mathcal{U}'$ eine endliche Teilüberdeckung von $f(K)$ gefunden. Also ist $f(K)$ kompakt. $\square$

27.8 Mehrdimensionale Differentiation und Integration

Die Beweise der mehrdimensionalen Differential- und Integralrechnung sind zum Teil entweder sehr umfangreich oder lassen sich auf ein Problem im Eindimensionalen vereinfachen. Daher werden hier nur wenige Beweise oder nur Beweisskizzen angegeben.

27.8.1 Mittelwertsatz 1 - reellwertige Funktionen

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und seien $a, b \in M$ mit $[a, b] \subset M$.

Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = Df(c) \cdot (b - a).$$

Beweis

Das Problem soll nun auf den eindimensionalen Mittelwertsatz vereinfacht werden.

Sei dazu $c : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ mit $c(t) = a + t(b - a)$ eine parametrisierte Kurve. Dann ist c auf $[0, 1]$ differenzierbar. Sei weiter

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad g(u) = f(c(u)) = f(a + u(b - a)).$$

Dann gilt $g(0) = f(a)$ sowie $g(1) = f(b)$ und es gibt nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in]0, 1[$ mit

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g(1) - g(0) = f(b) - f(a) = g'(\xi).$$

Nach der Kettenregel folgt

$$g'(\xi) = Df(c(\xi)) \cdot Dc(\xi) = Df(c) \cdot (b - a)$$

mit $c = c(\xi) \in [a, b]$. □

27.8.2 Mittelwertsatz 2 - Integralversion

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und seien $a, b \in M$ mit $[a, b] \subset M$.

Dann gilt

$$f(b) - f(a) = A \cdot (b - a) \quad \text{mit} \quad A = \int_0^1 Df(a + t(b - a)) dt \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Beweis

Sei wieder $c : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ mit $c(t) = a + t(b - a)$ eine parametrisierte Kurve. Dann ist die Zusammensetzung $(f \circ c) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Sei $\{g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ ist linear}\} = (\mathbb{R}^m)^*$ der Dualraum von $\mathbb{R}^m$. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Analysis für alle $g \in (\mathbb{R}^m)^*$ gerade

$$\begin{aligned} g(f(b) - f(a)) &= g(f(b)) - g(f(a)) = g(f(c(1))) - g(f(c(0))) \\ &= \int_0^1 (g(f \circ c))'(t) dt = \int_0^1 g((f \circ c)'(t)) dt \\ &= \int_0^1 g(Df(c(t)) \cdot Dc(t)) dt \\ &= \int_0^1 g(Df(c(t)) \cdot (b - a)) dt \\ &= g\left(\left(\int_0^1 Df(a + t(b - a)) dt\right) \cdot (b - a)\right), \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. $\square$

27.8.3 Satz von H.A.Schwarz

Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $a \in M$.

Ist f bei a partiell differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig differenzierbar bei a , dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(a).$$

Beweis

Sei $(a, b) \in M$. Dann gilt nach der Definition für partielle Differenzierbarkeit gerade

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t, b) - f(a, b)}{t - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

und es folgt weiter nur nach Definition

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(a + h, b + h) - f(a, b + h)] - [f(a + h, b) - f(a, b)]}{h^2}.$$

Analog gilt also auch

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(a + h, b + h) - f(a + h, b)] - [f(a, b + h) - f(a, b)]}{h^2}.$$

Es muss nun gezeigt werden, dass diese beiden Grenzwerte unter den gegebenen Bedingungen auch wirklich gleich sind.

Sei dazu $g : [b, b+h] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$. Dann ist g stetig differenzierbar und es gibt somit nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in]b, b+h[$, so dass

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(a+h, b+h) - f(a, b+h)] - [f(a+h, b) - f(a, b)]}{h^2} \\ &= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, \xi)}{h} \end{aligned}$$

gilt. Sei nun weiter $h : [a, a+h] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)$. Dann ist auch h stetig differenzierbar und es gibt wiederum nach dem Mittelwertsatz ein $\eta \in]a, a+h[$, so dass gilt:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, \xi)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(a, b)$$

Analog erhält man durch geeignete Wahl der Funktionen g und h gerade

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(a+h, b+h) - f(a+h, b)] - [f(a, b+h) - f(a, b)]}{h^2} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(a, b),$$

was die Behauptung zeigt. $\square$

Dabei wurde beim zweiten Anwenden des Mittelwertsatzes ausgenutzt, dass die partiellen Ableitungen stetig differenzierbar sind.

27.8.4 Satz über die Notwendigkeit für Extrema

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit einem lokalen Extremum bei $a \in M$.

Dann gilt

$$Df(a) = 0.$$

Beweis

Sei $u \in \mathbb{R}^n$ beliebig und sei $a \in M$ wie im Satz.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < \varepsilon$ folgt, dass $a + tu \in M$ ist. Die Funktion $g :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(t) = f(a + tu)$ ist daher bei 0 differenzierbar und hat dort ein lokales Extremum. Daher gilt nun $g'(0) = 0$, also gilt auch für die Richtungsableitung von f nach u gerade $D_u f(a) = 0$. Da dies aber für alle $u \in \mathbb{R}^n$ gilt, folgt $Df(a) = 0$. $\square$

27.8.5 Satz über lokale Extrema

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bei $a \in M$ zweimal differenzierbar und sei $Df(a) = 0$.

Dann gilt:

- (1) Ist $D^2f(a)$ positiv definit, so hat f ein lokales Minimum bei a .
- (2) Ist $D^2f(a)$ negativ definit, so hat f ein lokales Maximum bei a .

Beweisskizze

Nach der Taylorentwicklung gilt

$$f(x) = f(a) + Df(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2} D^2f(a) \cdot (x - a, x - a) + \|x - a\|^2 \varrho(x)$$

für eine bei a stetige Funktion $\varrho : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varrho(a) = 0$.

Weiter gibt es zu jeder positiv definiten Matrix B auf $\mathbb{R}^n$ stets ein $c > 0$, so dass $B(u, u) \geq c\|u\|^2$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ gilt. Dabei ist $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm.

Sei $D^2f(a)$ positiv definit. Dann gibt es also ein $c > 0$, so dass alle $x \in M$, die so nahe bei a liegen, dass sie $|\varrho(x)| < c/2$ erfüllen, auch $f(x) - f(a) \geq 0$ gilt, da $Df(a) = 0$ ist.

Ist $D^2f(a)$ negativ definit, so braucht man nur die Funktion $-f$ zu betrachten.

27.8.6 Fixpunktsatz von Banach

Sei $T : M \rightarrow M$ eine Kontraktion mit $q < 1$ auf einem vollständig metrischen Raum (M, d) .

Dann hat T genau einen Fixpunkt.

Beweis

Es gilt also für alle $x, y \in M$ gerade $d(Tx, Ty) \leq qd(x, y)$ und durch induktives Anwenden folgt

$$d(T^n x, T^n y) \leq q^n d(x, y)$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $x \in M$ beliebig aber fest. Dann folgt nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(T^n x, x) &\leq d(T^n x, T^{n-1} x) + d(T^{n-1} x, T^{n-2} x) + \dots + d(Tx, x) \\ &\leq q^{n-1} d(Tx, x) + q^{n-2} d(Tx, x) + \dots + d(Tx, x) \\ &= \frac{1 - q^n}{1 - q} d(Tx, x) \leq \frac{1}{1 - q} d(Tx, x). \end{aligned}$$

Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n = T^n x$. Dann zeigt

$$d(T^m x, T^n x) = d(T^n T^{m-n} x, T^n x) \leq q^n (T^{m-n} x, x) \leq \frac{q^n}{1-q} d(Tx, x)$$

gerade, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M ist.

Da M vollständig ist, konvergiert diese Folge gegen ein $a \in M$. Da T stetig ist, ergibt sich nach dem Folgenkriterium gerade

$$Ta = \lim_{n \rightarrow \infty} T T^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

womit gezeigt ist, dass a ein Fixpunkt von T ist. Da jede Kontraktion höchstens einen Fixpunkt hat, ist a eindeutig bestimmt. $\square$

27.8.7 Satz über implizite Funktionen 2

Sei $M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, sei $Q : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, sei (a, b) eine Lösung des durch $Q(x, y) = 0$ gegebenen Gleichungssystems und es gelte für die durch die Projektionen von Q auf $Q_1, \dots, Q_m$ gegebene Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial Q_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \cdot (a, b) \neq 0.$$

Dann kann das Gleichungssystem $Q(x, y) = 0$ in einer Umgebung von (a, b) stetig differenzierbar nach $y = (y_1, \dots, y_m)$ aufgelöst werden.

Beweisskizze

Die oben angegebene Matrix $B = \frac{\partial Q}{\partial y}(a, b)$ ist invertierbar, da ihre Determinante ungleich 0 ist. Weiter gilt

$$E_m - B^{-1}B = 0 \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad B^{-1}Q(a, b) = 0 \in \mathbb{R}^m,$$

da gerade $Q(a, b) = 0$ gilt.

Es gibt nun eine Umgebung U von a und eine Umgebung $V = B_\varepsilon(b)$ von b , so dass $U \times V \subset M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ gilt sowie dass für alle $x \in U$ und $y \in V$ gilt:

$$\left| E_m - B^{-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \right) \right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |B^{-1}Q(x, b)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller stetigen Funktionen $y : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$y(a) = b \quad \text{und} \quad |y(x) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \in U.$$

Es wird dann durch

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \quad \text{mit} \quad Ty = y - B^{-1}Q(x, y)$$

eine Kontraktion auf $\mathcal{F}$ definiert, denn durch die zuvor geforderten Eigenschaften folgt

$$|Ty - T\tilde{y}| = |y - B^{-1}Q(x, y) - \tilde{y} + B^{-1}Q(x, \tilde{y})| \leq \frac{1}{2}|y - \tilde{y}|.$$

Nach dem Fixpunktsatz von Banach hat T nun genau einen Fixpunkt,

$$Ty = y - B^{-1}Q(x, y) = y,$$

somit folgt $Q(x, y) = 0$. Dies zeigt, dass y gerade die gesuchte und eindeutig bestimmte Auflösungsfunktion ist.

28 Anhang

28.1 Potenzreihen

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots & x \in \mathbb{R} \\
 \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots & x \in \mathbb{R} \\
 \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots & x \in \mathbb{R} \\
 \arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots & |x| < 1 \\
 \log(1-x) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n &= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \dots & |x| < 1 \\
 \log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots & |x| < 1
 \end{aligned}$$

28.2 Geometrische Reihen

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$$

endlich geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^k q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \quad \text{für } q \neq 1$$

28.3 Wichtige Grenzwerte

$$\begin{aligned}
 \sqrt[n]{a} &\rightarrow 1 & \sqrt[n]{n} &\rightarrow 1 & \sqrt[n]{n!} &\rightarrow \infty & (1 + \frac{1}{n})^n &\rightarrow e \\
 (1 + \frac{x}{n})^n &\rightarrow e^x & (\frac{n+1}{n})^n &\rightarrow e & \frac{a^n}{n!} &\rightarrow 0 & \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} &\rightarrow \frac{1}{e} \\
 (1 + \frac{1}{n})^{n+1} &\rightarrow e & \frac{n^n}{n!} &\rightarrow \infty & & & &
 \end{aligned}$$

28.4 Ableitungen und Stammfunktionen

Ableitung	Funktion	Stammfunktion	Definitionsbereich
ax^{a-1}	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$x > 0$
$\frac{1}{x}$	$\log x$	$x \cdot \log x - x$	$x > 0$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
	b^x	$\frac{b^x}{\log(b)}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$		$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\log(x) \cos(x)$	$ x < \frac{\pi}{2}$
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$-\log(x) \cos(x)$	$ x < \frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$		$ x < 1$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$		$0 \leq x \leq \pi$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$		
	$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(\cos(x) \sin(x) + x)$	$\mathbb{R}$
	$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x - \cos(x) \sin(x))$	$\mathbb{R}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$		
$1 - \tanh^2(x)$	$\tanh(x)$		
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh}(x)$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x)$		$x \geq 0$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh}(x)$		
	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x))$	$ x \leq 1$
	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arsinh}(x))$	$\mathbb{R}$
	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcosh}(x))$	$ x \leq 1$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \log \left \frac{x+1}{x-1} \right $		$ x \neq 1$

28.5 Vertauschen von Summe, Integral und Grenzwert

28.5.1 Summe und Summe

Die beiden Summen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ seien gleichmäßig konvergent.

Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n b_m.$$

28.5.2 Summe und Integral

Die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sei absolut konvergent.

Dann gilt

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n(x) \, dx.$$

28.5.3 Integral und Grenzwert

Aussage 1

Die Funktionenfolge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen konvergiere gleichmäßig gegen $f(x)$.

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) \, dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = \int f(x) \, dx.$$

Aussage 2

Die Funktionenfolge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere punktweise gegen $f(x)$ und es gebe eine integrierbare Funktion $g(x)$ mit $|f_n(x)| \leq g(x)$ fast überall.

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) \, dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = \int f(x) \, dx$$

(vergleiche Satz 25.4.8 auf Seite 257 und weitere Konvergenzsätze).

Literaturverzeichnis

- [1] El-Benny, W. (2003): "Mehrdimensionale Analysis - ein Übungsbuch". 1. Auflage, Cuvillier Verlag, Göttingen.
- [2] Forster, O. (1999): "Analysis 1". 5. Auflage, Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden.
- [3] Heuser, H. (2003): "Lehrbuch der Analysis Teil 1". 15. Auflage, Teubner Verlag, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden.
- [4] Holdgrün, H.S. (1998): "Analysis". Band 1: Differential- und Integralrechnung einer Variablen. 1. Auflage, Leins Verlag, Göttingen.
- [5] Holdgrün, H.S. (2001): "Analysis". Band 2: Differential- und Integralrechnung mehrerer Variablen. 1. Auflage, Leins Verlag, Göttingen.
- [6] Merziger, G., Wirth, T. (2002): "Repetitorium der höheren Mathematik". 4. Auflage, Binomi, Hannover.
- [7] Schick, T. (2003): "Kurz-Skript zu Differential- und Integralrechnung 2". Skript zur Vorlesung. Mathematisches Institut, Göttingen, Seite 7.
- [8] Scholz, D. (2004): "Differential- und Integralrechnung I und II". Vorlesungsmitschrift im WiSe 2003/2004 und SoSe 2004 bei Prof. H.S.Holdgrün, Universität Göttingen.
- [9] Singh, S. (1997): "Fermats letzter Satz". 1. Auflage, Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH, München.
- [10] Timmann, S. (2002): "Repetitorium der Analysis Teil 1". 2. Auflage, Binomi, Hannover.
- [11] Timmann, S. (2002): "Repetitorium der Analysis Teil 2". 1. Auflage, Binomi, Hannover.

Stichwortverzeichnis

- Äquivalenzklasse, 27
- Äquivalenzrelation, 27
- Abbildungen, 21, 24
- abgeschlossene Mengen, 166
- ableiten, 116
- Ableitungen, 116, 193, 309
 - höhere, 210
- Ableitungsregeln, 119
- Abschluß, 168
- absolutes Maximum, 222
- absolutes Minimum, 222
- abzählbar, 29
- Additionstheoreme, 69, 71
- Adhärenzpunkt, 102
- Algebra, 201
 - normierte, 201
- algebraisch, 29
- alternierende harmonische Reihe, 81
- arccos, 70
- arcsin, 70
- arctan, 65
- Arkuscosinus, 70
- Arkussinus, 70
- Arkustanges, 65
- Astroide, 275
- $B_\varepsilon(a)$, 76
- Ball, 76, 159
- Banachalgebra, 201
- Banachraum, 108
- Banachscher Fixpunktsatz, 240
- Berührungspunkt, 102
- Bernoulli-Ungleichung, 34
- beschränkt, 23, 38
 - Folge, 51
- beschränkte Mengen, 167
- Beweis durch Widerspruch, 9
- Beweise, 277
- Beweistechniken, 9
- bijektiv, 25
- Bild einer Abbildung, 24
- Binomialkoeffizient, 32
- Binomische Formel, 33
- Bogenlänge, 139
- C-Abbildungen, 216
- Cauchy-Schwarz Ungleichung, 161
- Cauchyfolge, 77
- Cauchy Kriterium für Reihen, 81
- Cauchysches
 - Konvergenzkriterium, 78
- Cauchysches Restglied, 151, 232
- Cavalieri, Prinzip von, 263
- chaotische Topologie, 163
- charakteristische Funktion, 253
- cos, 68
- Cosinus, 68
- Cosinushyperbolicus, 71
- Dedekindsches Schnittaxiom, 34
- definit
 - in-, 221
 - negativ, 221
 - positiv, 221
- Definitionsbereich, 24
- DeMorgansche Regel, 22
- DGL, 240
- Diffeomorphismus, 200
- Differentialgleichungen, 240
- Differentialquotient, 116
- Differentiation, 116, 190

- Differenzenquotient, 116
- differenzierbar, 116, 192
- Differenzmenge, 21
- disjunkt, 22
- diskrete Topologie, 163
- divergieren, 50
- Dreiecksungleichung, 33
- DUG, 33
- Durchschnitt, 21

- einfach zusammenhängend, 170
- Einheit, 202
- Einschränkung, 8
- Element einer Folge, 48
- Elementarintegrale, 252
- Elemente, 21
- Eliminierungsverfahren, 42
- euklidische Norm, 158
- Eulersche Formel, 74
- exp, 67
- Exponentialfunktion, 67
- Extrema
 - lokale, 222
 - mehrere Variablen, 221
 - mit Nebenbedingungen, 223
- Extremum, 121, 222
 - lokales, 121, 222

- Fakultät, 32
- fast überall, 257
- Fatou, Lemma von, 257
- feiner, Topologien, 163
- Fixpunkt, 239
- Fixpunktsatz von Banach, 240
- Folgen, 48
 - rekursiv, 55
- Folgenkriterium, 166
 - Stetigkeit, 95
- Formeln, 30
- Fourierreihen, 140
- Fouriertransformation, 141
- Fubini, 262
- Fundamentale Funktionen, 63
- Fundamentalfolge, 77

- Funktion, 24
 - impliziert definierte, 242
- Funktional
 - positives lineares, 252
- Funktionaldeterminante, 194
- Funktionalgleichungen, 63
- Funktionalmatrix, 194
- Funktionen
 - implizite, 238
- Funktionenfolgen, 102

- ganze Zahlen, 31
- Gaußklammer, 31
- Gaußsches
 - Eliminierungsverfahren, 42
- geometrische Reihe, 82, 308
 - endliche, 32
- geordnet, 22
 - total, 22
- glatte Funktionen, 149
- gleich mächtig, 27
- gleichmäßig konvergent, 107
- gleichmäßig stetig, 94
- größer, Topologien, 163
- Gradient, 191
- Grenzwert, 48, 103
- Grenzwert von Funktionen, 102

- Häufungspunkte, 102
- höhere Ableitungen, 210
- harmonische Reihe, 82
- Hauptsatz der Analysis, 137
- Hausdorffscher Raum, 169
- Heine-Borel, 174
- Hesse-Form, 213
- Hesse-Matrix, 213
- Hilberträume, 160
- Homöomorphismus, 181
- Horner-Schema, 44

- Identität, 26
- Imaginäranteil, 35
- imaginäre Einheit, 35
- Immersion, 247
- Implizite Funktionen, 238

- indefinit, 221
- indirekter Beweis, 9
- Infimum, 23
- injektiv, 25
- Inneres, 168
- inneres Produkt, 161
- Integral
 - oberes, 255
 - unteres, 255
- Integralkriterium, 83
- Integrand, 129
- Integration, 127, 262
- Integrationstheorie, 251
- integrierbar, 128
- Intervall, 92
 - geschlossenes, 92
 - halboffenes, 92
 - offenes, 92
- Jacobi-Matrix, 194
- Kardinalität, 27
- kartesches Produkt, 181
- kartesisches Produkt, 24
- Kettenregel, 119, 195
- kleiner Satz vom Rang, 247
- kompakt, 173
- komplexe Zahlen, 35
- Komposition, 26
- Kontraktion, 239
- konvergent
 - gleichmäßig, 107
 - punktweise, 106
- Konvergenzkriterien
 - für Reihen, 82
- Konvergenzkriterium
 - Cauchysches, 78
- Konvergenzradius, 153
- konvergieren, 48
- konvexe Hülle, 198
- konvexe Mengen, 197
- kritischer Wert, 246
- l'Hospital
 - Regel von, 120
- Lagrange Restglied, 151, 232
- Laplaceoperator, 214
- Lebesgue Integral, 254
- Leibnizkriterium, 83
- Lemma von Fatou, 257
- Literaturverzeichnis, 311
- log, 63
- Logarithmus, 63
- lokales Extremum, 121, 222
- lokales Maximum, 121, 222
- lokales Minimum, 121, 222
- Mächtigkeit, 27
- Majorantenkriterium, 83
- majorantische Konvergenz, 257
- mathematische Methoden, 42
- Maximum, 23, 121
 - absolutes, 222
 - lokales, 121, 222
- Mengenlehre, 21
- Metrik, 76
- metrische Räume, 76
- Minimum, 23, 121
 - absolutes, 222
 - lokales, 121, 222
- Minorantenkriterium, 83
- Mittelwertsatz, 121, 199
 - der Integration, 137
- monoton fallen, 53, 98
- monoton wachsend, 53, 97
- monotone Konvergenz, 257
- Monotoniekriterium, 54
- natürliche Topologie, 163
- natürliche Zahlen, 30
- Nebenbedingungen
 - Extrema, 223
- negativ definit, 221
- Norm, 108, 158
- normierte Algebra, 201
- normierte Räume, 158
- Nullmenge, 256
- oben beschränkt, 23
- oberes Integral, 255

- offene Überdeckung, 173
- offene Mengen, 165
- Operatornorm, 160
- p,q-Formel, 35
- Parallelogramm-Regel, 161
- Parameterintegrale, 268
- Partialbruchzerlegung, 43
- Partialsummen, 80
- partiell differenzierbar, 190
 - stetig, 190
- partielle Ableitung, 190
- partielle Integration, 133
- PBZ, 43
- periodisch, 70
- Polarkoordinaten, 266
- Polynomdivision, 43
- positiv definit, 221
- Potenzmenge, 22
- Potenzreihen, 151, 308
- prähilbert Raum, 161
- Präintegral, 252
- Prinzip von Cavalieri, 263
- Produktregel, 119
- Projektion, 181
- Projektionsfunktion, 181
- Punkt
 - regulärer, 246
 - singulärer, 246
- punktweise konvergent, 106
- Quader, 252
 - achsenparalleler, 252
- quadratische Gleichungen, 35
- Quantoren, 8
- Quotientenkriterium, 83
- Quotientenregel, 120
- Rang, 246
 - kleiner Satz vom, 247
 - Satz vom, 248
- rationale Zahlen, 31
- Realteil, 35
- Rechenregeln, 99
 - Differentiation, 117, 119
 - Folgen, 52
 - Grenzwerte, 103
 - Integration, 132, 258
 - komplexe Zahlen, 37
 - Reihen, 82
 - Stetigkeit, 95
 - Summen, 33
 - Urbilder, 24
- reelle Zahlen, 32
- Regel von l'Hospital, 120
- regulärer Punkt, 246
- regulärer Wert, 246
- Reihen, 80
 - Konvergenzkriterien, 82
- rekursive Folgen, 55
- Relation, 22, 27
- Restglied, 150, 231
- Richtungsableitung, 191
- Rieszscher Raum, 252
- Satz über
 - den Rang, 248
 - implizite Funktionen, 243
 - Umkehrbarkeit, 98, 247
- Satz von
 - Archimedes, 30
 - B.Levi, 257
 - Bolzano, 97
 - Fubini, 262
 - H.A.Schwarz, 211
 - Heine-Borel, 174
 - Lagrange, 224
 - Lebesgue, 257
 - Pythagoras, 34
 - Rolle, 122
 - Schröder-Bernstein, 28
 - Taylor, 151
 - Weierstraß, 223
- Schlömilch'ses Restglied, 151, 232
- Schnittzahl, 34
- Schranke
 - obere, 23
 - untere, 23
- sin, 68

- singulärer Punkt, 246
- Sinus, 68
- Sinushyperbolicus, 71
- Skalarprodukt, 161
- Sphäre, 175
- Spurtopologie, 164
- Stammfunktion, 131
- Stammfunktionen, 309
- stetig, 92, 180
 - gleichmäßig, 94
- stetig differenzierbar, 149
- stetig fortsetzbar, 183
- Stetigkeit, 92
 - in metrischen Räumen, 94
- Strecke, 197
 - offene, 197
- streng monoton fallen, 53, 98
- streng monoton wachsend, 53, 98
- sublineares Funktional, 160
- Submersion, 247
- Substitutionsregel, 134, 264
- Supremum, 23
- Supremumsnorm, 115, 158
- surjektiv, 25

- tan, 66
- Tangens, 66
- Taylorformel, 231
- Taylorpolynom, 150, 231
- Taylorreihen, 149
 - mehrere Variablen, 231
- Teilüberdeckung, 173
- Teilfolgen, 55
- Teilmenge, 21
- Teleskopsummen, 86
- Topologie, 163, 165
- topologisch äquivalent, 164, 181
- topologische Räume, 163
- total differenzierbar, 192
- total geordnet, 22
- totale Ableitung, 192
- Träger, 258
- Transformation, 239
- Transformationsformel, 264

- Treppenfunktion, 127, 253

- Umgebung, 168
- Umkehrabbildung, 26, 185
- Umkehrsatz, 98, 247
- unbestimmte Ausdrücke, 121
- unbestimmtes Integral, 131
- uneigentliche Integration, 139
- unten beschränkt, 23
- unteres Integral, 255
- Urbild einer Abbildung, 24

- Verdichtungskriterium, 83
- Vereinigung, 21
- Verknüpfung, 26
- vollständig
 - metrischer Raum, 78
- vollständige Induktion, 11
- Volumenberechnung
 - im Raum, 265
- Volumenintegrale, 265

- Weg, 171
- Wegintegral, 212
- wegzusammenhängend, 171
- Wert
 - kritischer, 246
 - regulärer, 246
- Wertevorrat, 24
- Wurzelkriterium, 83

- Zahlensysteme, 84
- Zielbereich, 24
- zusammenhängend, 169
 - einfach, 170
 - weg, 171
- Zusammenziehung, 239
- Zwischenwertsatz, 97
- Zylinderkoordinaten, 265