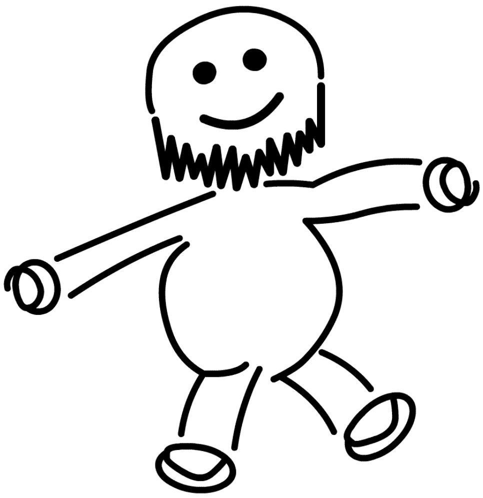
Funktionentheorie



Daniel Scholz im Sommer 2005

Überarbeitete Version vom 19. September 2007.

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen

Als Einleitung in die Funktionentheorie soll der Körper der komplexen Zahlen soll an dieser Stelle kurz wiederholt werden.

1.1 Grundlegende Definitionen

1.1.1 Definition

Es sei $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, somit seien (x, y) und (x', y') Elemente aus $\mathbb{C}$.

Es gelte

$$\begin{aligned} (x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y'), \\ (x, y) \cdot (x', y') &= (xx' - yy', xy' + x'y). \end{aligned}$$

1.1.2 Satz 1

Es gilt nun für $z = (x, y), w, v \in \mathbb{C}$:

(1) $(\mathbb{C}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(2) $zw = wz$

(3) $(1, 0)z = z$

(4) $(zw)v = z(wv)$

(5) mit $z \neq 0$ gibt es ein z', so dass $zz' = 1$ gilt und es ist

$$z' = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Somit bildet $(\mathbb{C}, +, \cdot\,)$ einen Körper.

1.1.3 Einbettung in $\mathbb{R}$

Es sei nun $i = (0, 1)$, dann ist $i^1 = (-1, 0) = -1$.

Weiter gilt für die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(x) = (x, 0)$ gerade

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi(x) + \varphi(y), \\ \varphi(xy) &= \varphi(x)\varphi(y). \end{aligned}$$

Somit ist φ ein Homomorphismus und da $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ zwei Körper sind ist φ auch injektiv.

Es gilt dann

$$1 \cdot \varphi(x) + i \cdot \varphi(y) \;=\; (1,0)(x,0) + (0,1)(y,0) \;=\; (x,y),$$

somit ist nun auch

$$(x+iy) \cdot (x' + iy') \;=\; (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Es sei weiter

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \operatorname{Re}(x+iy) &:=& \; x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{Im} z &= \operatorname{Im}(x+iy) &:=& \; y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.2 Anordnung in $\mathbb{C}$

Da es keine Ordnung der komplexen Zahlen gibt, die Addition und Multiplikation respektiert, sollen die folgenden Konstruktionen einen Ersatz bieten.

1.2.1 Komplexe Konjugation

Zu $z = x + iy \in \mathbb{C}$ sei $\overline{z} = x - iy$.

Es gilt dann für $z = x + iy, w \in \mathbb{C}$:

(1) $\overline{\overline{z}} = z$

(2) $z\overline{z} = x^2 + y^2$

(3) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(4) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(5) $\operatorname{Re} z = (z + \overline{z})/2$

(6) $\operatorname{Im} z = (z - \overline{z})/2$

1.2.2 Betrag

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ sei

$$|z| = \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Es gilt dann für $z = x + iy, w \in \mathbb{C}$:

(1) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

(2) $|\overline{z}| = |z|$

(3) $|zw| = |z|\,|w|$

(4) $|z+w| \leq |z| + |w|$

(5) $|z| \leq |x| + |y|$

(6) $|x| \leq |z|$ und $|y| \leq |z|$

Durch $d(z,w) := |z-w|$ wird nun eine Metrik auf $\mathbb{C}$ definiert. Weiter sei für ein $a \in \mathbb{C}$

$$B_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \varepsilon\}.$$

1.2.3 Polarkoordinaten

Jede komplexe Zahl z lässt sich darstellen als

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

mit $r \geq 0$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Es ergibt sich durch

$$\cos\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{und} \qquad \sin\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$ gerade

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Quadriert man eine komplexe Zahl z, so verdoppelt sich der Winkel φ, der Radius r bleibt dabei unverändert:

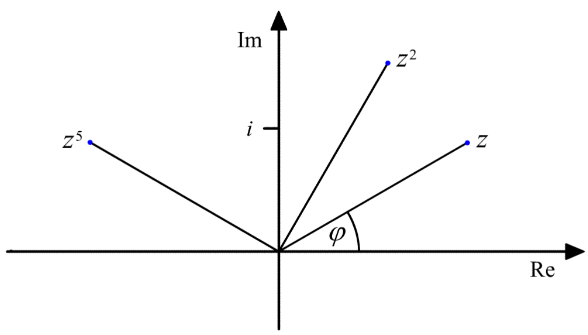


Abbildung 1: Quadrieren einer komplexen Zahl

Hat man nun eine komplexe Zahl z in Polarkoordinaten gegeben, also

$$z = re^{i\varphi},$$

so ergibt sich

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{und} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Weiter gilt $|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$.

Bemerkung

Für eine Gleichung der Form

$$z^k = r \cdot e^{i\varphi} \qquad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N}$$

gibt es genau k Möglichkeiten für die Wahl von z.

1.2.4 Beispiel

Finde alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die

$$z^2 = \frac{(1 - \sqrt{3}i)}{2}$$

gilt.

Lšoung

Es gilt $x = \operatorname{Re} z^2 = \frac{1}{2}$ sowie $y = \operatorname{Im} z^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Somit folgt mit

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \qquad \text{und} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

gerade

$$z^2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Es ergeben sich somit die beiden Lösungen

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \qquad \text{und} \qquad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

1.3 Folgen

1.3.1 Definition

$U \subset \mathbb{C}$ heißt eine ***Umgebung*** von $a \in \mathbb{C}$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(a) \subset U$ gilt.

1.3.2 Definition

Eine ***Folge*** (z_n) von komplexen Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{C}$, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, n \geq N :\; |z_n - a| < \varepsilon.$

(2) Zu jeder Umgebungen U mit $a \in U$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gerade $z_n \in U$ gilt.

Da der Grenzwert eindeutig bestimmt ist, schreibt man dafür auch

$$\lim_{n\to\infty} z_n \;=\; a.$$

1.3.3 Satz 1

Eine komplexe Folge (z_n) mit $z_n = x_n + iy_n$ konvergiert genau dann gegen $u = a + ib$ in $\mathbb{C}$, wenn für die reellen Folgen gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; a \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n \;=\; b.$$

1.3.4 Rechenregeln für Folgen

Für zwei konvergente komplexe Folgen (z_n) und (w_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = b$ gilt:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n + w_n) = a + b$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n w_n) = ab$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = |a|$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{z_n} = \overline{a}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(1/z_n) = 1/a$ [für $z_n, a \neq 0$]

1.3.5 Definition

Eine komplexe Folge (z_n) heißt ***Cauchyfolge***, wenn gilt: erfüllt ist:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, n, m \geq N :\; |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Bemerkung

$(z_n) = x_n + iy_n$ ist genau dann eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, wenn x_n und y_n Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ sind.

1.4 Reihen

1.4.1 Definition

Es sei (z_n) eine beliebige Folge und es sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} z_n$ die Folge der ***Partialsummen***. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z_n \;=\; \lim_{n\to\infty} s_n$$

eine komplexe ***Reihe***.

$\sum_{k=0}^{\infty} z_n$ ist ***konvergent***, wenn die Folge der Partialsummen konvergent ist.

Weiter ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_n$ ***absolut konvergent***, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent ist.

Jede absolut konvergent Reihe ist auch konvergent, die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

1.4.2 Majorantenkriterium

Seien $z_n \in \mathbb{C}$ und $c_n \in \mathbb{R}$ mit $c_n \geq 0$.

Ist die reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent und gilt $|z_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

sogar absolut konvergent.

1.4.3 Beispiele

(1) Für $|z| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \;=\; \frac{1}{1-z}.$$

(2) Für eine beliebiges $z \in \mathbb{C}$ ist die folgende ***Exponentialreihe*** konvergent:

$$\exp(z) \;=\; e^z \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

1.4.4 Satz 1

Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n = z$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n = w$ absolut konvergente komplexe Reihen und es sei

$$u_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k} \;=\; \sum_{k+l=n} z_k w_l.$$

Dann ist auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ absolut konvergent und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \;=\; z \cdot w$.

1.4.5 Beispiel

Es ergibt sich daraus gerade

$$e^z \cdot e^w \;=\; e^{z+w}.$$

1.5 Aufgaben

1.5.1 Aufgabe 1

Berechne Real- und Imaginärteil für folgende Zahlen [dabei $n \in \mathbb{Z}$]:

(1) $(2-3i)^3$, **(2)** $\frac{1}{i}$, **(3)** $\frac{2+5i}{3-4i}$, **(4)** i^n.

Lösung Teil 1

Es gilt

$$\begin{aligned} z \;=\; (2-3i)^3 \;&=\; (2-3i)(2-3i)(2-3i) \\ &=\; (4-12i-9)(2-3i) \\ &=\; (-5-12i)(2-3i) \\ &=\; (-10-9i-36) \;=\; -46-9i. \end{aligned}$$

Somit ist $\operatorname{Re} z = -46$ und $\operatorname{Im} z = -9$.

Lösung Teil 2

Es gilt

$$z \;=\; \frac{1}{i} \;=\; i^{-1} \;=\; (0+1i)^{-1} \;=\; (0,1)^{-1} \;=\; (0,-1) \;=\; -i.$$

Somit ist $\operatorname{Re} z = 0$ und $\operatorname{Im} z = -1$.

Lösung Teil 3

Es gilt

$$\begin{aligned} z &= \frac{2+5i}{3-4i} = (2,5)\cdot(3,-4)^{-1} \\ &= (2,5)\cdot\left(\frac{3}{25},\frac{4}{25}\right) \\ &= \left(-\frac{14}{25},\frac{23}{25}\right). \end{aligned}$$

Somit ist $\operatorname{Re} z = -\frac{14}{25}$ und $\operatorname{Im} z = \frac{23}{25}$.

Lösung Teil 4

Für $i = 0 + 1i = (0,1)$ gilt

$$\begin{aligned} (0,1)^2 &= (-1,0) = -1, \\ (0,1)^3 &= (0,1)\cdot(0,1)^2 = (0,-1) = -i, \\ (0,1)^4 &= (0,1)^2\cdot(0,1)^2 = (1,0) = 1, \end{aligned}$$

somit folgt

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \pmod 4 = 0 \\ i & \text{für } n \pmod 4 = 1 \\ -1 & \text{für } n \pmod 4 = 2 \\ -i & \text{für } n \pmod 4 = 3 \end{cases}.$$

1.5.2 Aufgabe 2

Bestimme alle komplexen Zahlen z, die die folgenden Gleichungen erfüllen:

(1) $z^2 = -i$, **(2)** $z^3 = -1$, **(3)** $z^2 = (1 - i\sqrt{3})/2$, **(4)** $\overline{z} = z^2$.

Lösung

Diese Aufgaben lassen sich auch über Polarkoordinaten lösen. Siehe dazu Beispiel 1.2.4 auf Seite 7.

Lösung Teil 1

Es sei $z = x + iy = (x,y) \in \mathbb{C}$.

Dann soll gelten:

$$z^2 = (x,y)^2 = (x^2 - y^2, 2xy) = (0,-1)$$

Es ergeben sich somit zwei Bedingungen an die Zahl z:

(1) $x^2 - y^2 = 0$, also $y = \pm x$

(2) $2xy = -1$, also $y = -\frac{1}{2x}$ für $x \neq 0$

Durch $\pm x = \frac{1}{2x}$ folgt $x = \pm\sqrt{1/2}$. Die Probe zeigt, dass die gegebene Gleichung nun gerade für

$$\left(\sqrt{1/2},\, -\sqrt{1/2}\right) \qquad \text{und} \qquad \left(-\sqrt{1/2},\, \sqrt{1/2}\right)$$

erfüllt wird.

Lösung Teil 2

Es sei $z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{C}$.

Dann soll gelten:

$$z^3 = (x,y)^3 = (x^2 - y^2, 2xy) \cdot (x,y) = (x^3 - 3xy^2,\, 3x^2y - y^3) = (-1, 0)$$

Es ergeben sich somit zwei Bedingungen an die Zahl z:

(1) $x^3 - 3xy^2 = -1$

(2) $3x^2y - y^3 = 0$

Für $x = 0$ gibt es also keine Lösung, für $y = 0$ muss jedoch $x = -1$ gelten. Somit ist $(-1, 0)$ eine Lösung. Aus $3x^2y - y^3 = 0$ folgt nun $y^2 = 3x^2$ für $y \neq 0$ und zusammen

$$x^3 = -1 + 3xy^2 = -1 + 9x^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 = 8x^3,$$

also $x = \frac{1}{2}$. Weiter folgt aus $y^2 = 3x^2$ auch $y = \pm\sqrt{3x^2}$. Auch die Probe zeigt, dass die gegebene Gleichung nun gerade für

$$(-1,\, 0), \qquad \left(1/2,\, \sqrt{3/4}\right) \qquad \text{und} \qquad \left(1/2,\, -\sqrt{3/4}\right)$$

erfüllt wird.

Lösung Teil 3

Es sei $z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{C}$.

Dann soll gelten:

$$z^2 = (x,y)^2 = (x^2 - y^2, 2xy) = (1/2,\, \sqrt{3}/2) = (1 - i\sqrt{3})/2$$

Es ergeben sich somit zwei Bedingungen an die Zahl z:

(1) $x^2 - y^2 = 1/2$

(2) $2xy = \sqrt{3}/2$

Aus der ersten Gleichung erhält man $x = \pm\sqrt{1/2 + y^2}$. Das ergibt zusammen

$$\begin{aligned} \pm 2\sqrt{1/2 + y^2}y &= \sqrt{3}/2 \\ \pm\sqrt{1/2y^2 + y^4} &= \sqrt{3}/4 \\ 1/2y^2 + y^4 &= \pm 3/16 \\ y^4 + 1/2y^2 - 3/16 &= 0. \end{aligned}$$

Mit $u := y^2$ berechnet man

$$u^2 + 1/2u - 3/16 = 0$$

und erhält $u_1 = 1/4$ sowie $u_2 = -3/4$. Da y eine reelle Zahl ist, ergibt sich nun nur $y = \pm\sqrt{1/4}$. Aus

$$x^2 - (\pm\sqrt{1/4})^2 = 1/2$$

berechnet man $x = \pm 3/4$. Die Probe zeigt, dass die gegebene Gleichung gerade für

$$\left(\sqrt{3/4},\ \sqrt{1/4}\right) \qquad \text{und} \qquad \left(-\sqrt{3/4},\ -\sqrt{1/4}\right)$$

erfüllt wird.

Lösung Teil 4

Es sei $z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{C}$.

Dann soll gelten:

$$\overline{z} = (x, -y) = (x^2 - y^2, 2xy) = (x, y)^2 = z^2$$

Es ergeben sich somit zwei Bedingungen an die Zahl z:

(1) $x^2 - y^2 = x$

(2) $2xy = -y$

Für $y = 0$ muss $x = 0$ oder $x = 1$ gelten, um beide Gleichungen zu erfüllen. Ist nun $y \neq 0$, so erhält man

$$-1 = 2x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -1/2.$$

Durch die erste Gleichung bekommt man dazu $y = \pm\sqrt{3/4}$.

Auch die Probe zeigt, dass die gegebene Gleichung nun gerade für

$$(0, 0), \qquad (1, 0)\,, \qquad \left(-1/2,\ \sqrt{3/4}\right) \qquad \text{und} \qquad \left(-1/2,\ -\sqrt{3/4}\right)$$

erfüllt wird.

1.5.3 Aufgabe 3

Bestimmt für alle $n \in \mathbb{N}$ Real- und Imaginärteil von

$$(1+i)^n + (1-i)^n.$$

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned}
& (1+i)^n + (1-i)^n \\
= \;& \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^n \;=\; 2^{n/2} \cdot \left(e^{i\pi n/4} + e^{-i\pi n/4}\right) \\
= \;& 2^{n/2} \cdot (2 \cdot \cosh(i\pi n/4)) \;=\; 2^{n/2+1} \cdot \cos(\pi n/4) \;\in\; \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

1.5.4 Aufgabe 4

Finde alle zweiten und dritten Wurzeln von i.

Lösung

Es gilt

$$i \;=\; e^{\frac{1}{2}\pi i} \;=\; e^{\frac{5}{2}\pi i} \;=\; e^{\frac{9}{2}\pi i}.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\sqrt{i} \;&=\; \left(e^{\frac{1}{2}\pi i}\right)^{1/2} \;=\; e^{\frac{1}{4}\pi i} \;=\; \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\sqrt{i} \;&=\; \left(e^{\frac{5}{2}\pi i}\right)^{1/2} \;=\; e^{\frac{5}{4}\pi i} \;=\; e^{-\frac{3}{4}\pi i} \\
&=\; \cos -\frac{3\pi}{4} + i\sin -\frac{3\pi}{4} \;=\; -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\sqrt[3]{i} \;&=\; \left(e^{\frac{1}{2}\pi i}\right)^{1/3} \;=\; e^{\frac{1}{6}\pi i} \;=\; \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \\
\sqrt[3]{i} \;&=\; \left(e^{\frac{5}{2}\pi i}\right)^{1/3} \;=\; e^{\frac{5}{6}\pi i} \;=\; \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} \;=\; -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \\
\sqrt[3]{i} \;&=\; \left(e^{\frac{9}{2}\pi i}\right)^{1/3} \;=\; e^{\frac{3}{2}\pi i} \;=\; e^{-\frac{1}{2}\pi i} \;=\; \cos -\frac{\pi}{2} + i\sin -\frac{\pi}{2} \;=\; -i.
\end{aligned}$$

2 Stetigkeit

Die Beweise zu allen Sätzen in diesem Kaptiel lassen sich ganz analog zur Differential- und Integralrechnung im reellen führen.

2.1 Definitionen und Sätze

2.1.1 Definitionen

Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt ***offen***, wenn es zu jedem $a \in M$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(a) \subset M$ gilt.

Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ heißt ***abgeschlossen***, wenn $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist.

Der Durchschnitt von zwei offenen Mengen und die Vereinigung von endlich vielen offenen Mengen sind wieder offen. Bei abgeschlossenen Menge ist dies genau umgekehrt.

2.1.2 Definition

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ heißt ***stetig*** bei $a \in M$, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;\forall\, z \in M : \; |z - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - f(a)| < \varepsilon$.

(2) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 : \; f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$.

(3) Zu jeder Umgebung V von $f(a)$ gibt es eine Umgebung U von a mit $f(U) \subset V$.

f heißt ***stetig***, wenn f für alle $a \in M$ bei a stetig ist.

2.1.3 Folgenkriterium

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ ist stetig bei $a \in M$, wenn zu jeder gegen a konvergenten Folge (a_n) in M auch die Bildfolge $f(a_n)$ gegen $f(a)$ konvergiert.

2.1.4 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : M \to \mathbb{C}$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) f ist stetig auf M.

(2) Für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$ ist auch $f^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ offen.

(3) Für alle abgeschlossenen Mengen $B \subset \mathbb{C}$ ist auch $f^{-1}(B) \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen.

2.1.5 Satz 2

Seien $M, N \subset \mathbb{C}$ offen, seien $f : M \to \mathbb{C}$ und $g : N \to \mathbb{C}$ stetig auf M bzw. N und es gelte $f(M) \subset N$.

Dann ist auch $(g \circ f)$ stetig auf M.

Beweis

Sei $W \subset \mathbb{C}$ eine beliebige offene Menge. Dann ist auch

$$(g \circ f)^{-1} \ = \ f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right)$$

offen, denn g ist stetig und somit ist nach Satz 2.1.4 auch $g^{-1}(W)$ offen. Analog gilt dies auch für f und somit ist das Urbild jeder offenen Menge wieder offen, was zeigt, dass auch $(g \circ f)$ stetig ist. □

2.2 Rechenregeln

2.2.1 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und seien $f, g : M \to \mathbb{C}$ stetig auf M.

Dann gilt:

(1) $(f + g) : M \to \mathbb{C}$ mit $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ ist stetig auf M.

(2) $(fg) : M \to \mathbb{C}$ mit $(fg)(a) = f(a)g(a)$ ist stetig auf M.

(3) $(1/f) : M \to \mathbb{C}$ mit $(1/f)(a) = 1/f(a)$ ist stetig auf M [für $f(a) \neq 0$].

2.2.2 Beispiele

(1) Die konstante Funktion $f(z) = c$ mit $c \in \mathbb{C}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{C}$.

(2) Die Identität $f(z) = z$ ist stetig auf ganz $\mathbb{C}$.

(3) Alle Polynomfunktionen

$$f(z) \;=\; a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

mit $a_0, .., a_n \in \mathbb{C}$ sind stetig auf ganz $\mathbb{C}$.

(4) Rationale Funktionen

$$\left(\frac{f}{g}\right)(z)$$

mit zwei Polynomfunktionen f und g sind auf ihrem Definitionsbereich, also auf $M = \{z \in \mathbb{C} \mid g(z) \neq 0\}$, stetig.

3 Differenzierbarkeit

3.1 Komplexe Differenzierbarkeit

3.1.1 Definition und Satz

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $a \in M$ und sei $f : M \to \mathbb{C}$.

f heißt bei a ***komplex differenzierbar***, wenn eine der Folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:

(1) Der Grenzwert

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \;=:\; f'(a) \;=\; \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(a)$$

existiert.

(2) Es gibt eine bei a stetige Funktion $\varphi : M \to \mathbb{C}$, so dass für alle $z \in M$ gerade

$$f(z) \;=\; f(a) + \varphi(z)(z - a)$$

gilt.

$f'(a)$ heißt dann die ***komplexe Ableitung*** von f bei a und es gilt

$$f'(a) \;=\; \varphi(a).$$

Beweis

Ist φ eine bei a stetige Funktion, so gilt

$$\varphi(z) \;=\; \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad \overset{z \to a}{\longrightarrow} \quad \varphi(a).$$

Es folgt dann direkt $\varphi(a) = f'(a)$.

Existiert nun der obige Grenzwert, so erhält man durch

$$\varphi(z) \;=\; \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{für} \quad z \neq a \\ f'(a) & \text{für} \quad z = a \end{cases}$$

eine bei a stetige Funktion. $\square$

3.1.2 Folgerung

Ist eine Funktion f bei a komplex differenzierbar, so ist f bei a auch stetig.

Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

3.1.3 Beispiele

(1) Die konstante Funktion $f(z) = c$ mit $c \in \mathbb{C}$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn durch

$$f(z) - f(a) \;=\; c - c \;=\; 0 \;=\; 0 \cdot (z - a)$$

erhält man mit $\varphi(z) = 0$ eine bei a stetig Funktion.

Es gilt somit $f'(a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{C}$.

(2) Die Identität $f(z) = z$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn durch

$$f(z) - f(a) \;=\; z - a \;=\; 1 \cdot (z - a)$$

erhält man mit $\varphi(z) = 1$ eine bei a stetig Funktion.

Es gilt somit $f'(a) = 1$ für alle $a \in \mathbb{C}$.

Es soll nun untersucht werden, ob eine Aussage über die komplexe Differenzierbarkeit getroffen werden kann, wenn man die komplexe Funktion in zwei reelle Funktionen unterteilt und die totale Ableitung betrachtet.

3.1.4 Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

Sei $M \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ und sei $a \in M$.

Sei weiter $z = x + iy \in M$ und seien $u, v : M \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x,y) \;=\; \mathrm{Re}\,(f(x+iy)) \qquad \text{und} \qquad v(x,y) \;=\; \mathrm{Im}\,(f(x+iy)).$$

Dann ist also

$$\begin{array}{rcl} f = (u,v) : M & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & (u(x,y),\, v(x,y)). \end{array}$$

Es ist nun äquivalent:

(1) f ist bei a komplex differenzierbar.

(2) $f = (u, v)$ ist bei a reell total differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) \;=\; \frac{\partial v}{\partial y}(a) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(a) \;=\; -\,\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

(3) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(a)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(a)$ und $\frac{\partial v}{\partial y}(a)$ existieren, sie sind in einer Umgebung von a stetig und es gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) \;=\; \frac{\partial v}{\partial y}(a) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(a) \;=\; -\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

(4) Es gibt eine bei a stetige Funktion $\varphi : M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$, so dass für alle $z \in M$ gerade

$$f(z) - f(a) \;=\; A(z) \cdot (z - a)$$

gilt.

Die Zusammenhänge zwischen den partiellen Ableitungen aus Punkt **(2)** und **(3)** heißen die ***Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen***.

3.1.5 Beispiel 1

Sei $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$.

Dann ist $u(x,y) = x^2 + y^2$ und $v(x,y) = 0$. Weiter gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \;=\; 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \;=\; 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \;=\; 0.$$

Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) \;=\; \frac{\partial v}{\partial y}(z) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(z) \;=\; -\frac{\partial v}{\partial x}(z)$$

werden also nur bei $z = 0$ erfüllt, somit ist f auch nur bei 0 komplex differenzierbar.

Man erhält auch durch

$$f(z) - f(0) \;=\; |z^2| - 0 \;=\; z\overline{z} - 0 \;=\; \overline{z}(z - 0)$$

$\varphi(z) = \overline{z}$ eine bei 0 stetig Funktion.

3.1.6 Beispiel 2

Sei $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dann ist $u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $v(x,y) = 0$.

Weiter erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \;=\; \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \;=\; 0.$$

Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen können somit für kein $z \in \mathbb{C}$ erfüllt werden, also ist f auch nirgends komplex differenzierbar.

3.1.7 Folgerung

Ist f bei a komplex differenzierbar, so gilt für die reelle Funktionaldeterminante von f bei a gerade

$$\det(A(a)) \;=\; \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(a)\right)^2 \;=\; |f'(a)|^2.$$

3.1.8 Polarkoordinaten

Ist eine komplexe Funktion in Polarkoordinaten geben, also

$$f(z) \;=\; f(re^{i\varphi}) \qquad \text{mit} \qquad r > 0 \text{ und } 0 \le \varphi < 2\pi,$$

so ergeben sich folgende ***Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen*** für ***Polarkoordinaten***:

$$r\frac{\partial u}{\partial r}(r,\varphi) \;=\; \frac{\partial v}{\partial \varphi}(r,\varphi) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r,\varphi) \;=\; -\,r\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi)$$

Beispiel

Siehe Aufgabe 3.4.1 Teil **(4)**.

3.2 Rechenregeln

Die Beweise der folgenden Rechenregeln verlaufen ganz analog zu reellen Funktionen, wenn man die Methode der Linearisierung verwendet.

3.2.1 Rechenregeln für komplexe Differenzierbarkeit

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und seien $f, g : M \to \mathbb{C}$ bei $a \in M$ komplex differenzierbar.

Dann gilt:

(1) $(f + g)$ ist bei a komplex differenzierbar und es gilt

$$(f+g)'(a) \;=\; f'(a) + g'(a).$$

(2) $(f \cdot g)$ ist bei a komplex differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)'(a) \;=\; f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(3) $(1/g)$ ist bei a komplex differenzierbar [mit $g(z) \neq 0$ für alle $z \in M$] und es gilt

$$(1/g)'(a) \;=\; -\,\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

(4) (f/g) ist bei a komplex differenzierbar [mit $g(z) \neq 0$ für alle $z \in M$] und es gilt

$$(f/g)'(a) \;=\; \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

3.2.2 Kettenregel

Seien $M, N \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ bei $a \in M$ komplex differenzierbar, es gelte $f(M) \subset N$ und sei $g : N \to \mathbb{C}$ bei $f(a) = b$ komplex differenzierbar.

Dann ist auch $(g \circ f)$ bei a komplex differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(a) \;=\; g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

3.2.3 Kettenregel'

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f : M \to \mathbb{C}$ bei $a \in M$ komplex differenzierbar, sei $c : I \to \mathbb{R}$ eine bei $t \in I$ differenzierbare Kurve und es gelte $a = c'(t)$.

Dann ist auch $(f \circ c)$ bei t komplex differenzierbar und es gilt

$$(f \circ c)'(t) \;=\; f'(a) \cdot c'(t) \;=\; f'(c'(t)) \cdot c'(t).$$

3.2.4 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und sei $f : M \to \mathbb{C}$.

Gilt für alle $a \in M$ gerade $f'(a) = 0$, so ist f konstant.

Die Umkehrung dieses Satzes wurde bereits im Beispiel 3.1.3 behandelt.

3.3 Holomorphe Funktionen

3.3.1 Definition

$M \subset \mathbb{C}$ heißt ein ***Gebiet***, wenn M offen und zusammenhängend ist.

Beispiele

(1) $\mathbb{C}$ ist ein Gebiet.

(2) $B_r(a)$ für $r > 0$ und $a \in \mathbb{C}$ ist ein Gebiet.

(3) $\mathbb{C} \setminus$ (endliche Menge) ist ein Gebiet.

3.3.2 Definition

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : M \to \mathbb{C}$.

f heißt ***holomorph***, wenn f für alle $a \in M$ komplex differenzierbar ist.

Bemerkung

Teilweise wird zusätzlich vorausgesetzt, dass M ein Gebiet ist.

3.3.3 Die Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $f(z) = e^z$ wird gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ x + iy & \mapsto & e^{x+iy} \;=\; e^x \cos y + i(e^x \sin y). \end{array}$$

Seien also $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x, y) \;=\; e^x \cos y \quad \text{und} \quad v(x, y) \;=\; e^x \sin y.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \;=\; e^x \cos y \;=\; \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \;=\; -e^x \sin y \;=\; -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen werden also auf ganz $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ erfüllt und die partiellen Ableitunge sind alle auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig, somit ist f holomorph.

Sei

$$M \;=\; \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid -\pi < y < \pi\}$$

und seien $z = x + iy$ und $z' = x' + iy'$ zwei komplexe Zahlen mit

$$f(z) \;=\; e^x \cos y + ie^x \sin y \;=\; e^{x'} \cos y' + ie^{x'} \sin y' \;=\; f(z').$$

Es gilt also

$$e^x \cos y \;=\; e^{x'} \cos y' \quad \text{und} \quad e^x \sin y \;=\; e^{x'} \sin y'.$$

Da e^x stets > 0 ist und da gerade $\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(y)$ gilt, muss also $y = y' + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gelten. Für $-\pi < y < \pi$ folgt also $y = y'$. Dies zeigt, dass f auf M injektiv ist.

Das Bild $f(M) = N$ ist gerade

$$N \;=\; \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0,\, x \leq 0\}.$$

Dies erhält man, indem man ein x fest wählt und somit für jeden beliebigen Radius $e^x > 0$ einen Kreis erhält, der nicht ganz geschlossen ist.

Die Funktion

$$\begin{array}{rcl} g : N & \to & M \\ z & \mapsto & \log|z| + i \arg z. \end{array}$$

ist die Umkehrfunktion von f, dabei ist $-\pi < \arg z < \pi$. Die Umkehrfunktion g ist nicht auf ganz $\mathbb{C}$ definiert, das die partiellen Ableitungen von g sonst genau auf der Menge $\mathbb{C} \setminus N$ nicht stetig wären.

3.4 Aufgaben

3.4.1 Aufgabe 1

Prüfe, ob die folgenden Funktionen holomorph sind.

(1) $f_1(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ mit $z = x+iy \in \mathbb{C}$.

(2) $f_2(x+iy) = \frac{x^2}{x^2+y^2} - i\frac{y^2}{x^2+y^2}$ mit $z \neq 0$.

(3) $f_3(x+iy) = \log\sqrt{x^2+y^2} + i \arctan\frac{y}{x}$ mit $x > 0$.

(4) $f_4(x+iy) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ mit $r > 0$, $-\pi < \varphi < \pi$.

Lösung Teil 1

Es ist

$$f_1(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

Seien also $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \quad \text{und} \quad v(x,y) = 3x^2y - y^3.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 - 3y^2, \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -6xy, \\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= 6xy, \\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= 3x^2 - 3y^2.
\end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind auf ganz $\mathbb{C}$ stetig und die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen werden für alle $x+iy$ aus der offenen Definitionsmenge erfüllt. Somit ist f_1 holomorph.

Lösung Teil 2

Es ist

$$f_2(x+iy) = \frac{x^2}{x^2+y^2} - i\frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

Seien also $u, v : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad v(x,y) = -\frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x(x^2+y^2)-2x^3}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y^3-2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig, die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen werden aber nicht erfüllt. Somit ist f_2 auch nicht holomorph.

Lösung Teil 3

Es ist

$$f_3(x+iy) = \log\sqrt{x^2+y^2} + i\ \arctan\frac{y}{x}.$$

Seien also $u, v : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad v(x,y) = \arctan\frac{y}{x}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2}, \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{x^2+y^2}, \\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= -\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot x^{-2}y = -\frac{y}{x^2+y^2}, \\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot x^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind auf der offenen Definitionsmenge stetig und auch die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen werden erfüllt. Somit ist f_3 holomorph.

Lösung Teil 4

Es ist

$$f_4(x+iy) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}.$$

Seien also $u, v : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x,y) \;=\; \sqrt{r}\cos(\varphi/2) \quad \text{und} \quad v(x,y) \;=\; \sqrt{r}\sin(\varphi/2).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} r\frac{\partial u}{\partial r}(r,\varphi) &= r \cdot \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos(\varphi/2) \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{r}\cos(\varphi/2), \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r,\varphi) &= -\frac{1}{2}\sqrt{r}\sin(\varphi/2), \\ r\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) &= r \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\varphi/2) \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{r}\sin(\varphi/2), \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi}(r,\varphi) &= \frac{1}{2}\sqrt{r}\cos(\varphi/2). \end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind auf der offenen Definitionsmenge stetig und auch die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für Polarkoordinaten werden erfüllt. Somit ist f_4 holomorph.

3.4.2 Aufgabe 2

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f = u + iv$ eine holomorphe Funktion mit zwei rellen Funktionen $u, v : M \to \mathbb{R}$, die zweimal stetig differenzierbar sind.

Zeige, dass dann gerade $\Delta u = \Delta v = 0$ gilt. Dabei ist Δ der Laplaceoperator

$$\Delta \;=\; \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Lösung

Da f holomorph ist, gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \;=\; \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; -\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Es folgt dann auch

$$\frac{\partial u}{\partial x \partial x}(x,y) \;=\; \frac{\partial v}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y \partial y}(x,y) \;=\; -\,\frac{\partial v}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Da u und v gerade zweimal stetig differenzierbar sind, lässt sich der Satz von H.A.Schwarz anwenden, es gilt also $\frac{\partial v}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y \partial x}(x,y)$. Somit erhält man zusammen

$$\frac{\partial u}{\partial x \partial x}(x,y) \;=\; -\,\frac{\partial u}{\partial y \partial y}(x,y)$$

und es folgt wie behauptet

$$\frac{\partial u}{\partial x \partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y \partial y}(x,y) \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;=\; \Delta u \;=\; 0.$$

Die Gleichung $\Delta v = 0$ folgt analog.

3.4.3 Aufgabe 3

Finde reelle Zahlen a, b, so dass

$$u(x+iy) \;=\; ax^3 - 12x^2y - 9xy^2 + by^3$$

der Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ ist.

Lösung

Sei also $f : u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Da die gesuchte Funktion f holomorph sein soll und da

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \;=\; 3ax^2 - 24xy - 9y^2 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; -12x^2 - 18xy + 3by^2$$

gilt, folgt nach den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gerade

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= 12x^2 + 18xy - 3by^2, \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= 3ax^2 - 24xy - 9y^2. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int 12x^2 + 18xy - 3by^2 \,\mathrm{d}x &= 4x^3 + 9x^2y - 3bxy^2 + g(y), \\ \int 3ax^2 - 24xy - 9y^2 \,\mathrm{d}y &= 3ax^2y - 12xy^2 - 3y^3 + h(x). \end{aligned}$$

Es soll also gerade

$$4x^3 + 9x^2y - 3bxy^2 + g(y) \;=\; h(x) + 3ax^2y - 12xy^2 - 3y^3$$

gelten, dabei ist g eine Funktion, die nur von y abhängt, und h ist Funktion, die nur von x abhängt. Es folgt somit

$$a \;=\; 3 \qquad \text{und} \qquad b \;=\; 4.$$

Der Imaginärteil der holomorphen Funktion f ist also

$$v(x+iy) \;=\; 4x^3 + 9xy^2 - 12xy^2 - 3y^3 + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

3.4.4 Aufgabe 4

Beweise oder widerlege:

Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, so gibt es für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ein $\xi \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z_1) - f(z_2) \;=\; f'(\xi) \cdot (z_1 - z_2).$$

Lösung

Diese Version des Mittelwertsatzes gilt nicht, es ist also ein Gegenbeispiel zu finden.

Sei
$$f(z) \ = \ e^{iz} \qquad \text{und} \qquad z_1 \ = \ 0, \ \ z_2 \ = \ 2\pi.$$

Dann gilt
$$f(z_1) - f(z_2) \ = \ f(0) - f(2\pi) \ = \ 1 - 1 \ = \ 0.$$

Es ist $f'(z) = ie^{iz}$ und es gilt somit
$$f'(\xi) \cdot (z_1 - z_2) \ = \ -2\pi i e^{i\xi}.$$

Da für alle $\xi \in \mathbb{C}$ gerade $e^{i\xi} \neq 0$ gilt, wurde ein Gegenbeispiel gefunden.

4 Potenzreihen

Lässt sich eine komplexe Funktion als Potenzreihe darstellen, so erzielt man sehr viel schönere Eigenschaften als in der reellen Analysis.

4.1 Definition und Konvergenzradius

4.1.1 Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge, sei $b \in \mathbb{C}$ und sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

heißt dann die ***Potenzreihe*** von f mit dem Mittelpunkt b. Sei nun

$$A \;=\; \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n \text{ ist konvergent} \right\}$$

und sei $b \in A$. Dann gilt $f(b) = a_0$.

Es soll untersucht werden, wie die Menge A jeweils aussieht.

4.1.2 Definition

Sei $M \subset \mathbb{C}$ beliebig und sei $f_n : M \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen.

(f_n) konvergiert ***gleichmäßig*** gegen $f : M \to \mathbb{C}$, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N \in \mathbb{N} \;\forall\, n \geq N : \;\; \sup\{|f_n(z) - f(z)| \mid z \in M\} < \varepsilon.$

(2) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N \in \mathbb{N} \;\forall\, n \geq N \;\forall\, z \in M : \;|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$

(3) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N \in \mathbb{N} : \;\|f_n - f\|_M$ mit $\|f\|_M = \sup\{|f(z)| \mid z \in M\}$.

4.1.3 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ beliebig und sei $f_n : M \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen, die alle bei $a \in M$ stetig sind. Weiter konvergiere (f_n) gleichmäßig gegen $f : M \to \mathbb{C}$.

Dann ist auch f stetig bei a.

4.1.4 Satz 2

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei $f_n : K \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen.

Sei weiter $|f_n(z)| \leq a_n$ für alle $z \in K$ mit $a_n \in \mathbb{R}$.

Konvergiert nun die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

sogar gleichmäßig auf K.

4.1.5 Lemma von Abel

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, sei $0 < r < r_0$, sei $(a_n r_0^n)_{n \geq 0}$ beschränkt und sei $b \in \mathbb{C}$ beliebig.

Dann konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

gleichmäßig und absolut auf $B_r(b)$.

4.1.6 Satz 3

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $b \in \mathbb{C}$ beliebig.

Dann gibt es genau ein $0 \leq r \leq \infty$ für das gilt:

$$\begin{array}{lcll} |z-b| < r & \Rightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n & \text{ist konvergent} \\ |z-b| > r & \Rightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n & \text{ist nicht konvergent} \end{array}$$

Dieses r ist also eindeutig bestimmt und heißt der ***Konvergenzradius*** der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n.$$

4.1.7 Folgerung

Die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : B_r(b) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n \end{array}$$

ist stetig auf ganz $B_r(b)$.

4.1.8 Beispiele

(1) Es gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Notwendigerweise gilt $r \geq 1$. Da aber $(1 \cdot 1^n)$ beschränkt ist, folgt nach dem Lemma von Abel $r = 1$.

(2) Für $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ gilt $r = \infty$.

(3) Für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^n$ gilt $r = 0$.

(4) Für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ gilt $r = 1$.

Für $z = 1$ ist die Reihe divergent, für $z = -1$ jedoch konvergent. Dies zeigt, dass man im Allgemeinen keine Aussage über die Konvergenz für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - b| = r$ treffen kann.

(5) Für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ gilt $r = 1$.

Diese Reihe ist jedoch auch für alle $|z| = 1$ konvergent.

4.1.9 Satz 4

Die beiden Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-b)^{n-1}$$

haben den gleichen Konvergenzradius.

4.2 Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz

Die folgenden Sätze lassen sich aus dem Cauchyschen Integralsatz 7.1.5 für Kreisscheiben folgern. Zur Vollständigkeit wurden sie jedoch hier und nicht erst später aufgeführt.

4.2.1 Satz 1

Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$ eine Potenzreihe der Funktion $f(z)$ mit einem Konvergenzradius von $r > 0$.

Dann ist f holomorph auf $B_r(b)$ und es gilt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-b)^{n-1}.$$

4.2.2 Folgerung 1

Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ eine Potenzreihe der Funktion $f(z)$.

Hat die Potenzreihe zu $f(z)$ den Konvergenzradius $r = \infty$, so ist f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

4.2.3 Beispiel

Die Exponentialfunktion $f(z) = e^z = \exp(z)$ lässt sich durch die Potenzreihe

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

darstellen und hat den Konvergenzradius $r = \infty$.

Somit ist die Exponentialfunktion holomorph und es gilt

$$f'(z) \;=\; \exp'(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \;=\; \exp(z).$$

4.2.4 Folgerung 2

Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ eine Potenzreihe der Funktion $f(z)$ mit einem Konvergenzradius von $r > 0$.

Dann ist f auf $B_r(b)$ unendlich oft komplex differenzierbar und es gilt

$$f^{(n)}(b) \;=\; n! a_n.$$

4.2.5 Beispiel

Es sei

$$\mathrm{lo}(z) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (z-1)^n.$$

Dann hat die Potenzreihe von $\mathrm{lo}(z)$ einen Konvergenzradius von $r = 1$. Somit ist $\mathrm{lo}(z)$ auf $B_1(1)$ holomorph und es gilt nach der geometrischen Reihe

$$\mathrm{lo}'(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n \;=\; \frac{1}{1-(1-z)} \;=\; \frac{1}{z}.$$

Aus $(\exp \circ \mathrm{lo})'(z) = 0$ und $(\exp \circ \mathrm{lo})(1) = 1$ erhält man $(\exp \circ \mathrm{lo}) = \mathrm{id}_{B_1(1)}$.

Demnach erinnert lo stark an den Logarithmus, sollte aber als diesen nicht angesehen werden.

4.3 Aufgaben

4.3.1 Aufgabe 1

Berechne den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\textbf{(1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^2, \qquad \textbf{(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^2, \qquad \textbf{(3)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^2,$$

$$\textbf{(4)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n.$$

Lösung

Zu einer gegebenen Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$ berechnet sich der Konvergenzradius r durch

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

falls die Grenzwerte existieren.

Teil 1

Es gilt

$$r = \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n^2}\right|}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Teil 2

Es gilt

$$r = \left| \frac{n! \cdot (n+1)^{n+1}}{n^n \cdot (n+1)!} \right| = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e.$$

Teil 3

Es gilt

$$r = \left| \frac{n! \cdot n! \cdot (2n+1)!}{(2n)! \cdot (n+1) \cdot n! \cdot (n+1) \cdot n!} \right| = \frac{2(2n+1)}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 4.$$

Teil 4

Es gilt

$$r = \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

4.3.2 Aufgabe 2

Berechne die Potenzreihe der Funktion $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{z}$ um ein $b \in \mathbb{C}^\times$.

Lösung 1

Es gilt

$$\begin{array}{rclcrcl} f(z) & = & z^{-1} & \qquad & f(b) & = & (-1)^0 \cdot 0! \cdot b^{-1}, \\ f'(z) & = & -z^{-2} & & f'(b) & = & (-1)^1 \cdot 1! \cdot b^{-2}, \\ f''(z) & = & 2z^{-3} & & f''(b) & = & (-1)^2 \cdot 2! \cdot b^{-3}, \\ f^{(3)}(z) & = & -6z^{-4} & & f^{(3)}(b) & = & (-1)^3 \cdot 3! \cdot b^{-4}, \\ f^{(4)}(z) & = & 24z^{-5} & & f^{(4)}(b) & = & (-1)^4 \cdot 4! \cdot b^{-5}, \\ & \vdots & & & & \vdots & \end{array}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} f(z) \quad &= \quad \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} f^{(n)}(b)(z-b)^n \;+\; R_{k+1}(z) \\ &= \quad \sum_{n=0}^{k} (-1)^n b^{-(n+1)}(z-b)^n \;+\; R_{k+1}(z) \\ &\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b^{-(n+1)}(z-b)^n. \end{aligned}$$

Lösung 2

Nach der geometrischen Reihe gilt gerade

$$\frac{1}{z} \;=\; \frac{1}{b-(b-z)} \;=\; \frac{\frac{1}{b}}{1-\left(\frac{b-z}{b}\right)} \;=\; \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b-z}{b}\right)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} b^{-(n+1)}(b-z)^n.$$

5 Kurvenintegrale

5.1 Kurven

Die folgenden Definitionen beziehen sich alle auf Kurven in $\mathbb{C}$. Diese Definitionen werden alle bei der Integration entlang Kurven vorausgesetzt und benötigt.

Die beiden Beispiele Kreis und Rechteck sollen jeweils die Definitionen verdeutlichen und werden immer wieder aufgegriffen.

5.1.1 Definition

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall.

Eine Abbildung

$$c : I \to \mathbb{C}$$

heißt eine ***Kurve*** in $\mathbb{C}$.

c heißt ***stetig*** [***differenzierbar***, ***stetig differenzierbar***, ...] wenn

$$\operatorname{Re} c, \operatorname{Im} c : I \to \mathbb{R}$$

stetige [differenzierbare, stetig differenzierbare, ...] Funktionen sind.

5.1.2 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $c : I \to \mathbb{C}$ eine Kurve.

Das Bild

$$Sp(c) \ := \ c(I)$$

heißt die ***Spur*** der Kurve c.

Bemerkung

Sind die Spuren von zwei Kurven c und d gleich, so müssen c und d aber nicht gleich sein.

5.1.3 Definition

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $c : I \to \mathbb{C}$ eine Kurve.

Dann heißt

$$AP(c) \ := \ c(a) \qquad \text{bzw.} \qquad EP(c) \ := \ c(b)$$

der ***Anfangspunkte*** bzw. der ***Endpunkt*** der Kurve c.

c heißt ***geschlossen***, wenn $AP(c) = EP(c)$ gilt.

5.1.4 Definition

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ zwei Intervalle und seien $c : I \to \mathbb{C}$ und $d : J \to \mathbb{C}$ zwei Kurven in $\mathbb{C}$.

c und d heißen ***stark äquivalent***, wenn es eine stetig differenzierbare bijektive Funktion

$$\varphi : J \to I$$

gibt, für die $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in J$ sowie $c \circ \varphi = d$ gilt.

Sind c und d stark äquivalente Kurven, so schreibt man dafür auch $c \approx d$.

5.1.5 Definition

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $c : I \to \mathbb{C}$ eine Kurve.

c heißt ***stückweise stetig differenzierbare*** Kurve, wenn es

$$a \ = \ a_0 \ < \ a_1 \ < \ a_2 \ < \ldots < \ a_n \ = \ b$$

gibt, so dass die Kurven

$$c|_{[a_{i-1}, a_i]}$$

für alle $i = 1, .., n$ stetig differenzierbar sind.

Eine stückweise stetig differenzierbare Kurve ist also immer stetig.

5.1.6 Beispiel Kreis

Sei $b \in \mathbb{C}$ und sei $r > 0$.

Dann beschreibt

$$\begin{aligned} c = (\partial B_r(b)) : [0, 2\pi] \ &\to \ \mathbb{C} \\ t \ &\mapsto \ re^{it} + b \ = \ (r \cos t) + i(r \sin t) + b \end{aligned}$$

eine Kurve in $\mathbb{C}$, nämlich einen Kreis vom Radius r um den Punkte b. Es gilt

$$Sp(\partial B_r(b)) \ = \ \{z \in \mathbb{C} \mid |z - b| = r\}.$$

$(\partial B_r(b))$ ist sogar eine unendlich oft stetig differenzierbare Kurve.

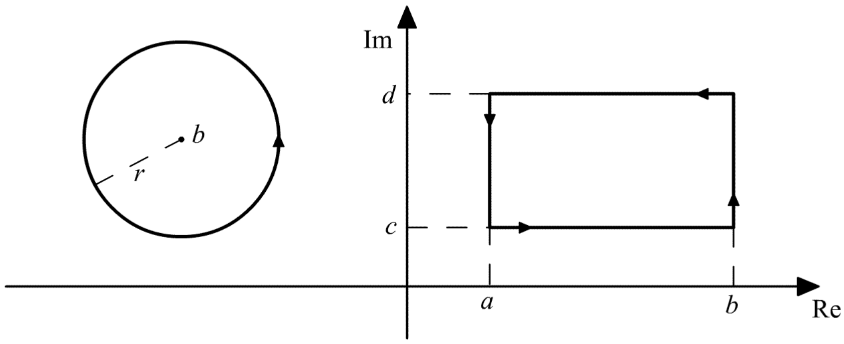


Abbildung 2: Kreis- und Rechteckkurven

5.1.7 Beispiel Rechteck

Sei $R = [a,b] + i[c,b] \subset \mathbb{C}$ mit $a < b$ und $c < d$.

Dann beschreibt

$$\begin{aligned} c = (\partial R) : [0,4] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \begin{cases} a + t(b-a) + ic & \text{für} \quad 0 \le t \le 1 \\ b + i(c + (t-1)(d-c)) & \text{für} \quad 1 \le t \le 2 \\ b + (t-2)(a-b) + id & \text{für} \quad 2 \le t \le 3 \\ a + i(d + (t-3)(c-d)) & \text{für} \quad 3 \le t \le 4 \end{cases} \end{aligned}$$

eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in $\mathbb{C}$, nämlich genau ein Rechteck.

5.1.8 Definition

Seien $I = [a,b], J = [a',b'] \subset \mathbb{R}$ zwei Intervalle und seien

$$c : [a,b] \to \mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad d : [a',b'] \to \mathbb{C}$$

zwei stückweise stetig differenzierbare Kurven in $\mathbb{C}$.

Weiter sei eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

(1) $EP(c) = AP(d)$.

(2) $b = a'$.

Dann ist $(d \cdot c)$ das ***Produkt*** von c und d und wird definiert durch

$$(d \cdot c)(t) \ := \ \begin{cases} c(t) & \text{für} \quad a \le t \le b \\ d(t) & \text{für} \quad a' \le t \le b' \end{cases} .$$

5.1.9 Definition

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $c : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Kurve in $\mathbb{C}$.

Dann ist c^{-1} das ***Inverse*** von c und wird definiert durch

$$\begin{aligned} c^{-1} : [-b, -a] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto c(-t). \end{aligned}$$

5.1.10 Beispiel Kreis

Es gilt

$$\left(\partial B_r(b)^{-1}\right)(t) \;=\; b + re^{-it}.$$

Eine Kurve c^{-1} durchläuft also die Kurve c in der entgegengesetzten Richtung.

5.1.11 Rechenregel für Kurven 1

Seien c und d zwei Kurven in $\mathbb{C}$.

Dann gilt:

(1) Ist $(d \cdot c)$ definiert, dann gilt $Sp(d \cdot c) = Sp(d) \cup Sp(c)$.

(2) $Sp(c^{-1}) = Sp(c)$.

5.2 Integration entlang Kurven

5.2.1 Definition

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine Funktion und seien weiter $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f : I \to \mathbb{R}$.

Dann sind auch u und v stetig und es gilt

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;:=\; \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$

5.2.2 Rechenregeln

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei

$$\mathcal{C}(I) \;=\; \{f : I \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig}\}$$

der Raum aller stetigen Funktionen von I nach $\mathbb{C}$.

Dann gilt:

(1) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathrm{d}t : \mathcal{C}(I) &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ist $\mathbb{C}$-linear.

(2) Sei $f \in \mathcal{C}(I)$ stetig differenzierbar.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b u'(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (u(b)-u(a)) + i(v(b)-v(a)) \;=\; f(b)-f(a). \end{aligned}$$

(3) Sei $\varphi : [a', b'] \to I$ stetig differenzierbar mit $\varphi(a') = a$ und $\varphi(b') = b$.

Dann gilt

$$\int_{a'}^{b'} \big((f\circ\varphi)\cdot\varphi'\big)(s)\,\mathrm{d}s \;=\; \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{mit} \qquad t \;=\; \varphi(s).$$

5.2.3 Satz 1

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f \in \mathcal{C}(I)$.

Dann gilt

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \;\le\; \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

5.2.4 Definition

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $c : I \to M$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in M.

Sei weiter $f : M \to \mathbb{C}$ stetig.

Dann gilt

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z \;:=\; \int_a^b f(c(t))\cdot c'(t)\,\mathrm{d}t \;:=\; \sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(c(t))\cdot c'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Bemerkung

$\int\limits_c f(z)\,\mathrm{d}z$ ist unabhängig von der Zerlegung $a = a_0 < .. < a_n = b$.

5.2.5 Rechenregeln

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei

$$\mathcal{C}(M) \;=\; \{f : M \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig}\}$$

der Raum aller stetigen Funktionen von M nach $\mathbb{C}$. Sei weiter c wie in der Definition zuvor.

Dann gilt:

(1) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \int_c \mathrm{d}t : \mathcal{C}(M) &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto \int_c f(z)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

ist $\mathbb{C}$-linear.

(2) Ist $c \approx d$ [also c stark äquivalent d], so gilt

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_d f(z)\,\mathrm{d}z.$$

5.2.6 Beispiel Kreis

Sei $c(t) = (\partial B_1(0))(t) = e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

Sei weiter $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und sei

$$f : M \to \mathbb{C} \qquad \text{mit} \qquad f(z) \;=\; \frac{1}{z}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_c f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} f(c(t)) \cdot c'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it}\,\mathrm{d}t \\ &= i\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t \;=\; 2\pi i. \end{aligned}$$

5.2.7 Definition

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $c : I \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve.

Die ***Länge*** von c ist dann

$$L(c) \;:=\; \int_a^b |c'(t)|\,\mathrm{d}t \;=\; \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |c'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

5.2.8 Beispiel Kreis

Sei $c(t) = (\partial B_r(b))(t) = re^{it} + b$ mit $r > 0$, $b \in \mathbb{C}$ und $t \in [0, 2\pi]$.

Dann gilt

$$L(c) \;=\; \int_0^{2\pi} |c'(t)| \,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{2\pi} |rie^{it}| \,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}t \;=\; 2\pi r.$$

5.2.9 Beispiel Strecke

Sei $c(t) = a + t(b - a)$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $t \in [0, 1]$.

Dann gilt

$$L(c) \;=\; \int_0^1 |c'(t)| \,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^1 |b - a| \,\mathrm{d}t \;=\; |b - a|.$$

5.2.10 Satz 2

Seien $c, d : I \to \mathbb{C}$ zwei Kurven.

Gilt $c \approx d$, so folgt $L(c) = L(d)$.

5.2.11 Rechenregel für Kurven 2

Seien c und d zwei Kurven in $\mathbb{C}$ und sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig.

Dann gilt:

(1) $L(d \cdot c) = L(d) + L(c)$.

(2) $L(c^{-1}) = L(c)$.

(3) Es gilt

$$\int_{c^{-1}} f(z) \,\mathrm{d}z \;=\; -\int_c f(z) \,\mathrm{d}z.$$

(4) Ist $(d \cdot c)$ definiert, dann gilt

$$\int_{(d \cdot c)} f(z) \,\mathrm{d}z \;=\; \int_c f(z) \,\mathrm{d}z + \int_d f(z) \,\mathrm{d}z.$$

5.2.12 Satz 3

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig, sei c eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in M und sei $k = \sup\{|f(z)| \mid z \in Sp(c)\} < \infty$.

Dann gilt

$$\left| \int_c f(z) \,\mathrm{d}z \right| \;\leq\; k \cdot L(c).$$

5.2.13 Folgerung

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f_n : M \to \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig, sei c eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in M und auf $Sp(c)$ konvergiere (f_n) gleichmäßig gegen $f : Sp(c) \to \mathbb{C}$.

Dann gilt

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_c f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

5.2.14 Satz 4

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $a, b \in M$ beliebig.

Dann gibt es eine stückweise stetig differenzierbare Kurve c in M mit

$$AP(c) \;=\; a \qquad \text{und} \qquad EP(c) \;=\; b.$$

5.3 Stammfunktionen

5.3.1 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, seien $f, F : M \to \mathbb{C}$ stetig, sei c eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in M und es gelte $F' = f$.

Dann gilt

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; F(EP(c)) - F(AP(c)) \;=\; F(c(b)) - F(c(a)).$$

Beweis

Es gilt gerade nach dem Hauptsatz der Analysis

$$\begin{aligned}\int_c f(z)\,\mathrm{d}z \;&=\; \int_a^b (f \circ c)(t) \cdot c'(t)\,\mathrm{d}t \\ &=\; \int_a^b (F \circ c)'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; (F \circ c)(b) - (F \circ c)(a).\end{aligned}$$

□

5.3.2 Folgerung

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig und es gebe eine Stammfunktion $F : M \to \mathbb{C}$ von f.

Ist c eine geschlossene Kurve in M, so folgt

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0.$$

5.3.3 Beispiel Kreis

Sei $c(t) = (\partial B_1(0))(t) = e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{z}$.

Dann gilt nach 5.2.6

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi i.$$

Da c aber geschlossen ist, kann es also keine Funktion $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z) = \frac{1}{z}$ geben.

5.3.4 Beispiel Polynome

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom und sei c eine stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve.

Dann gilt

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0,$$

da es zu jedem Polynom auch eine Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$ gibt.

5.4 Aufgaben

5.4.1 Aufgabe 1

Integriere die Funktionen

$$\textbf{(1)}\;\; f(z) \;=\; |e^z| \qquad \text{und} \qquad \textbf{(2)}\;\; f(z) \;=\; e^z$$

über den Kurven c und d. Dabei ist c das Produkt der Strecken von 0 nach i und von i nach $1 + i$ und d die direkte Strecke von 0 nach $1 + i$.

Lösung

Zunächst müssen die Kurven parametrisiert werden:

$$c(t) \;=\; \begin{cases} ti & \text{für } \; 0 \le t \le 1 \\ (t-1)+i & \text{für } \; 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

$$d(t) \;=\; t + it \quad \text{ für } 0 \le t \le 1.$$

Teil 1

Es gilt $f(z) = f(x + iy) = e^x$. Somit folgt

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^1 f(c(t)) \cdot c'(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 f(c(t)) \cdot c'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 1 \cdot i \,\mathrm{d}t + \int_1^2 e^{t-1} \cdot 1 \,\mathrm{d}t \;=\; i + e - 1, \\
\int_d f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 f(d(t)) \cdot d'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 e^t \cdot (1+i)\,\mathrm{d}t \;=\; (1+i)(e-1) \;=\; (e-1) + i(e-1).
\end{aligned}
$$

Teil 2

Für die Funktion $F(z) = e^z$ gilt $F'(z) = f(z) = e^z$, somit hat $f(z)$ eine Stammfunktion und es folgt sofort

$$
\begin{aligned}
\int_c f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_d f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; F(EP(d)) - F(AP(d)) \\
&= F(1+i) - F(0) \;=\; e^{1+i} - 1.
\end{aligned}
$$

5.4.2 Aufgabe 2

Berechen für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ und alle $r > 0$

$$\int_{\partial B_r(0)} z^n \overline{z}^m \,\mathrm{d}z.$$

Lösung

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial B_r(0)} z^n \overline{z}^m \,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n \cdot (re^{-it})^m \cdot rie^{it}\,\mathrm{d}t \\
&= i(r^{n+m+1}) \int_0^{2\pi} e^{i(n-m+1)t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Sei nun $n - m + 1 \neq 0$, dann folgt

$$\int_{\partial B_r(0)} z^n \overline{z}^m \,\mathrm{d}z \;=\; i(r^{n+m+1}) \left[\frac{1}{i(n-m+1)} e^{i(n-m+1)t}\right]_0^{2\pi} \;=\; 0.$$

Gilt $n - m + 1 = 0$, dann folgt

$$\int_{\partial B_r(0)} z^n \overline{z}^m \,\mathrm{d}z \;=\; i(r^{n+m+1}) \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t \;=\; 2\pi i r^{2(n+1)}.$$

5.4.3 Aufgabe 3

Für welche $a, b \in \mathbb{C}$ hat

$$f(z) \;=\; \frac{1}{az+b}$$

eine Stammfunktion?

Lösung

Die Funktion $f(z)$ ist auf $M = \{z \in \mathbb{C} \mid az + b \neq 0\}$ definiert und hat genau dann eine Stammfunktion, wenn für jede geschlossene Kurve c gerade $\int_c f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ gilt.

(1) Sei $a = 0$ und $b \neq 0$.

Dann ist $f(z) = 1/b$ eine konstante Funktion und mit

$$F(z) \;=\; \frac{1}{b}z$$

gibt es eine Stammfunktion von $f(z)$.

(2) Sei $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

Dann gilt

$$f(z) \;=\; \frac{1}{az+b} \;=\; \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{z+b/a}.$$

Für die Kurve $\partial B_1(b/a)$ gilt dann

$$\int_{\partial B_1(b/a)} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \frac{1}{a}2\pi i \;\neq\; 0,$$

somit kann $f(z)$ keine Stammfunktion haben.

5.4.4 Aufgabe 4

Die Kurven c und d seien wie in der folgenden Abbildung:

Abbildung 3: Integrationskurven c und d

Berechne für $f(z) = z^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Integrale

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{und} \qquad \int_d f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Lösung

Die Funktion $f(z) = z^n$ hat für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Stammfunktion und die beiden Kurven c und d haben den gleichen Anfangspunkt 1 und gleichen Endpunkt i, somit gilt zunächst

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z = \int_d f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Es folgt nun für die Kurve c

$$\begin{aligned}
\int_c f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^{\pi/2} e^{int}\cdot ie^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} ie^{i(n+1)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{n+1}e^{i(n+1)t}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}\left(e^{i(n+1)\pi/2}-1\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\left(i^{n+1}-1\right),
\end{aligned}$$

und auch für d erhält man das gleiche Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\int_d f(z)\,\mathrm{d}z &= -\int_{d_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{d_2} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t + i\int_0^1 (it)^n \\
&= -\left(\frac{1}{n+1}\right) + i^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(i^{n+1}-1\right).
\end{aligned}$$

6 Ketten

6.1 Ketten

6.1.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $C(M)$ die Menge aller stückweise stetig differenzierbare Kurven in M.

Eine ***Kette*** oder ***1-Kette*** ist eine Abbildung

$$\Gamma : C(M) \to \mathbb{Z},$$

die nur endlich vielen stückweise stetig differenzierbare Kurven aus $C(M)$ eine ganze Zahl zuordnet.

Formale Schreibweise:

$$\Gamma \;=\; \sum_{c \in C(M)} n_c c \qquad \text{mit fast allen } n_c \;=\; 0.$$

Dabei heißt $n_c \in \mathbb{Z}$ das ***Gewicht*** der Kurve c.

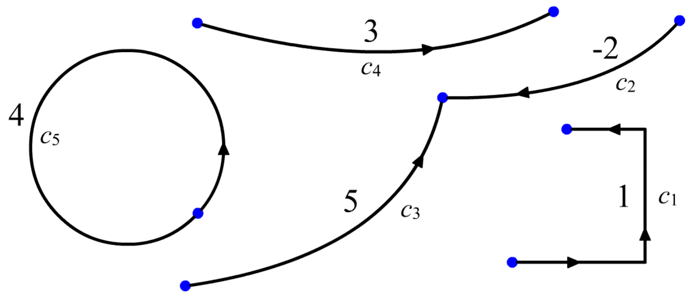


Abbildung 4: Eine Kette in M

Man addiert Ketten koeffizientenweise, also ist die Summe von

$$\Gamma_1 \;=\; 2c_1 - c_2 + 5c_3 \qquad \text{und} \qquad \Gamma_2 \;=\; c_2 - 2c_3 + 4c_4$$

gerade

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 \;=\; 2c_1 + 3c_3 + 4c_4.$$

Die Menge aller Ketten wird in M mit $C_1(M)$ bezeichnet.

Bemerkung

Ketten sind also Elemente der freien abelschen Gruppe, die von den Kurven $c \in C(M)$ erzeugt wird.

6.1.2 Die Spur einer Kette

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $\Gamma = \sum\limits_c n_c c \in C_1(M)$ eine Kette in M.

Die Spur von Γ ist dann die Vereinigung der Spuren c mit $n_c \neq 0$, also

$$Sp(\Gamma) \; = \; \bigcup_c Sp(c) \; \subset \mathbb{C} \qquad \text{mit} \;\; n_c \neq 0$$

6.1.3 Definition

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen.

Eine ***0-Kette*** ist eine Abbildung

$$\Lambda : M \; \to \; \mathbb{Z},$$

die nur endlich vielen Punkten aus M eine ganze Zahl zuordnet.

Formale Schreibweise:

$$\Lambda \; = \; \sum_{z \in M} n_z z \qquad \text{mit fast allen } n_z \; = \; 0.$$

Die Menge aller 0-Ketten in M wird mit $C_0(M)$ bezeichnet.

6.1.4 Der Rand einer Kette

Der Rand ∂c einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve c in M ist

$$\partial c \; = \; 1 \cdot [EP(c)] - 1 \cdot [AP(c)] \; = \; [c(b)] - [c(a)] \; \in \; C_0(M).$$

Sei nun $\Gamma = \sum\limits_c n_c c \in C_1(M)$ eine Kette in M.

Dann wird der Rand $\partial\Gamma$ gegeben durch die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \partial : C_1(M) \;\; &\to \;\; C_0(M) \\ \Gamma \;\; &\mapsto \;\; \sum_c n_c \partial c \end{aligned}$$

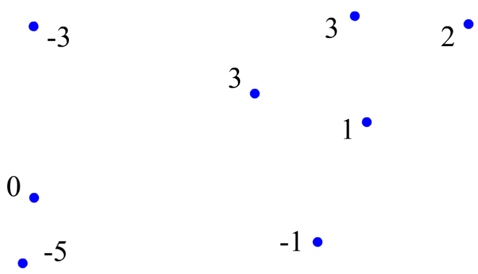


Abbildung 5: Rand der Kette aus der vorherigen Abbildung

6.1.5 Definition

Eine Kette Γ heißt ***geschlossen***, wenn $\partial\Gamma = 0$ gilt.

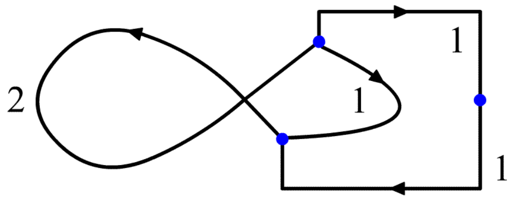


Abbildung 6: Eine geschlossene Kette

Geschlossene Ketten bilden den Kern der Rand ∂ Abbildung.

6.1.6 Integration über Ketten

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ und sei $\Gamma = \sum\limits_c n_c c \in C_1(M)$ eine Kette in M.

Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;:=\; \sum_c n_c \cdot \int_c f(z)\,\mathrm{d}z.$$

6.1.7 Rechenregeln

Bei der Integration über Ketten gelten die üblichen Rechenregeln:

(1) Sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig und seien Γ_1 und Γ_2 zwei Ketten in M.

Dann gilt

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(2) Sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig, sei $\Gamma = \sum\limits_c n_c c \in C_1(M)$ eine Kette in M und sei $k = \sup\{|f(z)| \mid z \in Sp(\Gamma)\}$.

Dann gilt

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \;\le\; k\cdot\sum_c |n_c| L(c).$$

6.1.8 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig, sei F eine Stammfunktion von f und sei $\Gamma \in C_1(M)$ eine Kette in M.

Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \tilde{F}(\partial\Gamma).$$

Dabei ist $\tilde{F}(\partial\Gamma) = \sum_z n_z F(z) \in \mathbb{C}$.

6.1.9 Satz 2

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig.

Dann besitzt f genau dann eine Stammfunktion, wenn für alle geschlossenen Ketten $\Gamma \in C_1(M)$

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0$$

gilt.

6.2 Äquivalenzklassen von Ketten

6.2.1 Definition

Sei M eine beliebige nicht leere Menge.

Eine ***Äquivalenzrelation*** R ist eine ***Relation*** auf M, so dass für jede ***Äquivalenzklasse*** $A \subset M \times M$ gilt:

(1) Für alle $a \in M$ gilt $aRa \in A$

(2) Für alle $aRb \in A$ folgt $bRa \in A$

(3) Für alle $aRb \in A$ und für alle $bRc \in A$ folgt $aRc \in A$

6.2.2 Beispiel

Sei $M = \mathbb{Z}$ die Menger der ganzen Zahlen. Dann definiert

$$aRb \quad :\Leftrightarrow \quad a \text{ und } b \text{ haben den selben Rest bei Division durch } 5$$

eine Äquivalenzrelation.

6.2.3 Äquivalenzklassen von Ketten

Sei $C_1(M)$ die Menge aller Ketten auf einer offenen Menge M.

Es wird nun folgende Äquivalenzrelation R auf $C_1(M)$ definiert:

Es gilt $\Gamma_1 R \Gamma_2$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) Γ_1 und Γ_2 sind stückweise stetig differenzierbare Kurven in M und es gilt $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$.

(2) Es gibt eine stückweise stetig differenzierbare Kurve c in M, so dass $\Gamma_1 = -c$ und $\Gamma_2 = c^{-1}$ gilt.

(3) Es gibt zwei stückweise stetig differenzierbare Kurven c und d in M, so dass $\Gamma_1 = d \cdot c$ und $\Gamma_2 = c + d = 1[c] + 1[d]$ gilt.

Sind nun Γ_1 und Γ_2 nach dieser Relation in einer Äquivalenzklasse, so schreibt man statt $\Gamma_1 R \Gamma_2$ auch

$$\Gamma_1 \sim \Gamma_2.$$

Bemerkung

Diese Relation ist sogar ***kompatibel*** mit "+", dass heißt aus $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ und $\Gamma_1' \sim \Gamma_2'$ folgt

$$\Gamma_1 + \Gamma_1' \sim \Gamma_2 + \Gamma_2'.$$

6.2.4 Beispiel Rechteck

Es seien folgende zwei Rechtecke gegeben:

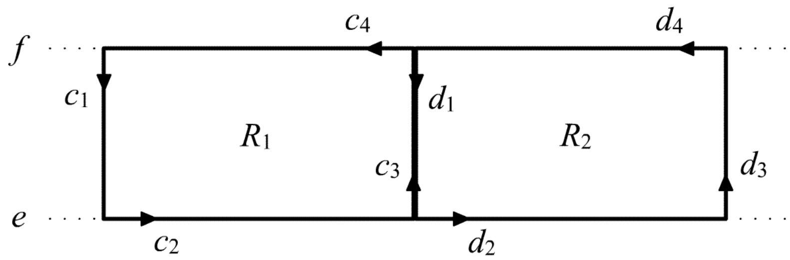


Abbildung 7: Rechteckkurven

Es ist also gerade

$$\partial R_1 \sim c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \qquad \text{und} \qquad \partial R_2 \sim d_1 + d_2 + d_3 + d_4.$$

Weiter gilt

$$c_3(t) = e + t(f - e) \qquad \text{und} \qquad d_1(t) = f + t(e - f),$$

es folgt also $d_1 \approx c_3^{-1}$ und $c_3 + d_1 \sim 0$.

Zusammen ergibt sich nun

$$\begin{aligned}\partial R_1 + \partial R_2 &\sim c_1 + c_2 + c_4 + d_2 + d_3 + d_4 + c_3 + d_1 \\ &\sim c_1 + c_2 + c_4 + d_2 + d_3 + d_4 \sim \partial(R_1 \cup R_2).\end{aligned}$$

6.2.5 Beispiel Kreis

Es sind folgende zwei Halbkreise gegeben:

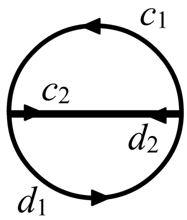


Abbildung 8: Halbkreiskurven

Es ist also $d_2 \approx c_2^{-1}$ und $d_2 + c_2 \sim 0$.

Es ergibt sich somit

$$c_1 + c_2 + d_1 + d_2 \sim c_1 + d_1 \sim \partial B_1(0).$$

6.2.6 Satz 1

Seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \in C_1(M)$ mit $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$.

Dann gilt $\partial\Gamma_1 = \partial\Gamma_2$.

6.2.7 Satz 2

Seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \in C_1(M)$ mit $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ und es sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig.

Dann gilt

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

6.3 Aufgaben

6.3.1 Aufgabe 1

Berechne das Integral

$$\int_{\Gamma} (z^{-1} + z^3)\,\mathrm{d}z,$$

wobei Γ eine Kette ist, die durch

$$\Gamma = \partial B_1(0) + 2\partial B_1(3) + 4\partial R$$

gegeben wird. Dabei ist $R = [-2,2] + i[1,2]$.

Lösung

Alle Kurven, aus denen Γ zusammengesetzt ist, sind geschlossen, demnach ist auch Γ geschlossen.

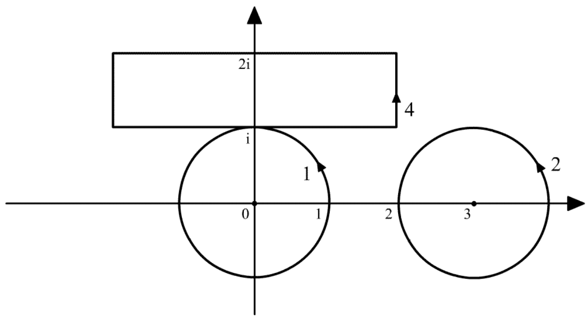


Abbildung 9: Die Kette Γ

Da es zu z^3 eine Stammfunktion gibt, folgt zunächst

$$\int_\Gamma (z^{-1} + z^3)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \int_\Gamma z^3\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Auf der Menge $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $z \mapsto z^{-1}$ holomorph und es gilt $R \subset M$ sowie $B_1(3) \subset M$. Somit folgt

$$\begin{aligned}\int_\Gamma (z^{-1} + z^3)\,\mathrm{d}z &= \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \,+\, 2\cdot \int_{\partial B_1(3)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \,+\, 4\cdot \int_{\partial R} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi i + 2\cdot 0 + 4 \cdot 0 = 2\pi i.\end{aligned}$$

7 Cauchyscher Integralsatz

7.1 Cauchyscher Integralsatz für Kreisscheiben

7.1.1 Lemma von Goursat

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $R \subset M$ ein Rechteck.

Dann gilt
$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0.$$

Beweisskizze

Sei L die Länge von ∂R und sei D der Durchmesser von R. Unterteilt man nun R symmetrisch in vier kleine Rechtecke $R_1, .., R_4$, so erhält man
$$\left|\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \;\leq\; \sum_{i=1}^{4}\left|\int_{\partial R_i} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \;\leq\; 4\left|\int_{\partial R_1} f(z)\,\mathrm{d}z\right|.$$
Unterteilt man ein kleines Rechteck immer wieder, so erhält man eine Folge (R_k) von Rechtecken mit
$$L(\partial R_k) \;=\; \frac{1}{2^k}L \qquad \text{und} \qquad D(R_n) \;=\; \frac{1}{2^k}D.$$
Somit gibt es ein $a \in \mathbb{C}$ mit
$$a \;\in\; \bigcap_{k=0}^{\infty} R_k.$$
Da f bei a differenzierbar also auch stetig ist, folgt aus $f(z) - f(a) = f'(a)(z-a)$ und aus der Definition von Stetigkeit mit einer Wahl von $N \in \mathbb{N}$ mit $D(R_n) < \delta$ die Abschätzung
$$\frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \;\leq\; \frac{1}{4^n}DL\varepsilon \quad\longrightarrow\quad 0.$$

Bemerkung

Statt mit Rechtecken kann man das Lemma von Goursat und auch den Beweis mit Dreiecken formulieren.

7.1.2 Lemma

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei $f : K \to \mathbb{C}$ stetig.

Dann ist f gleichmäßig stetig auf K, es gilt also

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, z, w \in K:\ |z - w| < \delta\ \Rightarrow\ |f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

Bemerkung

Dieser Satz lässt sich wie in der mehrdimensionalen Analysis beweisen und wird für den Beweis des folgenden Satzes benötigt.

7.1.3 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig und seien $g_1, .., g_k$ endlich viele achsenparallele Geraden, so dass f auf $M \setminus (g_1 \cup .. \cup g_k)$ holomorph ist.

Dann gilt für jedes Rechteck $R \subset M$ gerade

$$\int_{\partial R} f(z)\, \mathrm{d}z \;=\; 0.$$

Beweisskizze

Sei $R \subset M$ ein beliebiges Rechteck, dass von einigen g_i geteilt wird:

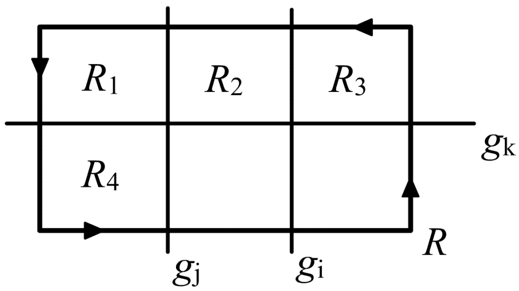


Abbildung 10: Geteiltes Rechteck

Dann gilt $\partial R \sim \sum\limits_m \partial R_m$, dabei sind R_m die kleinen Rechtecke.

Nach dem Lemma von Goursat kann das Problem nun auf ein kleines Rechteck R_k vereinfacht werden, indem man zeigt, dass das Integral von f über dem Rand jedes kleinen Rechteckes verschwindet.

Das kleine Rechteck R_k kann nur von bis zu vier achsenparallelen Gerade am Rand geschnitten werden. Durch die gleichmäßige Stetigkeit von f auf R_k kann man dann zeigen, dass

$$\int_{\partial R_k} f(z)\, \mathrm{d}z \;=\; 0$$

gilt.

7.1.4 Satz 2

Sei $M = B_r(b) \subset \mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe mit $r > 0$ und $b \in \mathbb{C}$.

Sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig und es gelte für jedes Rechteck $R \subset M$ gerade

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0.$$

Dann hat f eine Stammfunktion.

7.1.5 Cauchyscher Integralsatz für Kreisscheiben

Sei $M = B_r(b) \subset \mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe mit $r > 0$ und $b \in \mathbb{C}$.

Sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig und seien $g_1, .., g_k$ endlich viele achsenparallele Geraden, so dass f auf $M \setminus (g_1 \cup .. \cup g_k)$ holomorph ist.

Dann gilt für jede geschlossene Kette $\Gamma \in C_1(M)$ gerade

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0.$$

Beweisskizze

Aus den vorherigen zwei Sätzen folgt gerade, dass f eine Stammfunktion hat.

Nach Satz 6.1.8 folgt dann wie behauptet

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \tilde{F}(\partial\Gamma) \;=\; 0.$$

7.1.6 Bemerkung

Es ist dabei sehr wichtig, dass M eine Kreisscheibe ist:

Sei $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sei $f : M \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{z}$ und sei $\Gamma = c = \partial B_1(0)$. Dann gilt nach Beispiel 5.2.6 gerade

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi i \;\neq\; 0,$$

obwohl bis auf die offene Kreisscheibe alle Bedingungen des Satzes erfüllt wurden.

Es stellt sich also die Frage, wie sich die geometrische Form von M auf den Cauchyschen Integralsatz auswirkt.

7.2 Cauchysche Integralformeln für Kreisscheiben

7.2.1 Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $\overline{B_r(b)} \subset M$ und sei $z \in B_r(b)$.

Dann gilt

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(b)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta.$$

Beweis

Sei $r' > r$ mit $B_{r'}(b) \subset M$ und sei

$$g(\zeta) \;:=\; \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{für} \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{für} \quad \zeta = z \end{cases} .$$

Dann ist g holomorph auf $M \setminus \{z\}$ und stetig auf ganz M, da f holomorph ist.

Somit folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz gerade

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r(b)} g(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta \;=\; 0 \;&=\; \int_{\partial B_r(b)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta - f(z) \int_{\partial B_r(b)} \frac{1}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \\ &=\; \int_{\partial B_r(b)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta - 2\pi i \cdot f(z), \end{aligned}$$

wobei wir noch

$$\int_{\partial B_r(b)} \frac{1}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \;=\; 2\pi i$$

zeigen müssen. Dazu betrachten wir die holomorphe Funktion

$$h(z) \;=\; \int_{\partial B_r(b)} \frac{1}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \qquad \text{mit} \qquad h'(z) \;=\; \int_{\partial B_r(b)} \frac{1}{(\zeta - z)^2} \, \mathrm{d}\zeta.$$

Da $h'(z)$ eine Stammfunktion hat, folgt $h'(z) = 0$ für alle $z \in B_r(b)$ und somit ist $h(z)$ konstant. Mit $h(b) = 2\pi i$ folgt die Behauptung. □

7.2.2 Cauchysche Integralformel für höhere Ableitungen

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $\overline{B_r(b)} \subset M$ mit $r > 0$ und sei $z \in B_r(b)$ beliebig.

Dann gilt $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$ mit

$$a_n \;=\; \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(b) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial B_r(b)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - b)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta.$$

Beweis

Es gilt $|\zeta - b| = r$ und $|z - b| < r$, somit gilt $\left|\frac{z-b}{\zeta-b}\right| < 1$. Es folgt nun nach der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(b)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(b)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - b}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-b}{\zeta-b}}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(b)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - b}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-b}{\zeta-b}\right)^n\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(z-b)^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(b)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \\
&=: \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n,
\end{aligned}$$

da die Summe gleichmäßig konvergent ist. □

7.3 Folgerungen

7.3.1 Folgerung

Sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph.

Dann ist f unendlich oft differenzierbar und sogar analytisch.

7.3.2 Folgerung

Sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ in einer Umgebung von $b \in M$.

Dann gilt für den Konvergenzradius r der Reihe gerade

$$r \geq \sup\{r > 0 \mid B_r(b) \subset M\}.$$

7.3.3 Cauchysche Ungleichungen

Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ auf $\overline{B_r(b)}$ mit $r > 0$ stetig und konvergent und sei

$$|f(z)| \leq k$$

für alle z mit $|z - b| = r$.

Dann gilt

$$|a_n| \leq \frac{k}{r^n} \qquad \text{mit} \qquad n \geq 0.$$

7.3.4 Definition

Sei $A \subset \mathbb{C}$.

$a \in \mathbb{C}$ heißt ein ***Häufungspunkt*** in A, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\forall\, \varepsilon > 0 :\ \#(b_\varepsilon(a) \cap A) = \infty$.

(2) Es gibt eine gegen a konvergente Folge (a_n) in A, für die $a_n \neq a$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

7.3.5 Identitätssatz

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $A \subset M$, A habe ein Häufungspunkt in M und seien $f, g : M \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f|_A = g|_A$.

Dann gilt

$$g \;=\; f.$$

Zwei holomorphe Funktionen müssen also nur auf einer sehr kleinen Teilmenge von M identisch sein [etwa auf einem kleinen Teilstück einer Kurve], so dass die beiden Funktionen auf ganz M identisch sind.

7.3.6 Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt ***ganze Funktion***, wenn f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist.

7.3.7 Satz von Liouville

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und beschränkt.

Dann ist f konstant.

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes ist in Aufgabe 7.4.1 zu finden.

Beweis

Sei

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

die Potenzreihe von f um den Nullpunkt. Dann ist der Konvergenzradius r dieser Reihe gerade ∞, da f ganz ist.

Sei weiter $k = \sup\{|f(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$. Dann ist $k < \infty$, da f beschränkt ist. Es folgt nun nach den Cauchysche Ungleichungen für alle $r > 0$ gerade

$$|a_n| \;\leq\; k \cdot \frac{1}{r^n}.$$

Für $r \to \infty$ erhält man somit $a_n = 0$ für alle $n \geq 1$. Mit $a_0 = k$ ist f also konstant. $\square$

Als Folgerung aus dem Satz von Liouville erhält man nun den Hauptsatz der Algebra:

7.3.8 Hauptsatz der Algebra

Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 hat Nullstellen in $\mathbb{C}$.

Beweis

Angenommen

$$p(z) \;=\; a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$$

ist ein nicht konstantes Polynom, das keine Nullstellen hat.

Dann ist offenbar $\frac{1}{p(z)}$ auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und holomorph, also ganz.

Weiter gilt für alle $|z| \geq R$ gerade

$$|p(z)| \;\geq\; |z^n| \cdot \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \ldots - \frac{|a_0|}{|z^n|} \right) \;\geq\; M|z|^n \;\geq\; MR^n,$$

dabei ist R geeignet groß und M geeignet klein zu wählen. Somit erhalten wir für alle $|z| \geq R$

$$\frac{1}{|p(z)|} \;\leq\; \frac{1}{MR^n},$$

also ist $\frac{1}{p(z)}$ nicht nur ganz sondern auch beschränkt und damit nach dem Satz von Liouville konstant. Folglich muss auch $p(z)$ konstant sein, was ein Widerspruch zur Annahmer ergibt. $\square$

7.3.9 Satz von Morera

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig und es gelte für alle Rechtecke $R \subset M$ gerade

$$\int_{\partial R} f(z)\, \mathrm{d}z \;=\; 0.$$

Dann ist f holomorph.

7.3.10 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig, seien $g_1, .., g_k$ endlich viele achsenparallele Geraden und f sei auf $M \setminus (g_1 \cup .. \cup g_k)$ holomorph.

Dann ist f auf ganz M holomorph.

7.3.11 Riemannsche ζ-Funktion

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$. Für alle $z = x + iy \in M$ sei nun

$$\frac{1}{n^z} \;:=\; \frac{1}{e^{z \cdot \log n}},$$

dabei ist der Logarithmus reell zu verstehen.

Die Reihe

$$\zeta(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

konvergiert für alle $z \in M$ und heißt die ***Riemannsche ζ-Funktion***. Sie ist stetig und gleichmäßig konvergent auf M und für jedes Rechteck $R \subset M$ gilt

$$\int_{\partial R} \zeta(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial R} e^{-z \cdot \log n}\,\mathrm{d}z \;=\; 0,$$

somit ist $\zeta(z)$ holomorph.

7.4 Aufgaben

7.4.1 Aufgabe 1

Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad n und sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, für die

$$|f(z)| \;\leq\; c \cdot |p(z)|$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und ein $c \geq 0$ gilt.

Zeige, dass dann $f(z)$ ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist.

Lösung

Sei

$$p(z) \;=\; b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0$$

und sei

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

die Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ um den Nullpunkt. Da $f(z)$ ganz ist, ist der Konvergenzradius r dieser Reihe gerade $r = \infty$.

Sei nun zunächst $r \in]1, \infty[$ fest. Dann gilt nach den Cauchyschen Ungleichungen gerade

$$\begin{aligned} |a_k| \;&\leq\; r^{-k} \cdot \max\{|f(z)| \mid |z| = r\} \\ &\leq\; r^{-k} \cdot c \cdot |p(r)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \; r^{-k} \cdot c \cdot (|b_n| r^n + .. + |b_0|) \\ &\leq \; r^{-k} \cdot c|b_n| \cdot r^n \;=\; c|b_n| \cdot \frac{r^n}{r^k}. \end{aligned}$$

Für $r \to \infty$ folgt nun $a_k = 0$ für $k > n$, somit ist $f(z)$ ein Polynom vom Grad $\leq n$.

8 Allgemeiner Cauchysche Integralsatz

8.1 Die Umlaufzahl

8.1.1 Definition und Satz

Sei $\Gamma \in C_1(\mathbb{C})$ eine geschlossene Kette in $\mathbb{C}$ und sei $a \notin Sp(\Gamma)$.

Dann ist

$$n(\Gamma, a) \;:=\; \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}$$

eine ganze Zahl.

$n(\Gamma, a) \in \mathbb{Z}$ heißt die ***Umlaufzahl*** oder ***Windungszahl*** von Γ bezüglich a.

Beweisskizze

Man kann zeigen, dass

$$\exp \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} \;=\; 1$$

ist und da $e^w = 1$ für $w = 2\pi i n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ gilt, folgt die Behauptung.

8.1.2 Satz 1

Sei $\Gamma \in C_1(\mathbb{C})$ eine geschlossene Kette in $\mathbb{C}$.

Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{C} \setminus Sp(\Gamma) \to \mathbb{Z}, \qquad a \mapsto (\Gamma, a)$$

stetig.

8.1.3 Folgerung

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $\Gamma \in C_1(M)$ eine geschlossene Kette in M und sei $N \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend mit $N \cap Sp(\Gamma) = \emptyset$.

Dann ist die Abbildung

$$N \to \mathbb{Z}, \qquad a \mapsto (\Gamma, a)$$

konstant.

Beispiel

Es gilt
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1(0)}\frac{\mathrm{d}z}{z} \;=\; 1 \;=\; n(\partial B_1(0), 0).$$
Dann folgt aber auch
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1(0)}\frac{\mathrm{d}z}{z-a} \;=\; 1 \qquad \text{mit} \quad a \,\in\, B_1(0).$$

8.1.4 Satz 2

Sei $\Gamma \in C_1(\mathbb{C})$ eine geschlossene Kette in $\mathbb{C}$.

Dann gibt es ein $r > 0$, so dass für alle $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| > r$ gerade
$$n(\Gamma, a) \;=\; 0$$
gilt.

Beweis

Sei $s > 0$ mit $Sp(\Gamma) \subset B_s(0)$. Solch ein s existiert, da die Spur von Γ kompakt ist. Sei nun
$$r \;:=\; s + \frac{L(\Gamma)}{\pi},$$
dabei ist $L(\Gamma)$ die Länge von Γ. Für $z \in Sp(\Gamma)$ und für alle $|a| > r$ gilt nun
$$\left|\frac{1}{z-a}\right| \;<\; \frac{1}{r-s} \;=\; \frac{\pi}{L(\Gamma)},$$
somit folgt auch
$$|n(\Gamma, a)| \;=\; \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}\right| \;<\; \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{L(\Gamma)}\cdot L(\Gamma) \;=\; \frac{1}{2}.$$
Da $|n(\Gamma, a)| \in \mathbb{Z}$, folgt also wie behauptet $n(\Gamma, a) = 0$. □

8.1.5 Bestimmung der Umlaufzahl einer Kette

Sei $\Gamma = \sum n_c c$ eine geschlossene Kette in $\mathbb{C}$ und sei $z = c(t)$ ein Punkt einer Kurve c der Kette Γ.

Seien nun b_1 und b_2 so in der Nähe von z, dass sie auf unterschiedlichen Seiten von der Spur von c liegen und so, dass zwischen den Punkten und der Spur von c keine Spur einer weiteren Kurve liegt:

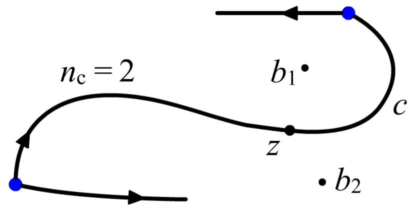


Abbildung 11: Bestimmung der Umlaufzahl

Dann gilt [je nach Orientierung von c]

$$n(\Gamma, b_2) \;=\; n(\Gamma, b_1) + n_c \qquad \text{oder} \qquad n(\Gamma, b_2) \;=\; n(\Gamma, b_1) - n_c.$$

Die folgenen Figuren sollen das Bestimmen der Umlaufzahl von Ketten verdeutlichen:

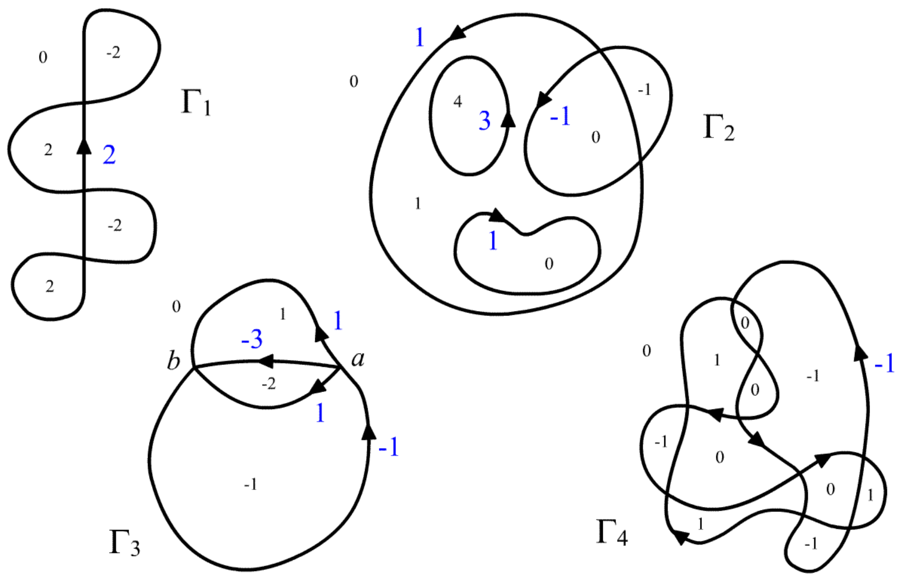


Abbildung 12: Beispiele zur Bestimmung der Umlaufzahl

Dabei ist auch die Kette Γ_3 geschlossen, da diese zusammengesetzt ist aus

$$\Gamma_3 \;=\; -c_1 + c_2 - 3c_3 + c_4$$

und gerade

$$\partial\Gamma_3 \;=\; -([a] - [b]) + ([b] - [a]) - 3([b] - [a]) + ([b] - [a]) \;=\; 0$$

gilt.

8.1.6 Satz 3

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$, sei $\Gamma \in C_1(\mathbb{C})$ und sei $f : B \times Sp(\Gamma) \to \mathbb{C}$ stetig.

Dann ist auch
$$B \to \mathbb{C}, \qquad x \mapsto \int_\Gamma f(x,z)\,\mathrm{d}z$$
stetig.

8.2 Allgemeine Cauchysche Integralformeln

8.2.1 Definition und Satz

Sei Γ eine Kette in $\mathbb{C}$.
$$I(\Gamma) \ := \ \{b \in \mathbb{C} \mid b \notin Sp(\Gamma),\ n(\Gamma, b) \neq 0\}$$
ist das ***Innere*** von Γ und
$$A(\Gamma) \ := \ \{b \in \mathbb{C} \mid b \notin Sp(\Gamma),\ n(\Gamma, b) = 0\}$$
ist das ***Äußere*** von Γ.

Die Mengen $I(\Gamma)$ und $A(\Gamma)$ sind offen und bilden zusammen mit der Spur $Sp(\Gamma)$ eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{C}$:
$$I(\Gamma) \cup A(\Gamma) \cup Sp(\Gamma) \ = \ \mathbb{C}$$
Die Menge $I(\Gamma) \cup Sp(\Gamma)$ ist kompakt.

8.2.2 Definition

Eine offenen Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt ***einfach zusammenhängend***, wenn für jede geschlossene Kurve c in M
$$I(c) \ \subset \ M$$
gilt.

Beispiele

(1) $M = \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

(2) $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

Achtung

Nach dieser Definition von einfach zusammenhängend muss M im Allgemeinen nicht zusammenhängend sein.

8.2.3 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei

$$\mathbb{C} \setminus M \;=\; \bigcup_{i=1}^{n} Z_i,$$

dabei sind Z_i für $i = 1, .., n$ nicht beschränkte zusammenhängende Mengen.

Dann ist M einfach zusammenhängend.

Beispiele

Die folgenden Mengen sind einfach zusammenhängend:

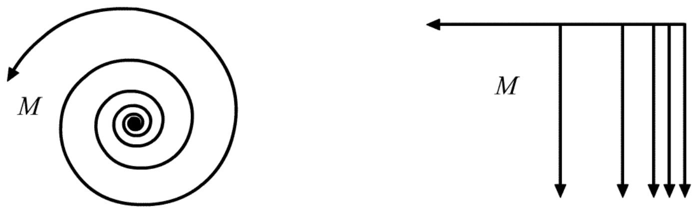


Abbildung 13: Einfach zusammenhängende Mengen

8.2.4 Allgemeine Cauchysche Integralformel

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph, sei Γ eine geschlossene Kette in M, sei $I(\Gamma) \subset M$ und sei $z \in M \setminus Sp(\Gamma)$.

Dann gilt

$$n(\Gamma, z) \cdot f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta.$$

Beweisskizze

Sei

$$F : M \times M \to \mathbb{C} \qquad \text{mit} \qquad F(z,\zeta) \;=\; \begin{cases} \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} & \text{für} \quad z \neq \zeta \\ f'(\zeta) & \text{für} \quad z = \zeta \end{cases}.$$

Dann ist F stetig. Seien nun weiter

$$\begin{aligned} g : M &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \int_\Gamma F(z,\zeta)\, \mathrm{d}\zeta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h : A(\Gamma) &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta. \end{aligned}$$

Durch das Lemma von Goursat und durch den Satz von Moreva kann man zeigen, dass g und h holomorph sind.

Es gilt

$$\mathbb{C} \;=\; A(\Gamma) \cup I(\Gamma) \cup Sp(\Gamma) \;=\; A(\Gamma) \cup M,$$

da ja $I(\Gamma) \subset M$ gefordert wurde. Somit ist die Funktion

$$k : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad \text{mit} \qquad k(z) \;=\; \begin{cases} g(z) & \text{für} \quad z \in M \\ h(z) & \text{für} \quad z \in A(\Gamma) \end{cases}$$

ganz. k ist aber auch beschränkt, also nach dem Satz von Liouville konstant, nämlich gerade 0.

Dann ist aber auch $g(z) = 0$ für alle $z \in M$, somit folgt

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \int_\Gamma F(z,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \;=\; \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta - \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta \\ &=\; -f(z)\cdot 2\pi i \cdot n(\Gamma, z) + \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta. \end{aligned}$$

8.2.5 Folgerung

Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine zusammenhängende und einfach zusammenhängende Menge.

Dann gilt für jede positiv orientierte Kurve ∂G gerade

$$\int_{\partial G} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z \;=\; \begin{cases} 2\pi i & \text{für} \quad a \in G \\ 0 & \text{für} \quad a \notin G \end{cases}.$$

8.2.6 Cauchysche Integralformel für höhere Ableitungen

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph, sei Γ eine geschlossene Kette in M, sei $I(\Gamma) \subset M$ und sei $z \in M \setminus Sp(\Gamma)$.

Dann gilt

$$n(\Gamma, z) \cdot f^{(n)}(z) \;=\; n! \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

8.3 Allgemeiner Cauchysche Integralsatz

8.3.1 Allgemeiner Cauchysche Integralsatz

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph, sei Γ eine geschlossene Kette in M und sei $I(\Gamma) \subset M$.

Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0.$$

Beweis

Sei $w \in M \setminus Sp(\Gamma)$ fest und sei

$$g(z) \; := \; (z-w) \cdot f(z).$$

Dann ist g holomorph auf M und es gilt

$$0 \; = \; n(\Gamma, w) \cdot g(w) \; = \; \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - w} \, \mathrm{d}\zeta \; = \; \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z,$$

was die Behauptung zeigt. □

8.3.2 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) f besitzt eine Stammfunktion.

(2) Für alle geschlossenen Kurven c in M gilt

$$\int_c f(z) \, \mathrm{d}z \; = \; 0.$$

(3) Für alle geschlossenen Ketten Γ in M gilt

$$\int_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z \; = \; 0.$$

8.3.3 Satz 2

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) M ist einfach zusammenhängend.

(2) Jede auf M holomorphe Funktion f besitzt eine Stammfunktion.

(3) Für alle geschlossenen Kurven c in M und alle auf M holomorphen Funktionen f gilt

$$\int_c f(z) \, \mathrm{d}z \; = \; 0.$$

(4) Für alle geschlossenen Kette Γ in M und alle auf M holomorphen Funktionen f gilt

$$\int_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z \; = \; 0.$$

(5) Für alle geschlossenen Kette Γ in M gilt $I(\Gamma) \subset M$.

Beweis

(1) folgt aus **(5)** nach der Definition von einfach zuammenhängend und **(3)** folgt aus **(1)** nach dem Cauchychen Integralsatz. **(2)**, **(3)** und **(4)** sind nach dem vorherigen Satz äquivalent. Es bleibt noch zu zeigen, dass aus **(4)** auch **(5)** folgt.

Sei dazu $a \notin M$ beliebig und sei Γ wie in **(4)**, also geschlossen. Dann ist

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z-a}$$

holomorph auf M, da $a \notin M$. Somit gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0,$$

also ist auch $n(\Gamma, a) = 0$ und es folgt $I(\Gamma) \subset M$. □

8.4 Der Logarithmus

Die Menge

$$M \;=\; \mathbb{C}\backslash\,]-\infty, 0]$$

ist einfach zusammenhängend und die Funktion

$$f'(z) \;=\; \frac{1}{z}$$

ist holomorph auf M. Somit gibt es auch eine Stammfunktion $f(z)$ zu $f'(z)$.

8.4.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph.

Gilt gerade

$$\exp \circ f \;=\; id_M,$$

dann heißt f ein ***Logarithmus*** auf M.

Bemerkungen

(1) Die Exponentialfunktion exp ist periodisch mit $2\pi i$, somit ist zu jedem Logarithmus f auf M auch

$$f + 2\pi i \cdot k \qquad \text{mit} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ein Logarithmus auf M.

(2) Auf $M = B_1(1)$ ist

$$f(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n$$

ein Logarithmus.

(3) Sind f_1 und f_2 zwei Logarithmen auf einer Menge M, dann gilt

$$f_1 - f_2 \;=\; 2\pi i \cdot k \qquad \text{mit} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

8.4.2 Definition

Sei $M = \mathbb{C}\setminus\,]-\infty, 0]$ und sei $f : M \to \mathbb{C}$, so dass gilt:

(1) f ist ein Logarithmus auf M, also $e^f = id_M$.

(2) Es gilt $f(1) = 0$.

Dann heißt f der ***Hauptzweig*** und wird bezeichnet mit $f = \log$.

Der Hauptzweig log ist eindeutig bestimmt und $\log|_{]0,\infty[}$ ist der reelle Logarithmus.

8.4.3 Berechnung des Logarithmus

Sei $z \in M = \mathbb{C}\setminus\,]-\infty, 0]$ gegen in Polarkoordinaten, also

$$z \;=\; re^{i\varphi} \qquad \text{mit} \qquad r > 0, \;\; -\pi < \varphi < \pi.$$

Dann gilt

$$\log(z) \;=\; \int_c \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta},$$

dabei ist c eine Kurve von 1 nach z, also zum Beipiel wie in der folgenden Abbildung:

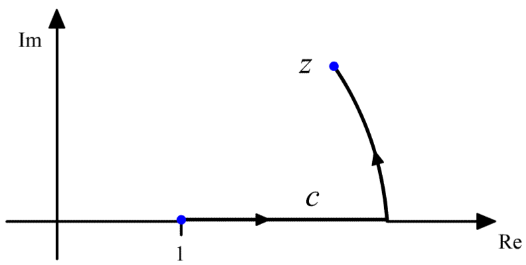


Abbildung 14: Berechnung des Logarithmus

Es folgt also

$$\log(z) \;=\; \int_c \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} \;=\; \int_1^r \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_r^{r+\varphi} \frac{rie^{i(t-r)}}{re^{i(t-r)}}\,\mathrm{d}t \;=\; \log_{\mathbb{R}} r + i\varphi,$$

dabei ist $\log_{\mathbb{R}}$ stets reell zu verstehen.

Es gilt somit für ein beliebiges $z \in M$

$$\begin{aligned} \log z &= \log_{\mathbb{R}} r + i\varphi && \text{oder anders geschrieben} \\ \log z &= \log_{\mathbb{R}} |z| + i \arg z. \end{aligned}$$

8.4.4 Bemerkungen

(1) Zu allen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es einen Logarithmus $f(z)$, der bei w definiert ist. Es gilt dann also

$$w \;=\; e^{f(w)}.$$

(2) Somit ist auch $\exp(\mathbb{C}) \;=\; \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

8.4.5 Weiteres über den Hauptzweig

Sei $M = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ und sei $\log : M \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus.

Es gilt also für ein $z = e^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$ gerade

$$\log z \;=\; \log_{\mathbb{R}} r + i\varphi.$$

Seien $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ aus M. Dann gilt

$$\log(z_1 z_2) \;=\; \log(r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)})$$

sowie

$$\log z_1 + \log z_2 \;=\; \log_{\mathbb{R}}(r_1 r_2) + i(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Im Allgemeinen gilt

$$\log z_1 + \log z_2 \;=\; \log(z_1 z_2) + 2\pi i k \qquad \text{mit} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Ist $\pi < \varphi_1 + \varphi_2 < 3\pi$, so ist $\log z_1 + \log z_2 = \log(z_1 z_2) + 2\pi i$.

Sei also zum Beispiel $z_1 = i = e^{i\pi/2}$ und $z_2 = i - 1 = \sqrt{2} e^{i3\pi/4}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \log z_1 + \log z_2 &= i\frac{\pi}{2} + \log_{\mathbb{R}} \sqrt{2} + i\frac{3}{4}\pi \\ &= \log_{\mathbb{R}} \sqrt{2} + i\frac{5}{4}\pi, \\ \log(z_1 z_2) &= \log(i(i-1)) \;=\; \log(\sqrt{2} e^{-i3\pi/4}) \\ &= \log_{\mathbb{R}} \sqrt{2} - i\frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

Sei $N \subset M$. Damit gerade

$$\log(z_1 z_2) \;=\; \log z_1 + \log z_2$$

für alle $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ aus N gilt, muss also stets $-\pi < \varphi_1 + \varphi_2 < \pi$ gelten. Dies ist genau dann der Fall, wenn $-\pi/2 < \varphi_1 < \pi/2$ für $i = 1, 2$ gilt. Somit folgt

$$N \;=\; \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0,\;\; -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\} \;=\; \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0\}.$$

8.5 Aufgaben

8.5.1 Aufgabe 1

Berechne das Integral

$$\int_\Gamma (z^{-1} + z^3)\,\mathrm{d}z,$$

wobei Γ eine Kette ist, die durch

$$\Gamma \;=\; \partial B_1(0) + 2\partial B_1(3) - c + 4\partial R$$

gegeben wird. Dabei ist $R = [-2, 2] + i[1, 2]$ und c ist die Kurve, die die Punkte 2, $2i$, -2, $-2i$ und 2 geradlinig verbindet.

Lösung

Alle Kurven, aus denen Γ zusammengesetzt ist, sind geschlossen, demnach ist auch Γ geschlossen.

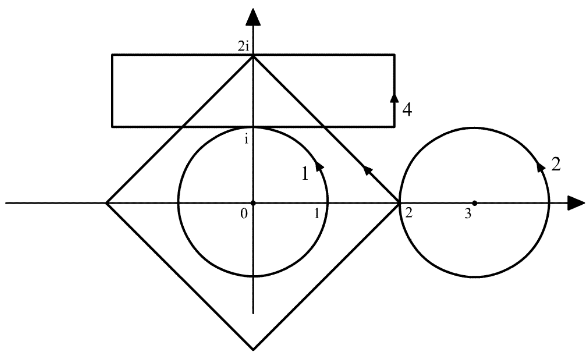


Abbildung 15: Die Kette Γ

Da es zu z^3 eine Stammfunktion gibt, folgt zunächst

$$\int_\Gamma (z^{-1} + z^3)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_\Gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \int_\Gamma z^3\,\mathrm{d}z \;=\; \int_\Gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Auf der Menge $M = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist $z \mapsto z^{-1}$ holomorph und es gilt $R \subset M$ sowie $\partial_1(3) \subset M$. Somit folgt nach dem allgemeinen Cauchyschen Integralsatz

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma (z^{-1} + z^3)\,\mathrm{d}z \\
=\ &\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \,+\, 2\cdot\int_{\partial B_1(3)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \,-\, \int_c \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \,+\, 4\cdot\int_{\partial R} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \\
=\ &2\pi i + 2\cdot 0 - 2\pi i + 4\cdot 0 \;=\; 0.
\end{aligned}$$

8.5.2 Aufgabe 2

Berechne die Integrale

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

durch Integration einer geeigneten komplexen Fuktion $f(z)$ über der Kurve $\partial B_1(0)$.

Lösung

Eine geeignete komplexe Funktion scheint

$$f(z) \;=\; \frac{\exp(z)}{z}$$

zu sein, denn nach dem Cauchyschen Integralsatz folgt

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{\exp(z)}{z-0}\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi i\cdot\exp(0) \;=\; 2\pi i.$$

Weiter ist nun aber auch gerade

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_1(0)} \frac{\exp(z)}{z-0}\,\mathrm{d}z \;&=\; \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{it}}}{e^{it}}\cdot ie^{it}\,\mathrm{d}t \\
&=\; i\int_0^{2\pi} e^{\cos t + i\sin t}\,\mathrm{d}t \\
&=\; i\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\,\mathrm{d}t \,-\, \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Diese beiden Integrale sind nun reell und ergeben zusammen $2\pi i$. Somit folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\,\mathrm{d}t \;&=\; 2\pi, \\
\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)\,\mathrm{d}t \;&=\; 0.
\end{aligned}$$

8.5.3 Aufgabe 3

Sei $f : [0, 2\pi] \to]0, \infty[$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = f(2\pi)$ und sei $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve mit $c(t) = f(t)e^{it}$.

Berechne die Windungszahl $n(c, a)$ für alle $a = re^{is}$ mit $r > 0$ und $s \in [0, 2\pi[$ in Abhängigkeit von r und $f(s)$.

Lösung

Die Kurve c ist von folgender Gestalt:

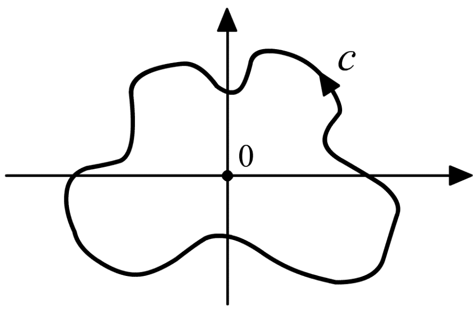


Abbildung 16: Geschlossene Kurve c

Die Funktion $f(t)$ gibt also für alle $t \in [0, 2\pi]$ gerade den Abstand zum Nullpunkt an. Im Inneren von c ist die Windungszahl gleich 1, ausserhalb ist sie 0. Es ergibt sich somit $n(c, a) = 1$ für $r < f(s)$ und $n(c, a) = 0$ für $r > f(s)$.

8.5.4 Aufgabe 4

Berechne die ***Fresnelschen Integrale***

$$\int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$$

durch Integration der Funktion $f(z) = \exp(z^2)$ entlange der geschlossenen Kurve c_R, die geradelinig von 0 nach R, dann von R nach $Re^{i\pi/4}$ entlang des Kreises um 0 und schließlich wieder geradlinig nach 0 zurück verläuft. Dabei ist $R > 0$.

Lösung

Die Kurve c_R ist geschlossen und es gilt $c_R \sim c_1 + c_2 - c_3$ mit

$$\begin{aligned} c_1(t) &= t && \text{für } 0 \le t \le R \\ c_2(t) &= Re^{it} && \text{für } 0 \le t \le \pi/4 \\ c_3(t) &= te^{i\pi/4} && \text{für } 0 \le t \le R. \end{aligned}$$

Da $f(z)$ eine Stammfunktion besitzt und c_R geschlossen ist, folgt nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{c_R} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \;=\; 0.$$

Weiter gilt aber auch

$$\begin{aligned}\int_{c_R} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z &= \int_{c_1} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{c_2} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z - \int_{c_3} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^R e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} e^{-R^2e^{2it}} Rie^{it}\,\mathrm{d}t - \int_0^R e^{-t^2e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Es ist

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

sowie [zum Beispiel] nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi/4} e^{-R^2e^{2it}} Rie^{it} \;=\; \int_0^{\pi/4} \lim_{R\to\infty} e^{-R^2e^{2it}} Rie^{it} \;=\; 0.$$

Bislang ist nun also bekannt, dass

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-t^2e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

gelten muss.

Es ist weiter

$$\begin{aligned} & \int_0^R e^{-t^2e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4}\,\mathrm{d}t \\ = \quad & \int_0^R e^{-t^2e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4}\,\mathrm{d}t \\ = \quad & \int_0^R e^{-it^2} e^{i\pi/4}\,\mathrm{d}t \\ = \quad & e^{i\pi/4}\cdot\left(\int_0^R \cos(t^2)\,\mathrm{d}t + i\int_0^R -\sin(t^2)\,\mathrm{d}t\right) \\ = \quad & \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\int_0^R \cos(t^2)\,\mathrm{d}t - i\int_0^R \sin(t^2)\,\mathrm{d}t\right) \\ \xrightarrow{R\to\infty} \quad & \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t - i\int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t\right) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

und es gilt

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1} \;=\; \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - i\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Somit folgt

$$\int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

8.5.5 Aufgabe 5

Berechne $f^{(11)}(1)$ von der Funktion

$$f(z) \;=\; \frac{z-1}{z+1}.$$

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z-1}{z+1} \;=\; 1-\frac{2}{z+1} \;=\; 1-\frac{2}{1-(-z+1)+1} \\ &= 1-\frac{1}{1-\left(\frac{-z+1}{2}\right)}, \end{aligned}$$

somit ist nach der geometrischen Reihe die Potenzreihendarstellung von $f(z)$ gerade

$$\begin{aligned} f(z) &= 1-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z+1}{2}\right)^n \;=\; 1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{-n}(z-1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{-n}(z-1)^n \end{aligned}$$

und es folgt

$$f^{(11)}(1) \;=\; 11!\cdot(-1)^{11+1}\cdot 2^{-11} \;=\; \frac{155925}{8}.$$

8.5.6 Aufgabe 6

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, so dass

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z^2-1}$$

auf M eine Stammfunktion hat.

Zeige, dass dann für jede geschlossene Kette Γ in M gerade

$$n(\Gamma,1) \;=\; n(\Gamma,-1)$$

gilt.

Lösung

Es ist
$$f(z) \;=\; \frac{1}{z^2-1} \;=\; \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)}.$$
Nach dem allgemeinen Cauchyschen Integralsatz gilt
$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0$$
und nach der Definition der Windungszahl folgt
$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-1} - \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z+1} \\ &=\; \pi i \cdot n(\Gamma,1) - \pi i \cdot n(\Gamma,-1), \end{aligned}$$
somit gilt also gerade $n(\Gamma,1) = n(\Gamma,-1)$.

8.5.7 Aufgabe 7

Berechne die Integrale
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \frac{\cos x - e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$
durch Integration der Funktion $f(z) = z^{-1}e^{iz}$ über die in der folgenden Abbildung angegebenen Kurve c für große R und kleine ε:

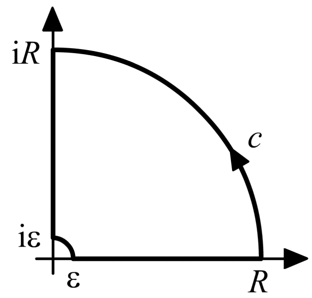


Abbildung 17: Integrationskurve c

Lösung

Sei c also eine geschlossene Kurve wie in der Abbildung.

Dann gilt $c \sim c_1 + c_2 - c_3 - c_4$ für
$$\begin{aligned} c_1(t) \;&=\; t && \text{für } \varepsilon \le t \le R \\ c_2(t) \;&=\; Re^{it} && \text{für } 0 \le t \le \pi/2 \\ c_3(t) \;&=\; it && \text{für } \varepsilon \le t \le R \\ c_4(t) \;&=\; \varepsilon e^{it} && \text{für } 0 \le t \le \pi/2. \end{aligned}$$

Die Funktion $f(z) = z^{-1}e^{iz}$ ist holomorph auf $I(c)$, somit ist

$$\int_c \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z \;=\; 0$$

und es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_c \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} \cdot Rie^{it}\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{it} \cdot i\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\varepsilon e^{it}} \cdot \varepsilon i e^{it}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\varepsilon^R \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t + i\int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + i\int_0^{\pi/2} e^{iRe^{it}}\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - i\int_0^{\pi/2} e^{i\varepsilon e^{it}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\varepsilon^R \frac{\cos t - e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + i\int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + i\int_0^{\pi/2} e^{iRe^{it}}\,\mathrm{d}t - i\int_0^{\pi/2} e^{i\varepsilon e^{it}}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\left|\int_0^{\pi/2} e^{iRe^{it}}\,\mathrm{d}t\right| \;\le\; \int_0^{\pi/2} \left|e^{iRe^{it}}\right|\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,\mathrm{d}t \;\le\; \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t,$$

somit kann Grenzwert und Integral nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue vertauscht werden:

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi/2} e^{iRe^{it}}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{\pi/2} \lim_{R\to\infty} e^{iRe^{it}}\,\mathrm{d}t \;=\; 0,$$

da $\lim\limits_{R\to\infty} e^{-R\sin t} = 0$ fast überall, nämlich für $t \in]0, \pi/2[$. Es gilt auch

$$\left|\int_0^{\pi/2} e^{i\varepsilon e^{it}}\,\mathrm{d}t\right| \;\le\; \int_0^{\pi/2} \left|e^{i\varepsilon e^{it}}\right|\,\mathrm{d}t \;\le\; \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t,$$

und es ergibt sich also wieder nach Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\pi/2} e^{i\varepsilon e^{it}}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{\pi/2} \lim_{\varepsilon\to 0} e^{i\varepsilon e^{it}}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\pi}{2}.$$

Es ist nun also zusammen

$$0 \;=\; \int_0^\infty \frac{\cos t - e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - i\frac{\pi}{2},$$

somit folgt insgesamt

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{\pi}{2} \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \frac{\cos x - e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; 0.$$

9 Isolierte Singularitäten

9.1 Laurent Reihen

Viele Betrachtungen, die bisher gemacht wurden, sollen nun auch für Kreisringe gemacht werden.

Sei also $b \in \mathbb{C}$ fest und seien $0 \leq r < R \leq \infty$. Dann ist die Menge

$$M \;=\; \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - b| < R\}$$

ein offener ***Kreisring*** in $\mathbb{C}$.

Mit $r = 0$ und $R = \infty$ ist also auch die gesamte komplexe Zahlenebene mit der Ausnahme eines Punktes b ein Kreisring.

9.1.1 Von der Kreisscheibe zum Kreisring

Sei $M = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - b| < R\}$ ein Kreisring und sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien nun weiter

$$r \;<\; r' \;<\; R' \;<\; R$$

und sei $\Gamma = \partial B_{R'}(b) - \partial B_{r'}(b)$.

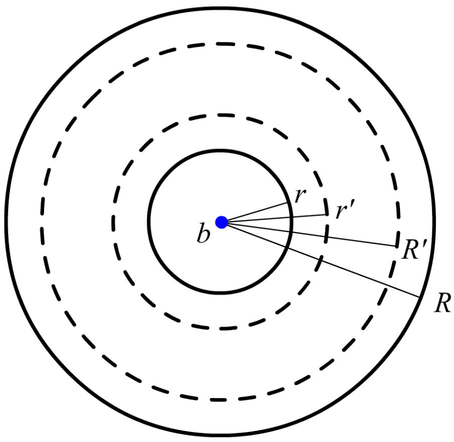


Abbildung 18: Kreisring und Kette Γ

Es gilt $\partial\Gamma = 0$ und

$$I(\Gamma) \;=\; \{z \in \mathbb{C} \mid r' < |z-b| < R'\} \;\subset\; M,$$

es folgt also nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0.$$

Für ein $z \in I(\Gamma)$ gilt $n(\Gamma, z) = 1$, somit ist nach den Cauchyschen Integralformeln auch

$$\begin{aligned} f(z) \;&=\; f(z)\cdot n(\Gamma,z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \\ &=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{R'}(b)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - b}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{1-\frac{z-b}{\zeta-b}} \;+\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{r'}(b)} \frac{f(\zeta)}{z-b}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{1-\frac{\zeta-b}{z-b}}. \end{aligned}$$

Es ist $|\zeta - b| = R'$ und $|z-b| < R'$, somit gilt im ersten Integral $\left|\frac{z-b}{\zeta-b}\right| < 1$. Analog ergibt sich im zweiten Integral $\left|\frac{\zeta-b}{z-b}\right| < 1$ für alle ζ mit $|\zeta - b| = r'$, es kann also jeweils die geometrische Reihe angewendet werden.

Da diese gleichmäßig konvergent ist, kann Summe und Integral vertauscht werden. Es folgt also zusammen

$$\begin{aligned} f(z) \;&=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{R'}(b)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-b}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-b)^n}{(\zeta-b)^n}\,\mathrm{d}\zeta \\ &\quad+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{r'}(b)} \frac{f(\zeta)}{z-b}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-b)^n}{(z-b)^n}\,\mathrm{d}\zeta \\ &=\; \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-b)^n\int_{\partial B_{R'}(b)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \\ &\quad+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-b)^{-n-1}\int_{\partial B_{r'}(b)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{-n}}\,\mathrm{d}\zeta \\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty}(z-b)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{R'}(b)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \\ &\quad+ \sum_{n=-1}^{-\infty}(z-b)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{r'}(b)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta. \end{aligned}$$

Durch den allgemeinen Cauchyschen Integralsatz lässt sich nun zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ das Integral

$$a_n \;:=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_u(b)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

nicht von der Wahl von $u \in]r, R[$ abhängt.

Somit erhält man zusammen

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-b)^n \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

mit a_n und u wie zuvor gewählt.

Dieses Ergebnis wird nun im folgenden Satz zusammengefasst:

9.1.2 Definition und Satz

Sei $0 \leq r < R \leq \infty$, sei $b \in \mathbb{C}$, sei $M = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-b| < R\}$ und sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph.

Dann gilt für alle $z \in M$

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n,$$

dabei

$$a_n \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_u(b)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - b)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$

mit $u \in]r, R[$.

Diese Reihe heißt die ***Laurent Reihe*** von f auf M und die Konvergenz ist gleichmäßig und absolut auf $\{z \in \mathbb{C} \mid r' < |z-b| < R'\}$ mit $r < r' < R' < R$.

Die Reihe

$$g(z) \;=\; \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-b)^n$$

heißt der ***Hauptteil*** der Laurent Reihe von f auf M. Die Funktion $g(z)$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B_r(b)}$.

Die Reihe

$$h(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

heißt der ***Nebenteil*** der Laurent Reihe von f auf M. Die Funktion $h(z)$ ist holomorph auf $B_R(b)$.

Zusammen ist also

$$f(z) \;=\; g(z) + h(z)$$

holomorph auf $M = B_R(b) \setminus \Big(\mathbb{C} \setminus \overline{B_r(b)}\Big)$.

9.1.3 Satz 1

Sei $0 \leq r < R \leq \infty$, sei $b \in \mathbb{C}$, sei $M = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - b| < R\}$ und sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph.

Dann gibt es eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(b)} &\to \mathbb{C}, \\ h : B_R(b) &\to \mathbb{C} \end{aligned}$$

mit $f(z) = g(z) + h(z)$ und $\lim\limits_{|z| \to \infty} g(z) = 0$.

9.1.4 Folgerung

Die a_n der Laurententwicklung von f auf M sind eindeutig bestimmt.

9.2 Isolierte Singularitäten

9.2.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $b \in M$ fest und sei $f : M \setminus \{b\} \to \mathbb{C}$ holomorph.

Dann heißt b ***isolierte Singularität*** von f auf M.

Wähle $r > 0$, so dass $B_r(b) \subset M$ gilt. Es ist also

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - b| < r\} \;=\; B_r(b) \;\subset M$$

ein Kreisring, demnach ist f entwickelbar in

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - b)^n$$

und somit holomorph auf $B_r(b) \setminus \{b\}$.

(1) Die isolierte Singularität b von f auf M heißt ***hebbar***, wenn für alle $n < 0$ gerade $a_n = 0$ gilt, wenn also der Hauptteil verschwindet.

(2) Die isolierte Singularität b von f auf M heißt ***wesentlich***, wenn es unendlich viele $n < 0$ mit $a_n \neq 0$ gibt.

(3) Die isolierte Singularität b von f auf M heißt ***Pol*** oder ***polartig***, wenn es endlich viele $n < 0$ mit $a_n \neq 0$ gibt. Es gibt dann also ein $n_0 < 0$, so dass für alle $m < n_0$ gerade $a_m = 0$ gilt:

$$f(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - b)^n \;+\; \sum_{n=-1}^{n_0} a_n (z - b)^n$$

9.2.2 Beispiele

(1) Die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

ist auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ definiert, also ist der Nullpunkt eine isolierte Singularität von f auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Die Laurententwicklung von $f(z)$ um 0 ergibt sich zu

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots,$$

es tritt also kein Hauptteil auf. Somit handelt es sich bei 0 um eine hebbare Singularität.

(2) Die Funktion

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{(-n)!} z^n + 1$$

hat bei $b = 0$ eine wesentliche Simgularität.

(3) Rationale Funktionen haben polartige Singularitäten.

(4) Die Funktion

$$f(z) = \cot\frac{\pi}{z}$$

ist auf $\mathbb{C}\setminus(A\cup\{0\})$ definiert, wobei $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1/z \in \mathbb{Z}\}$. Der Nullpunkt ist also gar keine isolierte Singularität von f, denn 0 ist ein Häufungspunkt von A.

9.2.3 Satz von Riemann

Sei b eine isolierte Singularität von f.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) b ist eine hebbare Singularität.

(2) Es gilt $\lim\limits_{z\to b}(z-b)f(z) = 0$.

(3) Es gibt ein $r > 0$, so dass $f|_{(B_r(b)\setminus\{b\})}$ beschränkt ist.

9.2.4 Definition

Sei b eine nicht wesentliche Singularität von f und sei $f \neq 0$ auf $B_r(b) \setminus \{b\}$ mit $r > 0$.

Dann gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ mit $a_{n_0} \neq 0$ und

$$f(z) \;=\; \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z-b)^n \;=\; (z-b)^{n_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+n_0}(z-b)^n.$$

b heißt dann ***Nullstelle der Ordnung*** n_0 oder ***Pol der Ordnung*** bzw. ***Polstelle der Ordnung*** $-n_0$.

Weiter heißt n_0 ***Ordnung*** von f bei b.

Schreibweise: $n_0 = O_b(f)$.

9.2.5 Beispiel

Die Funktion

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z(z-i)^2}$$

hat bei 0 einen Pol erster Ordnung und bei i einen Pol der Ordnung 2, also

$$O_0(f) \;=\; -1 \qquad \text{und} \qquad O_i \;=\; -2.$$

9.2.6 Satz 1

Sei b eine nicht wesentliche Singularität von f und sei $f \neq 0$ auf $B_r(b) \setminus \{b\}$ mit $r > 0$.

Dann gibt es eindeutig bestimmte $k \in \mathbb{Z}$ und eine holomorphe Funktion

$$g : B_r(b) \to \mathbb{C}$$

mit $g(b) \neq 0$, so dass gilt:

$$f(z) \;=\; (z-b)^k g(z)$$

9.2.7 Folgerung

Sei b eine nicht hebbare Singularität von f.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) b ist eine polartige Singularität.

(2) Es gilt $\lim\limits_{z \to b} |f(z)| \;=\; \infty$.

(3) Es gibt ein $k > 0$, so dass $(z-b)^k f(z)$ eine hebbare Singularität bei b hat.

9.2.8 Satz von Casorati-Weierstraß

Sei b eine isolierte Singularität von f.

Dann ist b genau dann eine wesentliche Singularität von f, wenn für jedes $r > 0$ die Menge

$$f((B_r(b) \setminus \{b\}) \cap M)$$

dicht in $\mathbb{C}$ ist.

Dabei heißt eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ ***dicht*** in $\mathbb{C}$, wenn $\overline{M} = \mathbb{C}$ gilt.

9.2.9 Satz von Picard

Sei b eine wesentliche Singularität von f.

Dann gilt für jedes $r > 0$ gerade

$$f((B_r(b) \setminus \{b\}) \cap M) \;=\; \mathbb{C}$$

mit eventueller Ausnahme eines einzigen Punktes.

9.2.10 Beispiel

Die Funktion

$$f(z) \;=\; e^{1/z}$$

hat bei 0 eine wesentliche Singularität und es gilt $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Somit ist das Bild von $e^{1/z}$ gleich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

9.2.11 Satz 2

Sei b eine isolierte Singularität von f, welche auf einem Kreisring $B_r(b) \setminus \{b\}$ definiert und nicht konstant ist.

Ist dann b ein Häufungspunkt von Nullstellen von f, so ist b eine wesentliche Singularität.

Beispiel

Die Funktion

$$f(z) \;=\; \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

ist auf $B_1(0) \setminus \{0\}$ definiert und hat bei 0 einen Häufungspunkt von Nullstellen. Somit ist 0 eine wesentliche Singularität von f.

9.2.12 Zusammenfassung

Sei b eine isolierte Singularität von f.

Dann gilt:

(1) b ist eine hebbare Singularität, wenn $|f|$ in einer Umgebung von b beschränkt ist.

(2) b ist ein Pol, wenn $|f(z)|$ für $z \to b$ gegen ∞ strebt.

(3) b ist eine wesentliche Singularität, wenn das Bild von f lokal dicht in $\mathbb{C}$ ist.

9.3 Meromorphe Funktionen

Es sollen nun holomorphe Funktionen behandelt werden, die eventuell einige polartige oder sogar hebbare Singularitäten besitzen, also eventuell Singularitäten, die nicht wesentlich sind.

9.3.1 Bemerkung

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $P \subset M$ eine Menge von Punkten.

P hat keine Häufungspunkte in M heißt, dass eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:

(1) $\forall\, b \in P\ \exists\, r > 0 :\ B_r(b) \cap P\ =\ \{b\}$.

(2) $\forall\, b \in P\ \exists\, r > 0 :\ \#(B_r(b) \cap P)\ \leq\ 1$.

(3) Zu keinem Punkt $b \in P$ gibt es eine nicht triviale Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in P, die b als Grenzwert hat.

Vergleiche dazu Beispiel 9.2.2 Teil **(4)**: Hier ist der Nullpunkt ein Häufungspunkt in M.

9.3.2 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $P \subset M$ ohne Häufungspunkte in M und sei $K \subset M$ kompakt.

Dann ist die Menge $K \cap P$ endlich.

9.3.3 Satz 2

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und seien $f, g : M \to \mathbb{C}$ mit einer nicht wesentlichen isolierten Singularitäten bei $b \in M$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} O_b(f \cdot g) &= O_b(f) + O_b(g), \\ O_b(f+g) &\geq \min\{O_b(f), O_b(g)\}. \end{aligned}$$

9.3.4 Satz 3

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $P \subset M$ ohne Häufungspunkte in M.

Dann ist auch $M \setminus P$ ein Gebiet.

9.3.5 Definition

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $P \subset M$ ohne Häufungspunkte in M und sei $f : M \setminus P \to \mathbb{C}$ holomorph.

Die Funktion f heißt genau dann ***meromorph*** auf M, wenn alle Punkte $b \in P$ Pole von f sind.

Bemerkung

Sind $f : M \setminus P \to \mathbb{C}$ und $g : M \setminus Q \to \mathbb{C}$ meromorphe Funktionen auf M, so ist die Summe $f+g$ und das Produkt $f \cdot g$ definiert auf $M \setminus (P \cup Q)$.

9.3.6 Satz 4

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : M \setminus P \to \mathbb{C}$ meromorph und nicht die Nullfunktion.

Dann ist auch $\frac{1}{f}$ meromorph.

9.3.7 Satz 5

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

Dann bildet die Menge aller meromorphen Funktionen auf M einen Körper.

9.4 Der Residuensatz

9.4.1 Satz 1

Sei Γ eine geschlossene Kette in $\mathbb{C}$, seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen, sei $Sp(\Gamma) \subset U$, sei $I(\Gamma) \subset U \cup V$ und sei $I(\Gamma) \cap U \cap V = \emptyset$.

Dann gilt $I(\Gamma) \subset U$, also auch $I(\Gamma) \cap V = \emptyset$.

9.4.2 Satz 2

Sei c eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$.

Dann ist $Sp(c) \cup I(c)$ zusammenhängend.

9.4.3 Bemerkung

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $b \in M$ eine isolierte Singularität der Funktion $f : M \setminus \{b\} \to \mathbb{C}$.

f nahe b mit der Eigenschaft A heißt, dass es ein $r > 0$ mit $B_r(b) \subset M$ gibt, so dass A auf $f|_{(B_r(b)\setminus\{b\})}$ gilt.

9.4.4 Definition

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $b \in M$ eine isolierte Singularität von $f : M\setminus\{b\} \to \mathbb{C}$ mit [der Eigenschaft]

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n$$

nahe b.

Dann heißt

$$\operatorname{res}(f,b) \;:=\; a_{-1}$$

das ***Residuum*** von f bei b.

Bemerkung

Sei f bei b holomorph oder b sei eine hebbare Singularität von f.

Dann gilt $\operatorname{res}(f,b) \;=\; 0$.

Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

9.4.5 Satz 3

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $b \in M$ ein Pol der Ordnung ≤ 1 von $f : M\setminus\{b\} \to \mathbb{C}$.

Dann gilt

$$\operatorname{res}(f,b) \;=\; \lim_{z\to b}(z-b)\cdot f(z).$$

Beweis

Sei

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-b)^n \;=\; a_{-1}(z-b)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n.$$

Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ holomorph ist, folgt die Behauptung. □

9.4.6 Beispiel

Ein zentrales Beispiel ist das folgende:

Sei

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z^2+1} \;=\; \frac{1}{(z+i)(z-i)}.$$

Es sind also i und $-i$ Pole erster Ordnung von f. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(f,i) &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}, \\
\operatorname{res}(f,-i) &= \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{1}{z-i} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}.
\end{aligned}$$

9.4.7 Satz 4

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $b \in M$ ein Pol der Ordnung $m \leq 1$ der Funktion $f : M \setminus \{b\} \to \mathbb{C}$.

Dann gilt

$$\operatorname{res}(f,b) \;=\; \frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to b}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left((z-b)^m \cdot f(z)\right).$$

9.4.8 Residuensatz

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $P \subset M$ ohne Häufungspunkte in M, sei $f : M \setminus P \to \mathbb{C}$ holomorph und sei Γ eine geschlossene Kette in $M \setminus P$ mit $I(\Gamma) \subset M$.

Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi i \cdot \sum_{b\in I(\Gamma)\cap P} \operatorname{res}(f,b)\cdot n(\Gamma,b).$$

Bemerkung

Die Menge $I(\Gamma) \cup Sp(\Gamma)$ ist kompakt, somit besteht $I(\Gamma) \cap P$ aus endlich vielen Punkten [siehe Satz 9.3.2].

9.4.9 Beispiel 1

Sei $f(z) = \frac{1}{z}$. Dann gilt

$$\int_{\partial B_r(0)} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi i\cdot \operatorname{res}(f,0)\cdot n(\partial B_r(0),0) \;=\; 2\pi i \cdot 1\cdot 1 \;=\; 2\pi i.$$

9.4.10 Beispiel 2

Es soll nun das Integral

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \sin^2 t \,\mathrm{d}t$$

berechnet werden. Zunächst einmal gilt

$$\cos t \;=\; \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin t \;=\; \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i},$$

also folgt auch

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \sin^2 t \,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2 \cdot \frac{1}{ie^{it}} \cdot ie^{it}\,\mathrm{d}t.$$

Das Integral ist nun das Integral einer Funktion über den Rand des Einheitskreises. Es folgt somit nach dem Residuensatz gerade

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \sin^2 t \,\mathrm{d}t &= \int_{\partial B_1(0)} \left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2 \left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)^2 \cdot \frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{16} i \cdot \int_{\partial B_1(0)} \frac{((z^2+1)(z^2-1))^2}{z^5}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{16} i \cdot \int_{\partial B_1(0)} z^3 - 2z^{-1} + z^{-5}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{16} i \cdot 2\pi i \cdot (-2) \cdot 1 \;=\; \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

9.4.11 Beispiel 3

Sei $M = \mathbb{C}$, sei $P = \{i, -i\}$, sei $n > 1$ und sei

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z^2+1} \;=\; \frac{1}{(z-i)(z+i)}.$$

Sei weiter $c_n \sim d_1 + d_2$ die in der folgende Abbildung angedeutete Kurve:

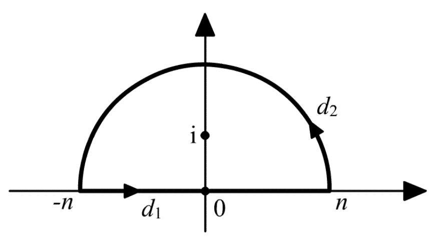


Abbildung 19: Integrationskurve c

Es gilt $P \cap I(c_n) = \{i\}$, somit folgt nach dem Residuensatz

$$\int_{c_n} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} \cdot 1 \;=\; \pi.$$

Rechnet man dieses Integral vollständig aus, so erhält man

$$\int_{c_n} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{-n}^{n} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_{d_2} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z.$$

Es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|\int_{d_2} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\right| \;&\leq\; L(d_2) \cdot \sup\{|f(z)| \mid z \in Sp(c_n)\} \\ &=\; \pi n \cdot \frac{1}{n^2-1} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0,\end{aligned}$$

somit konvergiert auch das Integral $\int\limits_{d_2} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$ nach dem Konvergenzsatz von Legesgue gegen 0. Es folgt also

$$\begin{aligned}\int_{c_n} f(z)\,\mathrm{d}z \quad &= \quad \int_{-n}^{n} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \;=\; [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} \;=\; \pi.\end{aligned}$$

Die Anwendung des Residuensatzes bei diesem Beispiel zeigt auch noch den folgenden Satz:

9.4.12 Satz 5

Sei $f : \mathbb{C} \setminus P \to \mathbb{C}$ eine rationale Funktion, für die gilt:

(1) Auf der reellen Achse besitzt f keinen Pol.

(2) Der Grad des Nenners von f ist um mindestens zwei größer als der Grad des Zählers.

Dabei sei P die Menge aller Pole [also Definitionslücken] von f. Es sei weiter $Q \subset P$ die Menge aller Punkte aus P mit positiven Imaginärteil, also

$$Q \;:=\; \{b \in P \mid \operatorname{Im} b > 0\}.$$

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi i \cdot \sum_{b \in Q} \operatorname{res}(f, b).$$

9.5 Anwendungen des Residuensatzes

9.5.1 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $b \in M$, seien $f : M \setminus \{b\} \to \mathbb{C}$ und $g : M \to \mathbb{C}$ holomorph, b sei keine wesentliche Singularität von f und f sei nahe b nicht die Nullfunktion.

Dann hat

$$g \cdot \frac{f'}{f}$$

bei b höchstens einen Pol erster Ordnung mit

$$\operatorname{res}\left(g \cdot \frac{f'}{f}, b\right) \;=\; g(b) \cdot O_b(f).$$

Beweis

Da f höchstens einen Pol bei b hat, gibt es eine holomorphe Funktion $h(z)$ nahe b mit $h(b) \neq 0$, so dass mit $n_0 = m = O_b(f)$

$$f(z) \;=\; (z-b)^m \cdot h(z).$$

gilt. Es folt nun mit

$$\begin{aligned} f'(z) &= m(z-b)^{m-1} \cdot h(z) + (z-b)^m h'(z) \\ &= (z-b)^{m-1} \cdot (m \cdot h(z) + (z-b)h'(z)) \end{aligned}$$

gerade

$$\left(g \cdot \frac{f'}{f}\right)(z) \;=\; g(z) \cdot m \cdot (z-b)^{-1} + g(z) \cdot \frac{h'(z)}{h(z)}$$

und da $g \cdot \frac{h'}{h}$ nahe b holomorph ist, folgt wie behauptet

$$\operatorname{res}\left(g \cdot \frac{f'}{f}, b\right) \;=\; g(b) \cdot m.$$

□

9.5.2 Satz 2

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $P \subset M$ ohne Häufungspunkte in M, seien $f : M \setminus P \to \mathbb{C}$ und $g : M \to \mathbb{C}$ holomorph, f habe für kein $b \in P$ eine wesentliche Singularität und sei Γ eine geschlossene Kette in M mit $I(\Gamma) \subset M$. Weiter gelte mit

$$Q \;:=\; \{z \in M \setminus P \mid f(z) \;=\; 0\}$$

gerade $Sp(\Gamma) \cap (P \cup Q) = \emptyset$.

Dann gilt

$$\int_\Gamma g(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi i \cdot \sum_{b \in I(\Gamma)\cap(P\cup Q)} g(b) \cdot O_b(f) \cdot n(\Gamma, b).$$

Spezialfall

Für die konstante Funktion $g = 1$ und einer Kette Γ in M, für die $n(\Gamma, b) = 1$ für alle $b \in I(\Gamma)$ gilt, folgt somit

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi i \cdot \sum_{b \in I(\Gamma)\cap(P\cup Q)} O_b(f).$$

Es ist also gerade

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

die Anzahl der Nullstellen von f in $I(\Gamma)$ mit Vielfachheit gezählt.

9.5.3 Beispiel

Sei

$$f(z) \;=\; \frac{z-1}{z} \qquad \text{mit} \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} \;=\; \frac{1}{z(z-1)}.$$

Es gilt somit $P = \{0\}$ und $Q = \{1\}$. Weiter ist $O_0(f) = -1$ sowie $O_1(f) = 1$, es folgt also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial B_r(0)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z &\;=\; -1, \\ \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial B_R(0)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z &\;=\; -1 + 1 \;=\; 0 \end{aligned}$$

für $0 < r < 1$ und $R > 1$.

9.5.4 Satz 3

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph und sei Γ eine geschlossene Kette in M mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in Sp(\Gamma)$.

Dann ist $f \circ \Gamma$ eine geschlossene Kette in M mit $0 \notin Sp(f \circ \Gamma)$ und es gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \;=\; n(f \circ \Gamma, 0).$$

9.5.5 Satz von Rouché

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, seien $f, g : M \to \mathbb{C}$ holomorph und sei Γ eine geschlossene Kette in M mit $I(\Gamma) \subset M$ sowie mit $n(\Gamma, b) = 1$ für alle $b \in I(\Gamma)$.

Gilt nun für alle $z \in Sp(\Gamma)$ gerade $|g(z)| < |f(z)|$, so folgt

$$\sum_{b \in I(\Gamma)} O_b(f) \;=\; \sum_{b \in I(\Gamma)} O_b(f+g).$$

Mit Vielfachheit gezählt haben also f und $f+g$ die gleiche Anzahl von Nullstellen in $I(\Gamma)$.

9.5.6 Beispiel

Es sollen alle Nullstellen von $z^4 - 4z + 2$ in $B_1(0)$ bestimmt werden. Für $|z| = 1$ gilt gerade

$$|g(z)| \;=\; |z^4| \;=\; 1 \;<\; 2 \;\leq\; |-4z+2| \;=\; |f(x)|,$$

somit hat $z^4 - 4z + 4 = f(z) + g(z)$ in $B_1(0)$ genausoviele Nullstellen wie $f(x) = -4z + 2$, nämlich eine.

9.6 Umkehrung von Funktionen

Zunächst werden noch einige ergänzende Sätze aufgeführt, bevor es dann um die Umkehrung von Funktionen geht.

9.6.1 Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant.

Dann ist f eine offene Abbildung, es wird also jede offene Menge auf eine offene Menge abgebildet.

9.6.2 Maximumsprinzip

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant.

Dann hat $|f|$ keine lokalen Maxima in M, es gilt also

$$\forall\, b \in M \;\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, z \in B_\varepsilon(b) : \;|f(z)| > |f(b)|.$$

Auch aus dem Maximumsprinzip lässt sich der Hauptsatz der Algebra beweisen.

9.6.3 Hauptsatz der Algebra

Sei f ein Polynom ohne Nullstellen. Dann ist $\frac{1}{f}$ eine ganze Funktion, also holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Ist f nicht konstant, dann gilt

$$\frac{1}{f(z)} \xrightarrow{|z|\to\infty} 0.$$

Somit müsste f aber irgendwo ein lokales Maximum annehmen, was ein Widerspruch zum Maximumsprinzip ist. Somit muss f konstant sein.

9.6.4 Satz 2

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $b \in M$ mit $f(b) = a$ und f sei nahe b nicht konstant.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und dazu ein $\delta > 0$, so dass

$$B_\delta(a) \subset f(B_\varepsilon(b))$$

gilt.

9.6.5 Lemma von Schwarz

Sei $B = B_1(0)$ die Einheitskreisscheibe, sei $f : B \to B$ holomorph und es gelte $f(0) = 0$.

Dann gilt

$$|f(z)| \leq |z| \qquad \text{und} \qquad |f'(0)| \leq 1.$$

Gibt es weiter ein $z \in B$ mit $z \neq 0$, so dass $|f(z)| = |z|$ oder $|f'(0)| = 1$ gilt, so ist

$$f(z) = e^{it} \cdot z = a \cdot z$$

mit geeigneten $t \in \mathbb{R}$ sowie $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$.

Beweis

Es sei für alle $z \in B \setminus \{0\}$

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}$$

sowie $g(0) = f'(0)$. Dann ist g holomorph auf B und für $|z| \leq r < 1$ gilt nach dem Maximumsprinzip gerade

$$|g(z)| \leq \max\left\{ \frac{|f(\zeta)|}{r} \;\middle|\; |\zeta| = r \right\} \leq \frac{1}{r},$$

denn es gilt $f(B) \subset B$. Für $r \to 1$ ergibt sich also

$$|g(z)| \leq 1,$$

das heißt es ist $|f(z)| \le |z|$ auf ganz B und es gilt $|f'(0)| \le 1$.

Die Gleichung $|f(z)| = |z|$ oder $|f'(0)| = 1$ für ein $z \in B$ mit $z \neq 0$ hat zur Folge, dass

$$|g(0)| \;=\; 1 \qquad \text{sowie} \qquad |g(z)| \;=\; 1$$

gilt. Somit ist g nach dem Maximumsprinzip eine Konstante vom Betrag 1, was die Behauptung zeigt. □

9.6.6 Umkehrung von Funktionen

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : M \to N$ holomorph und bijektiv.

Dann ist auch N ein Gebiet und $f^{-1} : N \to M$ ist holomorph.

Ist weiter Γ eine geschossene Kette in M mit $M \subset I(\Gamma)$ und für alle $b \in I(\Gamma)$ gelte $n(\Gamma, b) = 1$, dann gilt

$$f^{-1}(w) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\zeta \cdot f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} \,\mathrm{d}\zeta$$

für alle $w \in f(I(\Gamma))$.

9.7 Aufgaben

9.7.1 Aufgabe 1

Bestimme die Laurententwicklung der Funktion

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

auf den Kreisringen

(1) $M_1 \;=\; \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

(2) $M_2 \;=\; \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

(3) $M_3 \;=\; \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < \infty\}$.

Lösung

Durch Paritalbruchzerlegung erhält man zunächst

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z(z-1)(z-2)} \;=\; \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)}.$$

Teil 1

Für alle $z \in M_1$ gilt $|z| < 1$, somit folgt nach der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

$$\frac{1}{2(z-2)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} 2^{-n} z^n,$$

und die Laurententwicklung von $f(z)$ auf M_1 ist gerade

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} 2^{-n} z^n \\ &= \sum_{n=-1}^{-1} 2^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4} 2^{-n}\right) z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4} 2^{-n}\right) z^n. \end{aligned}$$

Teil 2

Für alle $z \in M_1$ gilt $|z/2| < 1$ sowie $|1/z| < 1$, somit folgt nach der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{z-1} = z^{-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = z^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = z^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{-\infty} z^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n,$$

$$\frac{1}{2(z-2)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} 2^{-n} z^n,$$

und die Laurententwicklung von $f(z)$ auf M_2 ist gerade

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} z^{-1} - \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} 2^{-n} z^n \\ &= \sum_{n=-2}^{-\infty} -z^n - \frac{1}{2} z^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} 2^{-n} z^n = \sum_{n=-2}^{-\infty} -z^n - \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{4} 2^{-n} z^n. \end{aligned}$$

Teil 3

Für alle $z \in M_1$ gilt $|2/z| < 1$ sowie $|1/z| < 1$, somit folgt nach der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{z-1} = z^{-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = z^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = z^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{-\infty} z^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2(z-2)} &= \frac{1}{2}z^{-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{2}z^{-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^{-n} = \frac{1}{2}z^{-1}\cdot\sum_{n=0}^{-\infty}2^{-n}z^n \\
&= \sum_{n=0}^{-\infty}2^{-n-1}z^{n-1} = \sum_{n=-1}^{-\infty}2^{-n-2}z^n,
\end{aligned}
$$

und die Laurententwicklung von $f(z)$ auf M_3 ist gerade

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}z^{-1} - \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} 2^{-n-2}z^n \\
&= \frac{1}{2}z^{-1} + \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(2^{-n-2}-1\right)z^n = \sum_{n=-2}^{-\infty}\left(2^{-n-2}-1\right)z^n.
\end{aligned}
$$

9.7.2 Aufgabe 2

Bestimme und klassifiziere alle isolierten Singularitäten von

(1) $f(z) = \dfrac{1-e^z}{1+e^z}$, **(2)** $f(z) = \dfrac{1}{\sin z + \cos z}$ und

(3) $f(z) = \exp\left(\dfrac{1}{z^2-1}\right)$.

Lösung

Seien g und h holomorphe Funktionen, die in einer Umgebung von b definiert sind und für die $g(b) \neq 0$ sowie $h(b) = 0$ und $h'(b) \neq 0$ gilt.

Dann hat die meromorphe Funktion

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

bei b einen Pol erster Ordnung und es gilt

$$\operatorname{res}(f, b) = \frac{g(b)}{h'(b)}.$$

Dieser Satz kann bei **(1)** und **(2)** angewendet werden.

Teil 1

Es ist also

$$g(z) = 1 - e^z \qquad \text{und} \qquad h(z) = 1 + e^z.$$

Die gegebene Funktion $f(z) = g(z)/h(z)$ hat bei den Nullstellen von $h(z)$ isolierte Singularitäten, also bei allen b aus

$$B := \{(2k+1)i\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Es gilt wie gefordert

$$g(b) \; = \; 2 \; \neq \; 0, \qquad h(b) \; = \; 0 \qquad \text{und} \qquad h'(b) \; = \; -1 \; \neq \; 0$$

für alle $b \in B$, somit hat $f(z)$ bei allen $b \in B$ einen Pol erster Ordnung.

Teil 2

Es ist also

$$g(z) \; = \; 1 \qquad \text{und} \qquad h(z) \; = \; \sin z + \cos z \; = \; \sqrt{2} \cdot \cos(z - \pi/4).$$

Die gegebene Funktion $f(z) = g(z)/h(z)$ hat bei den Nullstellen von $h(z)$ isolierte Singularitäten, also bei allen b aus

$$B \; := \; \{k\pi + 3\pi/4 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Es gilt wie gefordert

$$g(b) \; = \; 1 \; \neq \; 0, \qquad h(b) \; = \; 0 \qquad \text{und} \qquad h'(b) \; \neq \; 0$$

für alle $b \in B$, somit hat $f(z)$ bei allen $b \in B$ einen Pol erster Ordnung.

Teil 3

Die gegebene Funktion $f(z)$ hat isolierte Singularitäten bei -1 und 1.

Da aber der Grenzwert

$$\lim_{z \to \pm 1} \exp\left(\frac{1}{z^2 - 1}\right) \cdot (z \pm 1)^k$$

für kein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sind die isolierte Singularitäten weder hebbar noch polartig, also sind sie wesentlich.

9.7.3 Aufgabe 3

Bestimme die Laurententwicklung der Funktion

$$f(z) \; = \; \frac{1}{z(z+1)}$$

auf den Kreisringen

(1) $M_1 \; = \; \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

(2) $M_2 \; = \; \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - 1| < 1\}$.

(3) $M_3 \; = \; \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - 1| < 2\}$.

Lösung

Durch Paritalbruchzerlegung erhält man zunächst

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z(z+1)} \;=\; \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}.$$

Teil 1

Für alle $z \in M_1$ gilt $|z| < 1$, somit folgt nach der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{z+1} \;=\; \frac{1}{1-(-z)} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

und die Laurententwicklung von $f(z)$ auf M_1 ist gerade

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \;=\; \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n \;=\; \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n.$$

Teil 2

Für alle $z \in M_2$ gilt $|z-1| < 1$, somit folgt nach der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} \;&=\; \frac{1}{1+(z-1)} \;=\; \frac{1}{1-(-(z-1))} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, \\
\frac{1}{z+1} \;&=\; \frac{1}{2+(z-1)} \;=\; \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{-(z-1)}{2}\right)} \\
&=\; \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-n} (z-1)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-(n+1)} (z-1)^n,
\end{aligned}$$

und die Laurententwicklung von $f(z)$ auf M_2 ist gerade

$$\begin{aligned}
f(z) \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-(n+1)} (z-1)^n \\
&=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - 2^{-(n+1)}\right) (z-1)^n.
\end{aligned}$$

Teil 3

Für alle $z \in M_3$ gilt $1/|z-1| < 1$ und $|z-1|/2 < 1$, somit folgt nach der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{z} \;=\; \frac{1}{1+(z-1)} \;=\; \frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{z-1}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n} = \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{-\infty} (-1)^n (z-1)^n \\
&= \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{-(z-1)}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-n} (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-(n+1)} (z-1)^n,
\end{aligned}
$$

und die Laurententwicklung von $f(z)$ auf M_3 ist gerade

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-(n+1)} (z-1)^n \\
&= \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{-(n+1)} (z-1)^n.
\end{aligned}
$$

9.7.4 Aufgabe 4

Sei f eine in einer Umgebung von $a \in \mathbb{C}$ definierten holomorphen Funktion mit $f'(a) \neq 0$ und sei g eine in einer Umgebung von $b = f(a)$ definierten meromorphen Funktion, die bei b einen Pol erster Ordnung hat.

Berechne die Art der Singularität von $f \circ g$ bei a.

Lösung

Da g bei b einen Pol erster Ordnung hat, gibt es eine in einer Umgebung von b definierte holomorphe Funktion h mit

$$
g(z) = \frac{h(z)}{z-b}.
$$

Es gilt dann

$$
(g \circ f)(z) = \frac{h(f(z))}{f(z)-b} = \frac{h(f(z))}{f(z)-f(a)}
$$

und da $f'(a) \neq 0$ gilt, folgt

$$
\lim_{z \to a} \left((g \circ f)(z) \cdot (z-a)\right) = \lim_{z \to a} \left(h(f(z)) \cdot \frac{z-a}{f(z)-f(a)} \right) = \frac{h(f(a))}{f'(a)}.
$$

Somit hat auch $f \circ g$ bei a einen Pol erster Ordnung.

9.7.5 Aufgabe 5

Berechne mit dem Residuensatz

$$\int_0^{2\pi} \left((\cos x)^4 \cdot (\sin x)^2 + (\sin x)^4\right)\, \mathrm{d}x.$$

Lösung

Es gilt

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i},$$

somit folgt

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \left((\cos x)^4 \cdot (\sin x)^2 + (\sin x)^4\right)\, \mathrm{d}x \\
= \;& \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^4\right] \cdot \frac{ie^{it}}{ie^{it}}\, \mathrm{d}t \\
= \;& \int_{\partial B_1(0)} \left[\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)^4\right] \cdot \frac{1}{iz}\, \mathrm{d}z \\
= \;& \int_{\partial B_1(0)} \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{-1}{4i} \cdot \frac{1}{z^7} \cdot (z^2+1)^4 \cdot (z^2-1)^2 + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{iz^5} \cdot (z^2-1)^4\right) \mathrm{d}z \\
= \;& -\frac{1}{64i} \int_{\partial B_1(0)} \left(\frac{(z^2+1)^4 \cdot (z^2-1)^2 - 4z^2 \cdot (z^2-1)^4}{z^7}\right) \mathrm{d}z \\
= \;& -\frac{1}{64i} \int_{\partial B_1(0)} \left(\frac{z^{12} - 2z^{10} + 15z^8 - 28z^6 + 15z^4 - 2z^2 + 1}{z^7}\right) \mathrm{d}z \\
= \;& -\frac{1}{64i} \int_{\partial B_1(0)} \left(z^5 - 2z^3 + 15z - 28z^{-1} + 15z^{-3} - 2z^{-5} + z^{-7}\right) \mathrm{d}z \\
= \;& -\frac{1}{64i} \cdot 2\pi i \cdot (-28) \cdot 1 \;=\; \frac{7}{8}\pi,
\end{aligned}$$

da gerade

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(f,0) &= \frac{1}{6!} \cdot \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}^6}{\mathrm{d}z^6} \left(z^{12} - 2z^{10} + 15z^8 - 28z^6 + 15z^4 - 2z^2 + 1\right) \\
&= -28
\end{aligned}$$

gilt.

9.7.6 Aufgabe 6

Berechne mit dem Residuensatz die Integrale

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$ und **(2)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}\, \mathrm{d}x.$

Lösung Teil 1

Sei
$$f(z) \;=\; \frac{g(z)}{h(z)} \;=\; \frac{1}{z^2+2z+2}.$$
Es gilt $h(z)=0$ für $z=-1-i$ oder $z=-1+i$, somit hat $f(z)$ bei $b=-1+i$ und $c=-1-i$ Pole erster Ordnung.

Es folgt
$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(f,b) &= \lim_{z\to b}(x-b)f(x) \;=\; \lim_{z\to b}\frac{(x+1-i)}{(x+1-i)(x+1+i)}\\
&= \lim_{z\to b}\frac{1}{x+1+i} \;=\; \frac{1}{-1+i+1+i} \;=\; \frac{1}{2i} \;=\; -\frac{i}{2}.
\end{aligned}$$
Da der Grad von $h(z)$ um 2 größer ist als der Grad von $g(z)$ und $f(z)$ auf der reellen Achse keine Pole hat, kann der Satz 9.4.12 angewendet werden.

Es ist $\operatorname{Im} b>0$ und $\operatorname{Im} c<0$, somit folgt
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} \;=\; 2\pi i\cdot\operatorname{res}(f,b) \;=\; 2\pi i\cdot\frac{1}{2i} \;=\; \pi.$$

Lösung Teil 2

Sei
$$f(z) \;=\; \frac{g(z)}{h(z)} \;=\; \frac{z+1}{z^4+2z^3+3z^2+2z+1}.$$
Es gilt $h(z)=z^4+2z^3+3z^2+2z+1=(z^2+z+1)^2$, somit gilt $h(z)=0$ gerade für
$$z \;=\; -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
$f(z)$ hat also bei $b=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und bei $c=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ Pole zweiter Ordnung.

Es folgt
$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(f,b) &= \frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{z\to b}\frac{\mathrm{d}^{2-1}}{\mathrm{d}z^{2-1}}\big((z-b)^2f(z)\big)\\
&= \lim_{z\to b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{g(z)}{(z-c)^2}\right) \;=\; \lim_{z\to b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z+1}{(z-c)^2}\right)\\
&= \lim_{z\to b}\left(\frac{(z-c)^2+2(z-c)(z+1)}{(z-c)^2}\right)\\
&= \lim_{z\to b}\left(1-\frac{2z+2}{z-c}\right) \;=\; 1-\frac{2b+2}{b-c}\\
&= 1-\frac{\sqrt{3}i-1+2}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} \;=\; 1-\frac{\sqrt{3}i+1}{\sqrt{3}i} \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}i}.
\end{aligned}$$

Da der Grad von $h(z)$ um 3 größer ist als der Grad von $g(z)$ und $f(z)$ auf der reellen Achse keine Pole hat, kann der Satz 9.4.12 angewendet werden.

Es ist $\operatorname{Im} b > 0$ und $\operatorname{Im} c < 0$, somit folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x \;=\; 2\pi i \cdot \operatorname{res}(f,b) \;=\; 2\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{3}i} \;=\; \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

9.7.7 Aufgabe 7

Zeige

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} \;=\; \frac{2}{9}\pi\sqrt{3}$$

durch Integration der Funktion $f(z) = g(z)/1+x^3$ über die in der folgenden Abbildung angegebenen Kurve c für große R und kleine r:

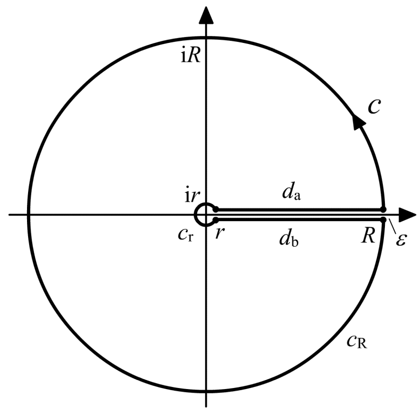


Abbildung 20: Integrationskurve c

Dabei ist $g(z)$ ein geeigneter Logarithmus.

Lösung

Sei also $c \sim c_R - c_r + d_a - d_b$ eine geschlossene Kurve wie in der Abbildung.

Das gegebene Integral existiert nach der reellen Analysis, da der Grad des Nenners [mit 3] um mehr oder gleich 2 größer ist, als der Grad des Zählers [mit 0], und da $1/1+x^3$ keine Nullstellen in $]0,\infty[$ hat.

Wähle nun r so klein und R so groß, dass alle drei Pole

$$-1, \qquad \frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}$$

von $1/1+z^3$ im Inneren von c liegen.

Wähle weiter den Zweig des Logarithmus mit $0 < \operatorname{Im}\log z < 2\pi$.

Zunächst sollen nun die drei Residuen von

$$f(z) \;=\; \frac{\log z}{1+z^3}$$

berechnet werden. Es gilt

$$\operatorname{res}(f,-1) \;=\; \lim_{z\to-1}(z+1)\left(\frac{\log z}{1+z^3}\right) \;=\; \lim_{z\to-1}\frac{\log z}{z^2-z+1} \;=\; \frac{\pi i}{3}$$

und analog erhält man

$$\begin{aligned}\operatorname{res}\left(f,\,\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}\pi}{18}-\frac{\pi i}{18},\\ \operatorname{res}\left(f,\,\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right) &= -\frac{5\sqrt{3}\pi}{18}-\frac{5\pi i}{18}.\end{aligned}$$

Es gilt nun

$$\int_c \frac{\log z}{1+z^3}\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{c_R}\frac{\log z}{1+z^3}\,\mathrm{d}z-\int_{c_r}\frac{\log z}{1+z^3}\,\mathrm{d}z+\int_{d_a}\frac{\log z}{1+z^3}\,\mathrm{d}z-\int_{d_b}\frac{\log z}{1+z^3}\,\mathrm{d}z.$$

Wegen $\lim\limits_{R\to\infty}\frac{1}{R}\log R=\lim\limits_{r\to0} r\log r=0$ konvergieren die beiden Integrale

$$\int_{c_R}\frac{\log z}{1+z^3}\,\mathrm{d}z \qquad \text{und} \qquad \int_{c_r}\frac{\log z}{1+z^3}\,\mathrm{d}z$$

für $R\to\infty$ und $r\to0$ gegen 0.

Aus $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\log(x-i\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\log(x+i\varepsilon)+2\pi i$ folgt nun

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{d_a}\frac{\log z}{1+z^3}\,\mathrm{d}z \;=\; -\lim_{\varepsilon\to0}\int_{d_a}\frac{\log(z+2\pi i)}{1+z^3}\,\mathrm{d}z.$$

Insgesamt ergibt sich nun aus dem Residuensatz gerade

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z &= -\frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to0}\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to0}\int_c\frac{\log z}{1+z^3}\,\mathrm{d}z\\ &= -\sum_{b\in I(c)}\operatorname{res}(f,b),\end{aligned}$$

also gilt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x &= -\left(\frac{\pi i}{3}+\frac{\sqrt{3}\pi}{18}-\frac{\pi i}{18}-\frac{5\sqrt{3}\pi}{18}-\frac{5\pi i}{18}\right)\\ &= -\left(-\frac{4}{18}\sqrt{3}\pi\right) \;=\; \frac{2}{9}\pi\sqrt{3}.\end{aligned}$$

9.7.8 Aufgabe 8

Zeige, dass alle Nullstellen von

$$h(z) \;=\; z^5 + z^3 - 2z^2 + 10$$

im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ liegen.

Lösung

Sei $|z| = 1$, sei $f_1(z) = 10$ und sei $g_1(z) = z^5 + z^3 - 2z^2$.

Dann gilt

$$|g_1(z)| \;=\; |z^5 + z^3 - 2z^2| \;\leq\; 1 + 1 + 2 \;=\; 4 \;<\; 10 \;=\; |f_1(z)|.$$

Somit hat $h(x) = f_1(z) + g_1(z)$ in der Kreisscheibe $B_1(0)$ ebenso viele Nullstellen wie $f_1(z) = 10$, nämlich gar keine.

Sei $|z| = 2$, sei $f_2(z) = z^5$ und sei $g_2(z) = z^3 - 2z^2 + 10$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} |g_2(z)| \;&=\; |z^3 - 2z^2 + 10| \;\leq\; |z|^3 + 2|z|^2 + 10 \\ &=\; 8 + 2 \cdot 4 + 10 \;=\; 26 \;<\; 32 \;=\; |z^5| \;=\; |f_2(z)|. \end{aligned}$$

Somit hat $h(x) = f_2(z) + g_2(z)$ in der Kreisscheibe $B_2(0)$ ebenso viele Nullstellen wie $f_2(z) = z^5$, nämlich alle 5 [mit Vielfachheit].

9.7.9 Aufgabe 9

Zeige, dass $z^5 - 4z + a = 0$ für $|a| \leq 2$ genau eine Lösung z mit $|z| < 1$ hat.

Lösung

Sei $|z| = 1$, sei $f(z) = -4z + a$ und sei $g(z) = z^5$.

Dann gilt

$$|g(z)| \;=\; |z^5| \;= 1 \;<\; 2 \;\leq\; |-4z + a| \;=\; |f(z)|.$$

Somit hat $f(z) + g(z) = z^5 - 4z + a$ nach dem Satz von Rouché in der Kreisscheibe $B_1(0)$ ebenso viele Nullstellen wie $f(z) = -4z + a$, nämlich eine.

9.7.10 Aufgabe 10

Berechne mit dem Residuensatz die Integrale

$$\textbf{(1)} \quad \int_{\partial B_3(i)} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2}\,\mathrm{d}z \qquad \text{und} \qquad \textbf{(2)} \quad \int_{\partial B_1(0)} z^4 \sin\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Lösung Teil 1

Es gilt $z^3 - iz^2 = z^2(z-i)$, somit hat

$$f(z) \;=\; \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}$$

bei i einen Pol erster und bei 0 einen Pol zweiter Ordnung. Es müssen also zunächst die Residuen berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(f,i) &= \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)} \;=\; \lim_{z\to i}\frac{e^{z^2}-1}{z^2} \;=\; 1-e^{-1},\\
\operatorname{res}(f,0) &= \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^2\frac{e^{z^2}-1}{z^2(z-i)} \;=\; \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{e^{z^2}-1}{z-i}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{2ze^{z^2}(z-i)-e^{z^2}+1}{(z-i)^2} \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz ergibt sich somit

$$\int_{\partial B_3(i)}\frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} \;=\; 2\pi i\cdot\left(1-e^{-1}\right).$$

Lösung Teil 2

Die Funktion $f(z) = z^4 \sin\frac{1}{z}$ ist nur bei 0 nicht definiert. Da nicht bekannt ist, ob es sich um einen Pol handelt, muss $f(z)$ in eine Laurentreihe der Form $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ entwickelt werden:

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^4\sin\frac{1}{z} \;=\; z^4\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-(2n+1)}\\
&= z^4\cdot\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(-1)^{(n+1)}}{-(2n+1)!}z^{2n+1} \;=\; \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(-1)^{(n+1)}}{-(2n+1)!}z^{2n+5}.
\end{aligned}$$

In dieser Darstellung gilt für $n = -3$ gerade $z^{-1}/5!$, somit gilt für das Residuum von f bei 0 gerade $\operatorname{res}(f,0) = 1/120$ und es ergibt sich nach dem Residuensatz

$$\int_{\partial B_1(0)} z^4\sin\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi i\cdot\frac{1}{120} \;=\; \frac{\pi i}{60}.$$

9.7.11 Aufgabe 11

Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ und sei $P \subset \mathbb{C}$ die Polstellenmenge von f.

Zeige, dass f genau dann eine Stammfunktion hat, wenn alle Residuen von f bei den Polen $b \in P$ verschwinden.

Lösung

Zunächst habe f eine Stammfunktion. Dann ist f auch holomorph und lässt sich auf ganz $\mathbb{C}$ um jeden Punkt $b \in \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

entwickeln. Somit gilt für alle $b \in P$ auch $\operatorname{res}(f,b) = 0$.

Nun gelte gerade $\operatorname{res}(f,b) = 0$ für alle $b \in P$. Sei weiter Γ eine beliebige geschlossene Kette in $\mathbb{C}$. Dann gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sum_{b\in P} \operatorname{res}(f,b) \cdot n(\Gamma,b) = 0.$$

Da nun das Integral von f über jede Kette verschwindet, hat f eine Stammfunktion.

9.7.12 Aufgabe 12

Berechne ohne Anwendung von Satz 9.4.12 das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 2x^2 + 1}.$$

Lösung

Sei zunächst

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^2 + 1} = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}.$$

Es soll nun $f(z)$ über die Kurve $c_n \sim d_1 + d_2$ wie in Beispiel 9.4.11 integriert werden:

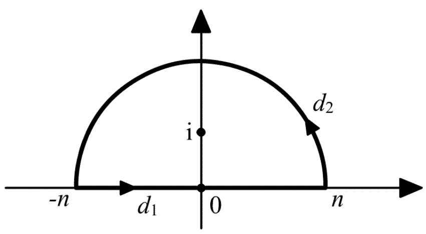


Abbildung 21: Integrationskurve c

Nach dem Residuensatz gilt also

$$\int_{c_n} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{b \in I(c_n) \\ b \text{ Polstelle}}} \operatorname{res}(f,b) = 2\pi i \cdot \operatorname{res}(f,i),$$

somit muss zunächst $\operatorname{res}(f, i)$ berechnet werden. Da f bei i einen Pol zweiter Ordnung hat, folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(f,i) &= \lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big((z-i)^2 f(z)\big) = \lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{(z+i)^2}\\ &= \lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i}.\end{aligned}$$

Weiter gilt mit einer geeigneten Konstanten $k \in \mathbb{C}$ gerade

$$\begin{aligned}\left|\int_{d_2} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_0^\pi \left|\frac{ine^{it}}{n^4e^{4it}+2n^2e^{2it}+1}\right|\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^\pi \frac{k}{n^3}\,\mathrm{d}t = \frac{k\pi}{n^3} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

somit folgt nun

$$2\pi i\cdot\frac{1}{4i} = \int_{c_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{d_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{d_2} f(z)\,\mathrm{d}z \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Insgesamt ergibt sich also für $n \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

10 Funktionenfolgen

Um einige Sätze über Funktionenfolgen möglichst allgemein formulieren zu können, soll zunächst eine Topologie auf dem Raum $\mathcal{H}$ aller holomorphen Funktionen definiert werden:

10.1 Topologie auf $\mathcal{C}(M)$

10.1.1 Definitionen

Sei $M \subset \mathbb{C}$. Dann bedeutet

(1) $\mathcal{C}(M)$ den komplexen Vektorraum aller stetigen Funktionen auf M und

(2) $\mathcal{H}(M)$ den [Unter-] Vektorraum aller holomorphen Funktionen auf M.

Sei weiter $K \subset M$ kompakt. Dann wird durch

$$\|f\|_K \;=\; \sup\{|f(z)| \mid z \in K\} \;\in\; [0, \infty[$$

für $f \in \mathcal{C}(M)$ eine Halbnorm definiert.

10.1.2 Definitionen

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{C}(M)$.

(1) (f_n) konvergiert auf M ***punktweise*** gegen f, wenn für alle $z \in M$ gerade

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) \;=\; f(z)$$

gilt.

(2) (f_n) konvergiert auf M ***gleichmäßig*** gegen f, wenn gerade

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_M \;=\; 0$$

gilt.

(3) (f_n) konvergiert auf M ***kompakt*** gegen f, wenn für alle Kompakta $K \subset M$ gerade

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_K \;=\; 0$$

gilt.

(4) (f_n) konvergiert auf M ***lokal gleichmäßig*** gegen f, wenn es zu jedem $b \in M$ gerade eine Umgebung U von b gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_U \;=\; 0$$

gilt.

Bemerkung

Es gilt dabei

$$\textbf{(2)} \;\Rightarrow\; \textbf{(3)} \;\Leftrightarrow\; \textbf{(4)} \;\Rightarrow\; \textbf{(1)}.$$

10.1.3 Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz

Durch die folgende Definition offener Mengen wird eine Topologie auf $\mathcal{C}(M)$ gegeben:

Eine Menge $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}(M)$ heißt ***offen***, wenn es zu jedem $f \in \mathcal{U}$ eine kompakte Menge $K \subset M$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $g \in \mathcal{C}(M)$ mit $\|g-f\|_K < \varepsilon$ auch $g \in \mathcal{U}$ gilt.

Kurz:

$$\forall\; f \in \mathcal{C}(M) \;\exists\; K \text{ kompakt } \exists\; \varepsilon > 0 : \; B_{K,\varepsilon}(f) \subset \mathcal{U},$$

dabei ist

$$B_{K,\varepsilon}(f) \;:=\; \{g \in \mathcal{C}(M) \mid \|g - f\|_K < \varepsilon\}.$$

10.1.4 Definition

Sei $f \in \mathcal{C}(M)$ und sei $U \subset \mathcal{C}(M)$.

U heißt eine ***Umgebung*** von f, wenn es ein $V \subset \mathcal{C}(M)$ mit

$$f \;\in\; V \;\subset\; U$$

gibt.

10.1.5 Satz 1

Eine Folge (f_n) in $\mathcal{C}(M)$ konvergiert genau dann lokal gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{C}(M)$, wenn es zu jeder Umgebung U von f in $\mathcal{C}(M)$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gerade $f_n \in U$ gilt.

10.2 Funktionenfolgen

Die nun folgenden Sätze über Funktionenfolgen werden jeweils topologisch sowie durch äquivalente Sätze ohne Topologie angegeben.

10.2.1 Satz 1

Die Menge $\mathcal{H}(M) \subset \mathcal{C}(M)$ ist abgeschlossen in $\mathcal{C}(M)$.

10.2.2 Satz 1'

Sei (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen f konvergiert.

Dann ist auch f holomorph.

Gerade der folgende Satz ist in der reellen Analysis undenkbar:

10.2.3 Satz 2

Die Ableitungsfunktion

$$\begin{array}{rcl} ' : \mathcal{H}(M) & \to & \mathcal{H}(M) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$

ist stetig.

10.2.4 Satz 2'

Sei (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen f konvergiert.

Dann konvergiert auch die Folge (f'_n) lokal gleichmäßig gegen f'.

10.2.5 Satz 3

Sei Γ eine geschlossene Kette in M mit $I(\Gamma) \subset M$ und $n(b,\Gamma) = 1$ für alle $b \in I(\Gamma)$.

Seien weiter $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist

$$\begin{array}{rcll} U_a & = & \{f \in \mathcal{H}(M) & | \ \text{für alle } z \in Sp(\Gamma) \text{ gilt } f(z) \neq a, \\ & & & \ \text{die Anzahl der Stellen mit } f(z) = a \text{ ist } n\} \end{array}$$

offen in $\mathcal{H}(M)$.

10.2.6 Folgerung 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $a \in M$ fest.

Dann ist

$$U_a = \{f \in \mathcal{H}(M) \mid f \text{ nicht konstant, } a \in f(M)\}$$

offen in $\mathcal{H}(M)$.

10.2.7 Folgerung 2

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

Dann ist

$$U = \{f \in \mathcal{H}(M) \mid f \text{ nicht konstant, } f \text{ nicht injektiv}\}$$

offen in $\mathcal{H}(M)$.

10.2.8 Satz 3'

Sei Γ eine geschlossene Kette in M mit $I(\Gamma) \subset M$ und $n(b, \Gamma) = 1$ für alle $b \in I(\Gamma)$ und sei $a \in \mathbb{C}$.

Sei weiter (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen f konvergiert.

Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

(1) $f_n(z) \neq a$ für alle $z \in Sp(\Gamma)$.

(2) f_n hat die gleiche Anzahl von Stellen mit $f(z) = a$ in $I(\Gamma)$ wie f.

10.2.9 Folgerung 1'

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen eine nicht konstante Funktion f konvergiert.

Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ gerade $a \neq f_n(M)$, so gilt auch $a \neq f(M)$.

10.2.10 Folgerung 2'

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei (f_n) eine Folge von holomorphen, injektiven Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen f konvergiert.

Dann ist f injektiv oder konstant.

Beispiel

Die injektive Funktionenfolge $f_n(z) = \frac{1}{n} \cdot z$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen die konstante Funktion $f(z) = 0$.

10.2.11 Cauchykriterium für Funktionenfolgen

Sei (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) Es gibt eine holomorphe Funktion f, so dass f_n lokal gleichmäßig gegen f konvergiert.

(2) Für alle kompakten $K \subset M$ und für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ gerade

$$\|f_n - f_m\|_K \; < \; \varepsilon$$

gilt.

(3) Zu jedem $a \in M$ gibt es eine Umgebung U von a, so dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt und dann aus $n, m \geq N$ auch

$$\|f_n - f_m\|_U \; < \; \varepsilon$$

folgt.

10.2.12 Riemannsche ζ-Funktion

Durch Funktionenfolgen kann man nun zum Beispiel zeigen, dass sich die Riemannsche ζ-Funktion

$$\zeta(z) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

meromorph auf $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ fortsetzen lässt und bei $z = 1$ den einzigen Pol hat. Es ist ein Pol erster Ordnung und des Residuum bei $z = 1$ ist 1.

10.3 Sätze von Montel und Vitali

Zunächst wird der Begriff einer beschränkten Menge von holomorphen Funktionen eingeführt werden:

10.3.1 Definition

$A \subset \mathcal{H}(M)$ heißt ***beschränkt***, wenn eine der folgenden Aussagen erfüllt wird:

(1) Für jede kompakte Menge $K \subset M$ gilt $\sup\{\|f\|_K \mid f \in A\} < \infty$.

(2) Zu jeder kompakten Menge $K \subset M$ gibt es ein $c > 0$, so dass für alle $f \in A$ gerade $\|f\|_K \leq c$ gilt.

10.3.2 Satz 1

Sei $A \subset \mathcal{H}(M)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) A ist beschränkt.

(2) Für alle $a \in M$ gibt es eine Umgebung U von a sowie ein c, so dass für alle $f \in A$ gerade $\|f\|_U \leq c$ gilt.

(3) Zu jeder Nullumgebung $U \subset \mathcal{H}(M)$ gibt es ein c, so dass

$$A \subset \{c \cdot f \mid f \in U\}$$

gilt.

10.3.3 Beispiele

(1) Endliche Mengen sind beschränkt.

(2) Endliche Vereinigungen von beschränkten Mengen sind beschränkt.

(3) Konvergente Folgen sind beschränkt, d.h. $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.

10.3.4 Satz 2

Ist $A \subset \mathcal{H}(M)$ beschränkt, so ist auch

$$A' = \{f' \mid f \in A\} \subset \mathcal{H}(M)$$

beschränkt.

10.3.5 Definition

Sei A eine Menge von Funktionen, die auf M definiert sind, und sei $K \subset M$.

Die Menge A ist ***gleichgradig gleichmäßig*** stetig auf K, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, f \in A\ \forall\, x, y \in K: \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Die Wahl von δ hängt also nicht einmal von der Funktion f ab.

10.3.6 Satz 3

Sei $A \subset \mathcal{H}(M)$ beschränkt und sei $K \subset M$ kompakt.

Dann ist A gleichgradig gleichmäßig stetig auf K.

10.3.7 Satz von Montel

Sei (f_n) eine beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf M.

Dann hat (f_n) eine konvergente Teilfolge.

10.3.8 Folgerung

Sei (f_n) eine beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf M, so dass jede konvergente Teilfolge gegen denselben Grenzwert f konvergiert.

Dann konvergiert auch (f_n) gegen f.

10.3.9 Satz von Vitali

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei (f_n) eine beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf M.

Sei weiter $P \subset M$ mit

(1) P hat Häufungspunkte in M.

(2) Für jedes $z \in P$ konvergiert die Folge $(f_n(z))$ in $\mathbb{C}$.

Dann konvergiert (f_n) gegen eine holomorphe Funktion f.

10.4 Filter

Der Beweis zum Satz von Montel kann sehr allgemein über den topologischen Begriff des Filters geführt werden. Dazu sollen an dieser Stelle nun kurz Filter definiert und vorgestellt werden.

10.4.1 Definition

Sei X eine beliebige nicht leere Menge und sei $\mathcal{F}$ eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X.

$\mathcal{F}$ heißt ***Filter*** in X, wenn gilt:

(FIL1) $\mathcal{F}$ ist nicht leer.

(FIL2) Die leere Menge ist kein Element aus $\mathcal{F}$.

(FIL3) Sind $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, so gibt es auch ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F \subset F_1 \cap F_2$.

(FIL4) Ist $F \in \mathcal{F}$ und gibt es ein $G \subset X$ mit $F \subset G$, so ist auch $G \in \mathcal{F}$.

Bemerkung

Die Axiome **(3)** und **(4)** ergeben zusammen gerade, dass mit $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ auch $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ gilt.

10.4.2 Definition

Gelten die Axiome **(1)** bis **(3)** für eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, so heißt $\mathcal{B}$ eine ***Filterbasis***.

Die Menge

$$\overline{\mathcal{B}} := \{F \subset X \mid \text{es gibt ein } B \in \mathcal{B} \text{ mit } B \subset F\}$$

ist nun gerade ein Filter, nämlich der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter.

10.4.3 Beispiele

(1) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer nicht leeren Menge X ist kein Filter, da $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ gilt.

(2) Sei X eine beliebige nicht leere Menge. Dann ist $\mathcal{F} = \{X\}$ ein Filter.

(3) Sei $X = \mathbb{N}$. Dann ist

$$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ ist endlich}\}$$

ein Filter in $\mathbb{N}$.

(4) Sei X eine beliebige nicht leere Menge und sei $a \in X$ fest. Dann ist

$$\mathcal{F} = \{F \subset X \mid a \in F\}$$

ein Filter, nämlich der ***Hauptfilter*** zu a.

(5) Sei X eine beliebige nicht leere Menge und sei (x_n) eine Folge in X. Sei weiter

$$F_n = \{x_k \mid k \geq n\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\mathcal{B} = \{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

eine Filterbasis und

$$\mathcal{F} = \overline{\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$$

ist ein Filter, nämlich der ***Fréchetfilter*** zu der Folge (x_n).

(6) Sei X ein topologischer Raum und sei $a \in X$ fest. Dann ist

$$\mathcal{U}_a = \{U \subset X \mid U \text{ ist Umgebung von } a\}$$

ein Filter, nämlich der ***Umgebungsfilter*** von a.

(7) Sei $X = \mathbb{R}$ und sei

$$F_t = [t, \infty[$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\mathcal{B} = \{F_t \mid t \in \mathbb{R}\}$$

eine Filterbasis.

10.4.4 Definition

Ein Filter $\mathcal{U}$ heißt ***Unterfilter*** eines Filters $\mathcal{F}$ oder auch ***feiner*** als $\mathcal{F}$, wenn

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$$

gilt.

Beispiel

Sei (x_n) eine Folge in X, sei $\mathcal{F}$ der Fréchetfilter von (x_n) und sei weiter (y_n) eine Teilfolge von (x_n) sowie $\mathcal{U}$ der Fréchetfilter von (y_n).

Dann gilt $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, also ist $\mathcal{U}$ ein Unterfilter von $\mathcal{F}$.

10.4.5 Definition

Sei X ein topologischer Raum, sei $a \in X$ fest und sei $\mathcal{F}$ ein Filter in X.

Der Filter $\mathcal{F}$ ***konvergiert*** gegen a, wenn $\mathcal{F}$ feiner ist als der Umgebungsfilter $\mathcal{U}_a$, wenn also für jede Umgebung U von a gerade $U \in \mathcal{F}$ gilt.

Schreibweise: $\mathcal{F} \to a$.

Beispiel

Sei (x_n) eine Folge in X und sei $\mathcal{F}$ der Fréchetfilter von (x_n).

Dann konvergiert $\mathcal{F}$ genau dann gegen a, wenn (x_n) gegen a konvergiert.

Bemerkung

Nur falls X zusätzlich Hausdorffsch ist, so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt und die Schreibweise

$$\lim \mathcal{F} \;=\; a$$

ist zulässig.

10.4.6 Definition

Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{F}$ ein Filter in X.

$\mathcal{F}$ heißt ***Ultrafilter***, wenn es keinen Filter in X gibt, der feiner ist als $\mathcal{F}$.

Beispiel

Alle Hauptfilter sind Ultrafilter.

10.4.7 Satz 1

Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{F}$ ein Filter in X.

Dann gibt es einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ in X mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$.

10.4.8 Satz 2

Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{F}$ ein Filter in X.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter.

(2) Für alle $A, B \subset X$ mit $A \cup B \in \mathcal{F}$ folgt $A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$.

(3) Für alle $A \subset X$ gilt $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

10.4.9 Definition

Seien X, Y zwei nicht leere Mengen, sei $\mathcal{F}$ ein Filter in X und sei $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung.

Dann ist

$$f(\mathcal{F}) \;:=\; \{f(X) \mid X \in \mathcal{F}\}$$

eine Filterbasis und $\overline{f(\mathcal{F})}$ heißt der ***Bildfilter*** von $\mathcal{F}$ in Y.

Bemerkung

Im Allgemeinen ist $f(\mathcal{F})$ wirklich nur eine Filterbasis und noch kein Filter.

10.4.10 Satz 3

Der Bildfilter eines Ultrafilters ist ein Ultrafilter.

Beweis

Seien X, Y zwei nicht leere Mengen, sei $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung und sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter in X.

Ist nun $B \subset Y$ eine beliebige Teilmenge, so gilt nach Satz 10.4.8 entweder

(1) $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ oder **(2)** $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B) \in \mathcal{F}$.

Es muss also eine Fallunterscheidung durchgeführt werden:

(1) Es gilt

$$B \;\supset\; f(f^{-1}(B)),$$

somit ist $B \in \overline{f(\mathcal{F})}$.

(2) Es gilt

$$Y \setminus B \supset f(f^{-1}(Y \setminus B)),$$

somit ist $Y \setminus B \in \overline{f(\mathcal{F})}$.

Zu jeder Teilmenge $B \subset Y$ ist also auch das Bild im Bildfilter enthalten. □

10.4.11 Satz 4

Sei X ein topologischer Raum und sei $K \subset X$ nicht leer.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) K ist kompakt.

(2) Jeder Ultrafilter $\mathcal{F}$ in X mit $K \in \mathcal{F}$ konvergiert gegen ein $a \in K$.

10.4.12 Folgerung

Ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ im $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn es eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $A \in \mathcal{F}$.

Beweis

Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter im $\mathbb{R}^n$, der gegen a konvergiert. Die Menge $B_1(a) \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und es gilt $B_1(a) \in \mathcal{F}$.

Sei umgekehrt $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und A aus einem Ultrafilter $\mathcal{F}$. Dann ist $\overline{A}$ kompakt und nicht leer, also gibt es ein $a \in \overline{A}$, so dass $\mathcal{F}$ gegen a konvergiert. □

10.4.13 Satz 5

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter in $\mathcal{H}(M)$ und sei $A \subset \mathcal{H}(M)$ beschränkt mit $A \in \mathcal{F}$.

Dann konvergiert $\mathcal{F}$ gegen ein $f \in \mathcal{F}$.

10.4.14 Folgerung

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $A \subset \mathcal{H}(M)$.

Dann ist A unter der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathcal{H}(M)$ genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

Aus dieser Folgerung lässt sich nun der Beweis zum Satz von Montel führen.

10.5 Aufgaben

10.5.1 Aufgabe 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $b \in M$, sei $n \geq 0$ und sei

$$\varphi_n : \mathcal{H}(M) \to \mathbb{C} \qquad \text{mit} \qquad \varphi_n(f) \;=\; a_n,$$

wobei $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ die Potenzreihenentwicklung von f um b ist.

Zeige, dass dann φ_n unter der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz stetig ist.

Lösung

Die Abbildung φ_n ist genau dann stetig, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0 :\; \|f_1 - f_2\|_K < \delta \;\Rightarrow\; \|\varphi_n(f_1) - \varphi_n(f_2)\|_K < \varepsilon$$

für alle $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(M)$ und alle kompakten Mengen $K \subset M$ gilt.

Sei also $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta = \varepsilon r^n$ mit $r > 0$, so dass $B_r(b) \subset M$. Dann gilt nach den Cauchyschen Integralformel für Kreisscheiben gerade

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n(f_1) - \varphi_n(f_2)\|_K &= \|a_{1,1} - a_{2,1}\|_K \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial B_r(b)} \frac{f_1(\zeta) - f_2(\zeta)}{(\zeta - b)^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta \right\|_K \\
&= \sup_{\zeta \in B_r(b)} \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial B_r(b)} \frac{f_1(\zeta) - f_2(\zeta)}{(\zeta - b)^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \cdot L(\partial B_r(b)) \cdot \sup_{\zeta \in B_r(b)} \left| \frac{f_1(\zeta) - f_2(\zeta)}{(\zeta - b)^{n+1}} \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \sup_{\zeta \in B_r(b)} |f_1(\zeta) - f_2(\zeta)| \\
&= \frac{1}{r^n} \cdot \|f_1 - f_2\|_K \\
&< \frac{r^n}{1} \cdot \delta \;=\; \varepsilon.
\end{aligned}$$

10.5.2 Aufgabe 2

Sei X eine unendliche Menge.

Zeige, dass dann die Komplemente aller endlichen Teilmengen von X einen Filter $\mathcal{F}$ in X bilden.

Lösung

Es soll also gezeugt werden, dass

$$\mathcal{F} \;=\; \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ ist endlich}\}$$

einen Filter in X bildet. Dazu sind die vier Axiome zu prüfen:

(1) $\mathcal{F}$ ist nicht leer, da $X \setminus X = \emptyset$ endlich ist und somit $X \in \mathcal{F}$ gilt.

(2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, da $X \setminus \emptyset$ unendlich ist.

(3) Mit $A, B \in \mathcal{F}$ sind auch $X \setminus A$ und $X \setminus B$ endlich. Somit ist auch

$$X \setminus (A \cap B) \;=\; (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

endlich, also $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(4) Ist $A \in \mathcal{F}$ und $A \subset B \subset X$, dann ist $X \setminus A$ endlich und wegen

$$X \setminus B \subset X \setminus A$$

ist auch $X \setminus B$ endlich, also $B \in \mathcal{F}$.

10.5.3 Aufgabe 3

Sei $\mathcal{F}$ ein Filter in $\mathbb{R}$ und sei

$$\xi \;:=\; \inf\{x \in \mathbb{R} \mid]-\infty, x] \in \mathcal{F}\}$$

mit $\inf \emptyset = \infty$.

(1) Zeige, dass wenn $\mathcal{F}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, dass dann $\xi = a$ ist.

(2) Zeige, dass wenn $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter und $\xi \in \mathbb{R}$ ist, dass dann $\mathcal{F}$ gegen ξ konvergiert.

(3) Gibt Beispiele für $\mathcal{F}$ an, so dass $\xi = \infty$ bzw. $\xi = -\infty$ gilt.

Lösung Teil 1

$\mathcal{F}$ konvergiert also gegen ein $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ ist also feiner als der Umgebungsfilter

$$\mathcal{U}_a \;=\; \{U \subset \mathbb{R} \mid U \text{ ist Umgebung von } a\},$$

es gilt also $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}_a$.

Für jede Umgegung U von a gilt also $U \in \mathcal{F}$, somit ist $]-\infty, t] \in \mathcal{F}$ für alle $t > a$, es ist also

$$a \;=\; \xi \;=\; \inf\{x \in \mathbb{R} \mid]-\infty, x] \in \mathcal{F}\}.$$

Da $\mathbb{R}$ Hausdorffsch ist, ist dieser Grenzwert auch eindeutig bestimmt.

Lösung Teil 2

Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, gilt für alle $A \subset \mathbb{R}$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{F}$.

Für alle $a > \xi$ gilt $\xi \in]-\infty, a] \in \mathcal{F}$ und für alle $b < \xi$ gilt

$$\xi \ \in \ \mathbb{R} \setminus]-\infty, b] \ = \ ]b, \infty[\in \mathcal{F},$$

somit ist jede Umgebung von a auch Element von $\mathcal{F}$, somit konvergiert $\mathcal{F}$ nach Definition gegen ein $\xi \in \mathbb{R}$.

Lösung Teil 3

Sei $\mathcal{F} = \{\mathbb{R}\}$.

Dann ist $\mathcal{F}$ ein Filter in $\mathbb{R}$ und es gilt

$$\xi \ = \ \inf\{x \in \mathbb{R} \mid]-\infty, x] \in \mathcal{F}\} \ = \ \inf \emptyset \ = \ \infty.$$

Sei nun (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen $-\infty$ konvergiert, also zum Beispiel $x_n = -n$.

Sei weiter

$$\mathcal{F} \ = \ \overline{\{}F_n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{mit} \qquad F_n \ = \ \{x_k \mid k \geq n\}$$

der Fréchetfilter zu der Folger (x_n).

Dann ist $]-\infty, x] \in \mathcal{F}$ für beliebig kleine $x \in \mathbb{R}$, es gilt also $\xi = -\infty$.

11 Weiterführende Funktionentheorie

11.1 Automorphismengruppen

Seien M und N Teilmengen von $\mathbb{C}$.

Es soll nun untersucht werden, wieviele holomorphe und bijektive Funktionen

$$f : M \to N$$

es gibt. Es ist klar, dass die Menge

$$\mathrm{Aut}(M) \;=\; \{f : M \to N \mid f \text{ ist holomorph und bijektiv}\}$$

eine Gruppe bildet, sie heißt die ***Gruppe der Automorphismen*** von M. Es ist darauf zu achten, dass die Funktionen f aus $\mathrm{Aut}(M)$ nicht unbedingt linear sein müssen, stattdessen aber holomorph.

11.1.1 Satz 1

Die Gruppe der Automorphismen von $\mathbb{C}$ wird gebildet durch die Abbildungen

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad \text{mit} \qquad f(z) \;=\; az + b$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$.

Die Gruppe der Automorphismen von $\mathbb{C}$ kann auch noch auf die Menge $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ erweitert werden:

11.1.2 Möbiustransformationen

Sei also $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dann sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} f : \overline{\mathbb{C}} &\to \overline{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d}. \end{aligned}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $ad - bc \neq 0$ durch die Definition

$$f(z) \;=\; \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{falls} \quad z \in \mathbb{C},\; cz+d \neq 0 \\ \infty & \text{falls} \quad z \in \mathbb{C},\; cz+d = 0 \\ a/c & \text{falls} \quad z = \infty,\; c \neq 0 \\ \infty & \text{falls} \quad z = \infty,\; c = 0 \end{cases}$$

Automorphismen von $\overline{\mathbb{C}}$.

Diese Funktionen heißen ***Möbiustransformationen*** oder ***(gebrochen) lineare Transformationen*** in $\mathbb{C}$. Sie werden beschrieben durch eine Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}),$$

also durch eine 2×2 Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{C}$ und einer Determinante ungleich Null.

11.1.3 Satz 2

Seien

$$f(z) \;=\; \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{und} \qquad g(z) \;=\; \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

zwei Möbiustransformationen. Dann ist auch

$$(g \circ f)(z) \;=\; \frac{a''z+b''}{c''z+d''}$$

eine Möbiustransformation mit

$$\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

11.1.4 Folgerung

Die Möbiustransformationen von $\overline{\mathbb{C}}$ bilden also eine Gruppe.

11.1.5 Satz 3

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden und seien $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden.

Dann gibt es genau eine Möbiustransformationen f mit

$$f(z_k) \;=\; w_k \qquad \text{für} \qquad k = 1, 2, 3.$$

11.1.6 Beispiel 1

Sei f eine Möbiustransformationen mit

$$f(-1) \;=\; -1, \qquad f(0) \;=\; -1 \qquad \text{und} \qquad f(1) \;=\; 1.$$

Dann errät man

$$f(z) \;=\; \frac{z-i}{-iz+1}.$$

Für $\mathrm{Im}\, z > 0$ gilt $|f(z)| \leq 1$, denn es ist

$$f(z) \cdot \overline{f(z)} \;=\; \frac{z-i}{-iz+1} \cdot \frac{\overline{z}+i}{i\overline{z}+1} \;=\; \frac{|z|^2 - 2\mathrm{Im}\, z + 1}{|z|^2 + 2\mathrm{Im}\, z + 1} \;<\; 1,$$

somit wird die obere Halbebene der komplexen Zahlenebende in den Einheitskreis transformiert.

11.1.7 Beispiel 2

Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ und sei

$$f(z) \;=\; \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

eine Möbiustransformationen.

Für $|z| < 1$ gilt $|f(z)| < 1$ und für

$$f^{-1}(z) \;=\; \frac{z+a}{\overline{a}z+1}$$

gilt $f^{-1}(B_1(0) \subset B_1(0)$, somit ist f eine Automorphismus auf dem Einheitskreis $B_1(0)$.

Es gilt sogar der folgende Satz:

11.1.8 Satz 4

Alle Automorphismen auf dem Einheitskreis $B_1(0)$ werden gegeben durch

$$f_a(z) \;=\; e^{it} \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

mit $a \in B_1(0)$ und $t \in \mathbb{R}$.

11.2 Der Riemannsche Abbildungssatz

11.2.1 Definition

Seien $M, N \subset \mathbb{C}$ offen.

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt ***biholomorph***, wenn f holomorph und bijektiv ist.

11.2.2 Satz 1

Es gibt keine biholomorphe Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to B_1(0).$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Satz von Liouville.

11.2.3 Satz 2

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstellen.

Dann gibt es eine holomorphe Funktion g auf M mit

$$e^g \;=\; \exp \circ g \;=\; f.$$

11.2.4 Folgerung

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstellen.

Dann gibt es eine holomorphe Funktion g auf M mit

$$g^2 \;=\; f.$$

11.2.5 Definition

Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt ***offene Wurzelziehmenge***, wenn M offen ist und es zu allen holomorphen Funktionen auf M eine auf M holomorphe Funktion g gibt mit

$$g^2 \;=\; f.$$

Beispiel

Nach der Folgerung zuvor sind also zum Beispiel offene und einfach zusammenhängende Mengen M auch offene Wurzelziehmengen.

11.2.6 Satz 3

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine offene Wurzelziehmenge, sei $N \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : M \to N$ biholomorph.

Dann ist auch N eine offene Wurzelziehmenge.

11.2.7 Satz 4

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine offene Wurzelziehmenge und sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine injektive, holomorphe Funktion mit $f \neq 0$ und sei g eine Lösung von $g^2 = f$.

Dann ist auch g injektiv und es gilt

$$g(M) \cap (-g)(M) = \emptyset.$$

11.2.8 Lemma von Koebe

Sei $M \subset B_1(0)$ eine offene Wurzelziehmenge mit $0 \in M$ und $M \neq B_1(0)$.

Dann gibt es eine injektive und holomorphe Funktion $f : M \to B_1(0)$ mit $f(0) = 0$, für die gilt:

$$z \in M, \ z \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad |f(z)| > |z|.$$

Die Menge M kann also "aufgeblasen" werden, so dass sie aber immer noch im Einheitskreis liegt:

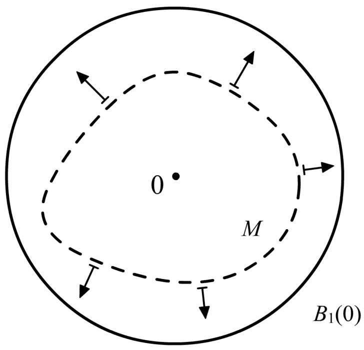


Abbildung 22: Zum Lemma von Koebel

11.2.9 Riemannscher Abbildungssatz

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine offene Wurzelziehmenge, die zusätzlich auch noch zusammenhängend ist, und für die $M \neq \mathbb{C}$ gilt.

Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung $f : M \to B_1(0)$.

Ist weiter ein $a \in M$ fest, dann gibt es genau eine biholomorphe Abbildung $f : M \to B_1(0)$ mit $f(a) = 0$ und $f'(a) > 0$.

11.2.10 Folgerung 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $M \neq \mathbb{C}$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) M ist einfach zusammenhängend.

(2) M ist eine offene Wurzelziehmenge.

(3) M ist biholomorph auf $B_1(0)$ abbildbar.

(4) Jedes $f \in \mathcal{H}(M)$ hat eine Stammfunktion.

(5) Die Abbildung $\exp : \mathcal{H}(M) \to \mathcal{H}(M)$ mit $\exp(f) = \exp \circ f$ ist surjektiv.

11.2.11 Folgerung 2

Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv, so ist f sogar bijektiv.

11.2.12 Folgerung 3

Sei $M \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend, einfach zusammenhängend und offen und sei $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv.

Dann ist auch $f(M)$ einfach zusammenhängend.

11.3 Partialbruchentwicklung

11.3.1 Problemstellung

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $P \subset M$ ohne Häufungspunkten in M.

Gibt man nun zu jedem $b \in P$ einen Hauptteil h_b vor, so ist

$$h_b : B_{r_b}(b) \setminus \{b\} \to \mathbb{C}$$

holomorph für ein $r_b > 0$ mit $B_{r_b} \subset M$.

Einen Hauptteil h_b vorgeben heißt dabei, dass man für jedes $b \in P$ gerade

$$h_b(z) \;=\; \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-b)^n$$

vorgibt.

Gesucht ist nun eine auf $M \setminus P$ definierte holomorphe Funktion f, so dass für alle $b \in P$ die Funktion

$$f - h_b$$

bei b eine hebbare Singularität hat. Ist P endlich, so ist

$$f(z) \;=\; \sum_{b \in P} h_b(z)$$

eine Lösung. Das Problem soll also nun für nicht endliche Mengen P untersucht werden.

Zunächst gilt folgendes Lemma:

11.3.2 Lemma

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $P \subset M$ ohne Häufungspunkten in M.

Dann ist P endlich oder abzählbar, also von der Form

$$P = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}.$$

11.3.3 Satz von Mittag-Leffler

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, sei $P \subset M$ ohne Häufungspunkten in M und sei für jedes $b \in P$ die Funktion h_b ein Hauptteil bei b.

Dann gibt es eine auf $M \setminus P$ definierte holomorphe Funktion f, so dass für alle $b \in P$

$$f - h_b$$

bei b holomorph ergänzbar ist.

Als Folgerungen aus diesem zentralen Ergebnis erhält man nun die Partialbruchentwicklung von verschiedenen Funktionen:

11.3.4 Beispiel 1

Sei $M = \mathbb{C}$, sei $P = \mathbb{Z}$ und sei

$$h_n(z) = \frac{1}{(z-n)^2} \qquad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dann kann man durch den Satz von Mittag-Leffler zeigen, dass

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi}{\sin^2 \pi z}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt.

Es handelt sich dabei um die Partialbruchentwicklung der Funktion $1/\sin z$.

11.3.5 Beispiel 2

Als weiteres Beispiel erhält man

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Es handelt sich dabei um die Partialbruchentwicklung der Funktion $\cot z$.

11.3.6 Beispiel 3

Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ so gewählt, dass sie linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind.

Sei weiter

$$L \;:=\; \mathbb{Z} \cdot \omega_1 + \mathbb{Z} \cdot \omega_2$$

das ***periodische Gitter*** zu ω_1 und ω_2.

Dann wird durch

$$\mathcal{P}(z) \;=\; \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert mit den Hauptteilen

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} \qquad \text{bei} \quad \omega \in L.$$

Diese Funktion heißt die ***Weierstraßsche*** $\mathcal{P}(z)$***-Funktion*** und es gilt

$$\mathcal{P}(z+\omega) \;=\; \mathcal{P}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus L$ und alle $\omega \in L$.

11.4 Produktentwicklung

11.4.1 Problemstellung

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen und sei $P \subset M$ ohne Häufungspunkten in M.

Bei der Produktentwicklung wurden zu jedem $b \in P$ ein Hauptteil h_b vorgegeben und daraus wurde eine holomorphe Funktion erzeugt. Nun soll eine Funktin $f(z)$ gefunden werden, die genau bei jedem $b \in P$ eine Nullstelle der Ordnung m_b hat.

Ist $P = \{b_1, .., b_n\}$ endlich und soll b_k eine Nullstelle der Ordnung m_k sein, so ist

$$f(z) \;=\; \prod_{k=1}^{n} (z - b_k)^{m_k}$$

eine Lösung. Das Problem soll also wieder für nicht endliche Mengen P untersucht werden.

Dazu wird zunächst die folgende Definition eingeführt:

11.4.2 Definition

Seien $b_n \in \mathbb{C}$.

Dann heißt das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergent, wenn es ein $d \geq 1$ gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=d}^{n} b_k \;<\; \infty$$

existiert und ungleich Null ist.

Es gilt genau dann $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n = 0$, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_k = 0$.

11.4.3 Rechenregel

Falls $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent ist, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

11.4.4 Satz 1

Das Produkt $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ist genau dann konvergent, wenn es $a_n \in \mathbb{C}$ gibt, so dass gilt:

(1) Die Summe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

(2) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq k$ gerade $b_n = e^{a_n}$ gilt.

Falls $k = 1$ ist, dann gilt also

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n \;=\; \exp \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

11.4.5 Satz 2

Seien $b_n \in \mathbb{C}$ mit $|b_n| < 1$.

Dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ genau dann konvergent, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\log(1 + b_n)|$ konvergent ist.

Dabei ist log der Hauptzweig des Logarithmus.

11.4.6 Folgerung

Falls die Summe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent ist, so konvergieren auch die Produkte

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \qquad \text{und} \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n).$$

Die Lösung des ursprünglichen Problems soll nun zunächst für $M = \mathbb{C}$ und einer Menge $P \subset \mathbb{C}$ ohne Häufungspunkten in $\mathbb{C}$ gelöst werden.

Dabei sei

$$P \;=\; \{b_0,\, b_1,\, b_2, \ldots\}$$

unendlich mit $|b_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ und $b_0 = 0$:

11.4.7 Weierstraßscher Produktsatz

Seien $b_n \in \mathbb{C}$ mit $b_0 = 0$ und $|b_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ und seien $m_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dann gibt es ganze Zahlen $k_n \geq 1$, so dass das Produkt

$$f(z) \;=\; z^{m_0} \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{b_n}\right)^{m_n} \cdot \exp\left(m_n \sum_{l=1}^{k_n} \frac{1}{l} \cdot \frac{z^l}{b_n^l}\right)\right]$$

lokal gleichmäßig gegen eine ganze Funktion f konvergiert.

f hat dann [höchstens] bei den b_n Nullstellen der Ordnung m_n.

Zusatz

Alle Funktionen mit den vorgegebenen Nullstellen sind von der Gestalt

$$f \cdot e^g$$

mit einer geeigneten ganzen Funktion g.

11.4.8 Allgemeiner Weierstraßscher Produktsatz

Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, seien $b_n \in M$ ohne Häufungspunkten in M und seien $m_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ für $n \geq 1$.

Dann gibt es eine auf M holomorphe Funktion f mit

$$f(z) \;=\; 0 \qquad \text{für} \qquad z \in \{b_1, b_2, ...\}.$$

Dabei ist b_n eine Nullstelle der Ordnung m_n.

11.4.9 Beispiel 1

Durch den Weierstraßschen Produktsatz lässt sich nun zeigen, dass gilt:

$$\sin \pi z \;=\; \pi z \cdot \prod_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \left(1-\frac{z}{n}\right) e^{z/n} \;=\; \pi z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

Es handelt sich dabei um die Produktentwicklung des Sinus.

11.5 Aufgaben

11.5.1 Aufgabe 1

Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein offenes Quadrat mit dem Mittelpunkt 0 und sei

$$f : B_1(0) \to K$$

eine biholomorphe Abbildung mit $f(0) = 0$.

Zeige, dass dann für alle $z \in B_1(0)$ gerade $f(iz) = if(z)$ gilt.

Lösung

Es gilt $f'(0) = a \neq 0$, da $f : B_1(0) \to K$ sonst bei 0 kein lokales Extrema hätte und somit nicht bijektiv sein könnte.

Sei nun

$$g : B_1(0) \to K/a \qquad \text{mit} \qquad g(z) \;=\; \frac{f(z)}{a}.$$

Dann ist auch g biholomorph und es gilt $g(0) = 0$ sowie $g'(0) = 1 > 0$. Sei weiter

$$h : B_1(0) \to K/a \qquad \text{mit} \qquad h(z) \;=\; \frac{1}{i} g(iz).$$

Dann ist auch h biholomorph, da das Quadrat K durch die Multiplikation mit i nur um $\pi/2$ gedreht wird. Es gilt auch wieder $h(0) = 0$ und $h'(0) > 0$.

Nach dem Riemannschen Abbildungssatz ist aber eine biholomorphe Abbildung in den Einheitskreis mit diesen Eigenschaften eindeutig bestimmt, somit folgt $g = h$, es gilt also

$$g(z) \;=\; \frac{1}{i} g(iz) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{f(z)}{a} \;=\; \frac{1}{i}\frac{f(iz)}{a},$$

somit gilt gerade $f(iz) = if(z)$ für alle $z \in B_1(0)$.

11.5.2 Aufgabe 2

Benutze die Produktentwicklung des Sinus um eine Produktdarstellung für

$$\textbf{(1)}\ \frac{\pi}{2} \qquad \text{und} \qquad \textbf{(2)}\ \sqrt{2}.$$

zu finden.

Lösung Teil 1

Die Produktentwicklung des Sinus ist

$$\sin \pi z \;=\; \pi z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Für $z = 1/2$ folgt also

$$\begin{aligned} 1 \;&=\; \sin \frac{\pi}{2} \;=\; \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \;=\; \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2 - 1}{4n^2}\right) \\ &=\; \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n+1)(2n-1)}{4n^2}\right). \end{aligned}$$

Somit gilt gerade

$$\frac{\pi}{2} \;=\; \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2}{(2n+1)(2n-1)}\right),$$

diese Darstellung von $\pi/2$ heißt auch ***Wallis Produkt***.

Lösung Teil 2

Für $z = 1/4$ gilt

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \;=\; \sin \frac{\pi}{4} \;=\; \frac{\pi}{4} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{16n^2}\right) \;=\; \frac{\pi}{4} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{16n^2 - 1}{16n^2}\right).$$

Somit folgt nun nach Teil **(2)** gerade

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \;&=\; \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{16n^2 - 1}{16n^2}\right) \\ &=\; \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2}{(2n+1)(2n-1)}\right) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{16n^2 - 1}{16n^2}\right) \\ &=\; \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2(4n+1)(4n-1)}{16n^2(2n+1)(2n-1)}\right) \;=\; \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(4n+5)(4n+3)}{4(2n+3)(2n+1)}\right). \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] Fischer, W., Lieb, I. (1994): "Funktionentheorie". 7. Auflage, Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden.

[2] Scholz, D. (2005): "Funktionentheorie". Vorlesungsmitschrift und Übungsaufgaben im SoSe 2005 bei Prof. H.S.Holdgrün, Universität Göttingen.

Index