Medianprobleme in der Ebene mit positiven und negativen Gewichten.

16. November 2005

Seminarvortrag von Daniel Scholz & Dörte Thoms

Beispiel 1

Existierende Standorte mit Gewichten und gauges

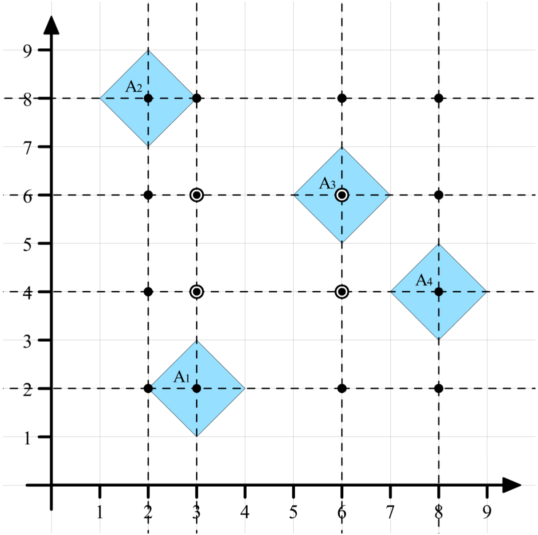
Es seien die vier existierenden Standorte

$$A_1 = (3,2), \quad A_2 = (2,8), \quad A_3 = (6,6) \quad \text{und} \quad A_4 = (8,4)$$

gegeben. Alle vier Standorte haben das Gewicht 1 und alle vier Standorte haben als gauge die Manhattan Norm, also

$$w_m = 1 \qquad \text{und} \qquad \gamma_m(x) = \|x\|_1 \qquad \text{für} \quad m = 1,..,4.$$

Beispiel 1



Beispiel 1

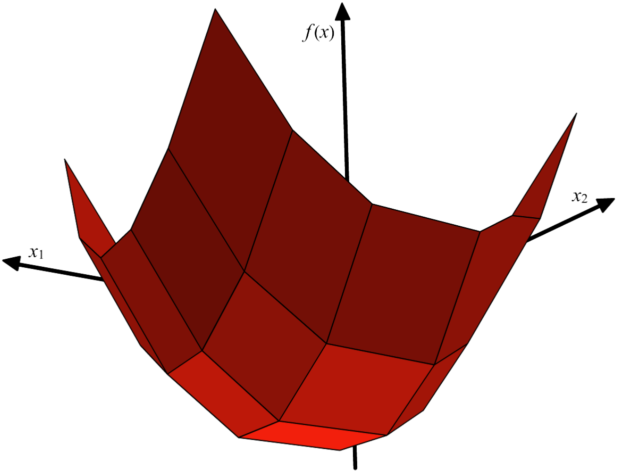
Zielfunktionswerte

$x \in I$	(2, 2)	(2, 4)	(2, 6)	(2, 8)	(3, 2)	(3, 4)	(3, 6)
$f(x)$	23	19	19	23	21	**17**	**17**
$x \in I$	(3, 8)	(6, 2)	(6, 4)	(6, 6)	(6, 8)	(8, 2)	(8, 4)
$f(x)$	21	21	**17**	**17**	21	25	21
$x \in I$	(8, 6)	(8, 8)					
$f(x)$	21	25					

Die optimalen Standorte befinden sich somit in einer gesamten Zelle:

$$X^*(f) \;=\; [3,6] \times [4,6] \subset \mathbb{R}^2.$$

Beispiel 1



Beispiel 2

Existierende Standorte und Gewichte

Es seien die drei existierenden Standorte

$$A_1 = (3,3), \qquad A_2 = (3,8) \qquad \text{und} \qquad A_3 = (7,5)$$

mit den Gewichten

$$w_1 = -1, \qquad w_2 = 0.9 \qquad \text{und} \qquad w_3 = 1$$

gegeben.

Es gilt $W = 0.9$, die optimalen Standorte $X^*(f)$ sind also begrenzt.

Beispiel 2

Gauges der existierenden Standorte

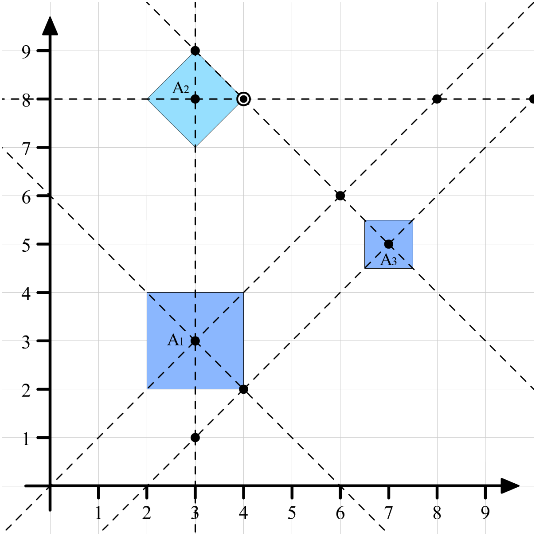
Jeder Standort besitzt einen eigenen gauge, welcher durch die Extrempunkte von B_m für $m = 1, .., 3$ gegeben wird:

$$\begin{aligned} \mathrm{ext}(B_1) &= \{(1,1), (1,-1), (-1,-1), (-1,1)\}, \\ \mathrm{ext}(B_2) &= \{(0,1), (1,0), (0,-1), (-1,0)\}, \\ \mathrm{ext}(B_3) &= \{(0.5,0.5), (0.5,-0.5), (-0.5,-0.5), (-0.5,0.5)\}. \end{aligned}$$

In diesem Falle gilt also gerade

$$\gamma_1(x) = \|x\|_\infty, \qquad \gamma_2(x) = \|x\|_1 \qquad \text{und} \qquad \gamma_3(x) = 2\|x\|_\infty.$$

Beispiel 2



Beispiel 2

Zielfunktionswerte

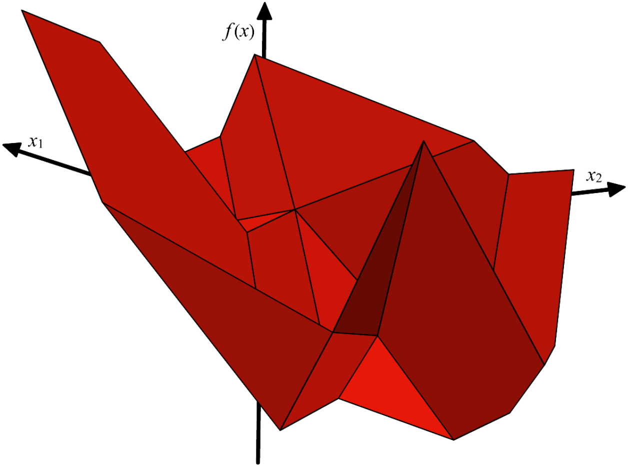
$x \in I$	(3, 1)	(3, 3)	(3, 8)	(4, 2)	(4, 8)	(6, 6)	(7, 5)
$f(x)$	12.3	12.5	3	11.3	**1.9**	3.5	2.3

$x \in I$	(8, 8)	(10, 8)	(−2, 8)	(3, 9)
$f(x)$	5.5	5.3	17.5	2.9

Die optimale Lösung ist ein einzelner Punkt:

$$X^*(f) \;=\; \{(4,\,8)\}.$$

Beispiel 2



Beispiel 3

Andere Gewichte

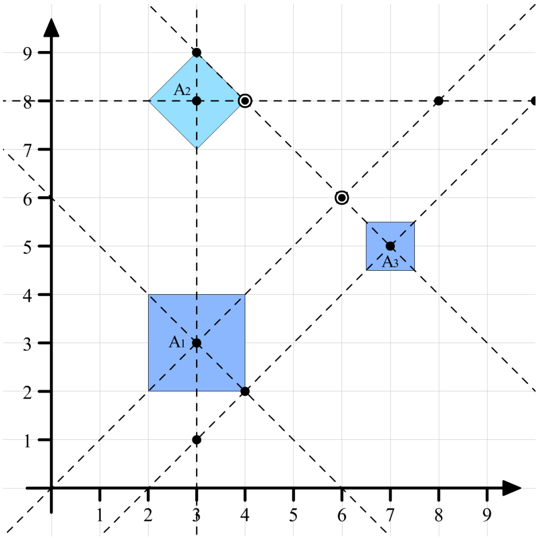
Nutzt man das gleiche Beispiel und verändert nur die Gewichte zu

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 1.5 \quad \text{und} \quad w_3 = 1,$$

dann liegen die optimalen Standpunkte alle auch der Kante einer Zelle:

$$X^*(f) = \{\lambda(4, 8) + (1 - \lambda)(6, 6) \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Beispiel 3



Beispiel 4

Existierende Standorte mit Gewichten und gauges

Es werden wieder die Standorte

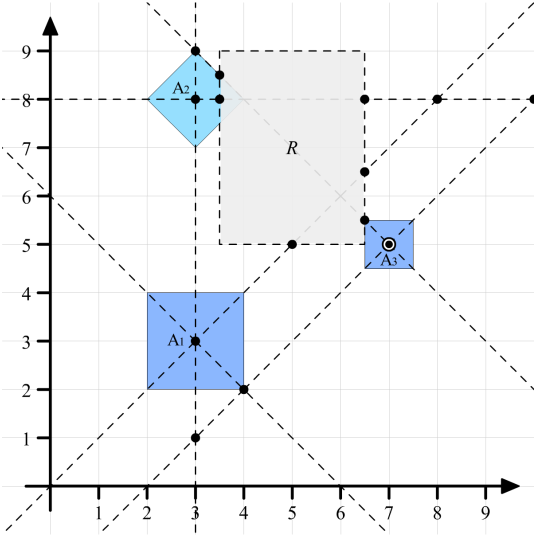
$$A_1 = (3,3), \qquad A_2 = (3,8) \qquad \text{und} \qquad A_3 = (7,5)$$

mit den gleichen Gewichten und gauges wie in Beispiel 2 verwendet.

Hinzu kommt nun das konvexe verbotene Gebiet

$$R = [3.5,\ 6.5] \times [5,\ 9]\,.$$

Beispiel 4



Beispiel 4

Zielfunktionswerte

x	(3, 1)	(3, 3)	(3, 8)	(4, 2)	(3.5, 8)	(3.5, 8.5)
$f(x)$	12.3	12.5	3	11.3	2.45	2.4
x	(7, 5)	(8, 8)	(10, 8)	(−2, 8)	(3, 9)	(5, 5)
$f(x)$	**2.3**	5.5	5.3	17.5	2.9	6.5
x	(6.5, 5.5)	(6.5, 6.5)	(6.5, 8)			
$f(x)$	2.9	4	4.15			

Die optimale Lösung ist nun der Punkt $A_3 = (7, 5)$:

$$X^*(f) \; = \; \{(7, 5)\}.$$

Beispiel 5

Existierende Standorte mit Gewichten und gauges

Es werden noch einmal die Standorte

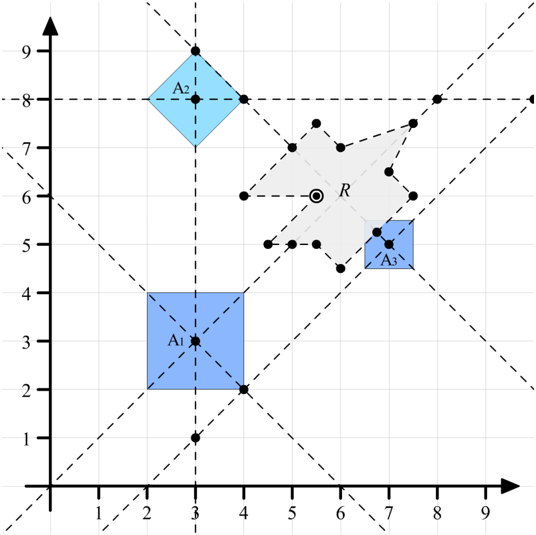
$$A_1 = (3, 3), \quad A_2 = (3, 8) \quad \text{und} \quad A_3 = (7, 5)$$

mit den gleichen gauges wie in Beispiel 2 verwendet, aber diesmal mit den Gewichten

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 1 \quad \text{und} \quad w_3 = 1.$$

Hinzu kommt nun ein polygonartiges verbotene Gebiet R, welches in der folgende Abbildung dargestellt wird.

Beispiel 5



Beispiel 5

Zielfunktionswerte

x	(3, 1)	(3, 3)	(3, 8)	(4, 2)	(4, 8)	(6.75, 5.25)
$f(x)$	17	13	13	14	12	10.75
x	(7, 5)	(8, 8)	(10, 8)	(−2, 8)	(3, 9)	(7.5, 6)
$f(x)$	11	16	20	28	15	13
x	(7, 6.5)	(7.5, 7.5)	(6, 7)	(5.5, 7.5)	(5, 7)	(5, 6)
$f(x)$	12.5	14.5	12	12.5	11	11
x	(5.5, 6)	(4.5, 5)	(5, 5)	(5.5, 5)	(6, 4.5)	
$f(x)$	**10.5**	11.5	11	11	11.5	

Literaturverzeichnis

H.W. Hamacher, S. Nickel (1994):
Combinatorial algorithms for some 1-facility median problems in the plane.
European Journal of Operational Research **79**, Seiten 340 bis 351.

S. Nickel, E. Dudenhöffer (1997):
Weber's Problem with Attraction and Repulsion under Polyhedral Gauges.
Journal of Global Optimization, Abstract **11**, Seiten 409 bis 432.

K. Klamroth (1997):
Single Facility Location Problems with barriers.
Springer Verlag Telos, Seiten 6 bis 14.