Medianprobleme in der Ebene mit positiven und negativen Gewichten

Seminarvortrag von Daniel Scholz und Dörte Thoms
am 16. November 2005

Wir untersuchen Probleme, bei denen zu bereits existierenden Standorten ein neuer Standort so gefunden werden soll, dass die Summe über den Abständen zu den bereits existierenden Standorten minimal ist. Die existierenden Standorte haben dabei alle ein positives oder negatives Gewicht und haben auch alle eine eigene Abstandfunktion, gegeben durch ihren gauge. Dabei untersuchen wir auch Probleme, bei denen verbotene Gebiete auftreten.

1 Einleitung

Durch $\{A_1, .., A_M\}$ sei eine endliche Menge von bereits existierenden Standorten im Raum $\mathbb{R}^2$ gegeben. Zu jedem Standort A_m gibt es ein Gewicht w_m mit $w_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und es sei $W = \sum_{m=1}^{M} w_m$.

Es soll nun ein neuer Standort gefunden werden, bei dem die Summe über den Abständen zu den einzelnen existierenden Standorten unter berücksichtigung der Gewichte minimal ist. Die ***Zielfunktion*** ist somit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) \;=\; \sum_{m=1}^{M} w_m d_m(A_m, x),$$

dabei beschreibt d_m die Abstandsfunktionen zu dem Punkt A_m und somit ist $d_m(A_m, x)$ der Abstand von A_m zu x.

Das Gebiet $F \subset \mathbb{R}^2$, über welchem Minimiert werden soll, heißt der ***zulässige Bereich***. Gilt $F = \mathbb{R}^2$, so beschreigt $X^*(f)$ die Menger der optimalen Lösungen. Wird ein zusammenhängende Menge $R \subset \mathbb{R}^2$ als verbotenes Gebiet definiert, so ergibt sich $F = \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Int}(R)$ und $X^*_R(f)$.

2 Normen und Gauges

2.1 Definition

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte und konvexe Menge mit $0 \in \mathrm{Int}(B)$. Der ***gauge***

$$\gamma_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

von $x \in \mathbb{R}^2$ zu B wird gegeben durch

$$\gamma_B(x) \;:=\; \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda B\}.$$

B heißt der ***Einheitskreis*** zum gauge γ.

Der Abstand $d(x, y)$ von x zu y wird durch

$$d(x, y) \;:=\; \gamma_B(y - x)$$

definiert. Da γ_B im Allgemeinen nicht symmetrisch ist, gilt auch anders als bei Normen $d(x, y) \neq d(y, x)$.

2.2 Satz

Jede Norm definiert auch einen gauge.

Ist B eine kompakte, konvexe und punktsymmetrische Menge, dann definiert der gauge γ_B auch eine Norm.

2.3 Satz

Sei γ_B ein gauge.

Dann ist $\gamma_B(x)$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ eine konvexe Funktion.

2.4 Polyedrische gauges

Sei γ_B ein gauge und sei B zusätzlich ein Polyeder. Dann heißt γ_B ***polyedrischer gauge***. Ist B auch noch symmetrisch, so ist γ_B eine Norm und heißt ***Blocknorm***. Die Vektoren zu den Extremspunkte

$$\mathrm{ext}(B) \;=\; \{e_1, \ldots, e_k\}$$

von B heißen ***Fundamentalvektoren*** von γ_B.

Die Halbgeraden $d_1, .., d_k$ mit

$$d_i \;=\; \{\lambda e_i \mid \lambda \geq 0\} \qquad \text{für} \quad i = 1, .., k$$

heißen die ***Fundamentalrichtungen*** von γ_B.

Es sei $e_{k+1} := e_1$ sowie $d_{k+1} := d_1$. Die Fundamentalvektoren e_g und e_{g+1} erzeugt dann durch

$$C(e_g, e_{g+1}) \;:=\; \{\alpha e_g + \beta e_{g+1} \mid \alpha, \beta \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

den ***Fundamentalkegel*** $C(e_g, e_{g+1})$.

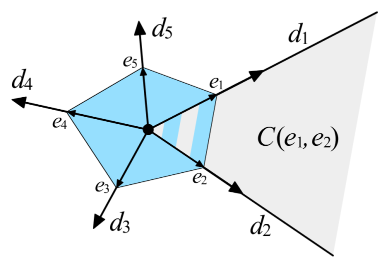

Abbildung 1: Fundamentalrichtungen und –kegel.

2.5 Satz

Sei γ_B ein polyedrischer gauge im $\mathbb{R}^2$ und sei $x \in \mathbb{R}^2$ mit

$$x = \lambda_g e_g + \lambda_{g+1} e_{g+1} \in C(e_g, e_{g+1})$$

im Fundamentalkegel von e_g und e_{g+1} enthalten.

Dann gilt

$$\gamma_B(x) = \lambda_g + \lambda_{g+1}.$$

2.6 Satz

Jeder polyedrische gauge γ_B im $\mathbb{R}^2$ ist linear über jedem Fundamentalkegel $C(e_g, e_{g+1})$.

3 Zielfunktion und Niveaumengen

Sei $\{A_1, .., A_M\}$ wieder eine endliche Menge von bereits existierenden Standorten im $\mathbb{R}^2$. Jeder Standort hat ein positives oder negatives Gewicht w_m und als Abstandsfunktionen besitzt jeder Standort einen eigenen polyedrischen gauge

$$\gamma_m(x) := \gamma_{B_m}(x).$$

Die Zielfunktion, welche nun stets minimiert werden soll, ist somit

$$f(x) = \sum_{m=1}^{M} w_m \gamma_m(x - A_m).$$

3.1 Satz

Sei $W := \sum_{m=1}^{M} w_m$. Dann gilt:

1. Für $W > 0$ sind die optimalen Standorte begrenzt.
2. Für $W < 0$ liegen die optimalen Standorte im Unendlichen.
3. Für $W = 0$ kann kein allgemeines Resultat angegeben werden.

3.2 Definition

Sei f die übliche Zielfunktion wie oben.

Die ***Niveaulinie*** von f bezüglich $z \in \mathbb{R}$ ist

$$L_=(z) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = z\}.$$

Die ***Niveaumenge*** von f bezüglich $z \in \mathbb{R}$ ist

$$L_\leq(z) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq z\}.$$

4 Medianproblemen ohne verbotene Gebiete

4.1 Definition

Zeichnet man die Fundamentalrichtungen zu den gauges γ_m für $m = 1, .., M$, so wird $\mathbb{R}^2$ in Zellen C unterteilt.

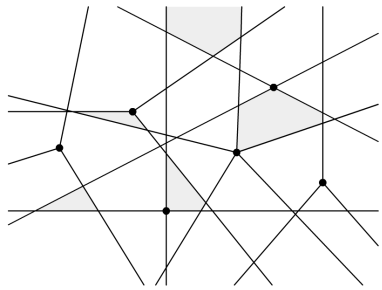

Abbildung 2: Beispiel einer Menge $\mathcal{C}$.

Die Menge aller Zellen wird mit $\mathcal{C}$ beschrieben.

4.2 Satz

Die Zielfunktion $f(x)$ mit polyedrischen gauges γ_m ist in jeder Zelle $C \in \mathcal{C}$ [affin] linear.

4.3 Satz

Für eine zusammenhängende Menge aus $X \subset X^*(f)$ mit dem Niveau $z \in \mathbb{R}$ gilt:

1. X ist eine komplette Zelle oder
2. X ist eine Kante einer Zelle oder
3. X ist ein Extrempunkt einer Zelle.

4.4 Definition

Sei

$$H := \bigcup_{m=1}^{M} \left(\bigcup_{g=1}^{G(m)} d_g^m \right) \subset \mathbb{R}^2,$$

dabei ist d_g^m eine Fundamentalrichtung von γ_m.

Die Menge H beschreibt also die Vereinigung von den Fundamentalrichtungen von den gauges γ_m der Standorte $A_1, .., A_M$.

Weiter sei I die Menge aller Schnittpunkte, die durch H erzeugt werden. Somit ist I auch die Menge aller Extrempunkte von allen Zellen.

5 Beispiel

Es seien die drei existierenden Standorte

$$A_1 = (3,3), \quad A_2 = (3,8) \quad \text{und} \quad A_3 = (7,5)$$

mit den Gewichten

$$w_1 = -1, \quad w_2 = 0.9 \quad \text{und} \quad w_3 = 1$$

gegeben.

Es gilt $W = 0.9 > 0$, die optimalen Standorte $X^*(f)$ sind also begrenzt.

Jeder Standort besitzt einen eigenen gauge, welcher durch die Extrempunkte von B_m für $m = 1,..,3$ gegeben wird:

$$\begin{aligned}\text{ext}(B_1) &= \{(1,1), (1,-1), (-1,-1), (-1,1)\},\\ \text{ext}(B_2) &= \{(0,1), (1,0), (0,-1), (-1,0)\},\\ \text{ext}(B_3) &= \{(0.5,0.5), (0.5,-0.5),\\ &\qquad (-0.5,-0.5), (-0.5,0.5)\}.\end{aligned}$$

In diesem Falle gilt also gerade

$$\gamma_1(x) = \|x\|_\infty, \quad \gamma_2(x) = \|x\|_1 \quad \text{und} \quad \gamma_3(x) = 2\|x\|_\infty.$$

Die folgende Abbildung soll das gegebene Beispiel verdeutlichen:

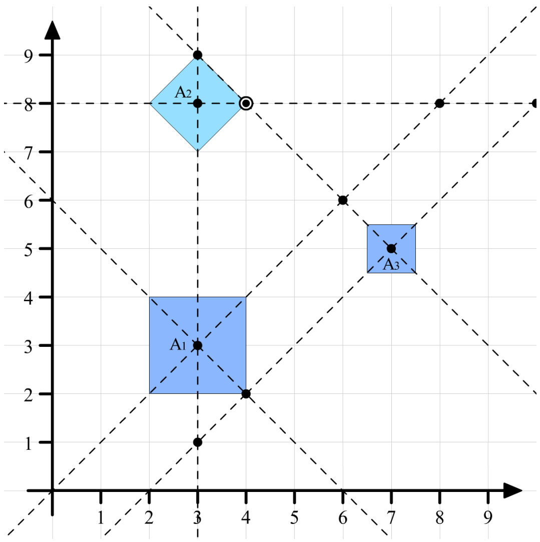

Abbildung 3: Standortproblem ohne verbotenem Gebiet.

Um die optimalen Standorte $X^*(f)$ zu finden, müssen nun die Extrempunkte aus I untersucht werden:

$x \in I$	(3, 1)	(3, 3)	(3, 8)	(4, 2)	(4, 8)	(6, 6)
$f(x)$	12.3	12.5	3	11.3	**1.9**	3.5
$x \in I$	(7, 5)	(8, 8)	(10, 8)	(−2, 8)	(3, 9)	
$f(x)$	2.3	5.5	5.3	17.5	2.9	

Anhand der Tabelle erkennt man, dass die optimalen Lösungen aus einem einzelnen Punkt besteht:

$$X^*(f) = \{(4, 8)\}.$$

6 Medianproblemen mit verbotene Gebiete

6.1 Konvexe verbotene Gebiete

Sei R eine konvexes verbotenes Gebiet, sei $X^*(f) \cap F = \emptyset$ und sei $W > 0$.

Dann gibt es einen optimalen Standort $x^* \in X^*_R(f)$ mit $x^* \in H \cap \partial R$ oder mit $x^* \in I \cap F$.

6.2 Polygonartige verbotene Gebiete

Sei $R = P$ eine polygonartiges verbotenes Gebiet, sei $X^*(f) \cap F = \emptyset$, sei $W > 0$ und sei $V(P) = \{v_1, .., v_n\}$ die Menge aller Ecken von P.

Dann gibt es einen optimalen Standort $x^* \in X^*_R(f)$ mit $x^* \in H \cap \partial R$ oder mit $x^* \in I \cap F$ oder mit $x^* \in V(P)$.

6.3 Komplement von polygonartigen Mengen als verbotenes Gebiet

Sei P eine polygonartige Menge und sei dazu $V(P) = \{v_1, .., v_n\}$ die Menge aller Ecken.

Sei nun $R = \mathbb{R}^2 \setminus P$ das verbotene Gebiet, sei $W \neq 0$ und sei $X^*(f) \cap F = \emptyset$.

Dann gibt es einen optimalen Standort $x^* \in X^*_R(f)$ mit $x^* \in H \cap \partial R$ oder mit $x^* \in I \cap F$ oder mit $x^* \in V(P)$.

Literaturliste

[1] Hamacher, H.W., Nickel, S. (1994): "Combinatorial algorithms for some 1-facility median problems in the plane". European Journal of Operational Research 79, Seiten 340 bis 351.

[2] Klamroth, K. (2002): "Single Facility Location Problems with barriers". Seiten 6 bis 14. Springer Verlag Telos.

[3] Nickel, S., Dudenhöffer, E. (1997): "Weber's Problem with Attraction and Repulsion under Polyhedral Gauges". Journal of Global Optimization, Abstract 11, Seiten 409 bis 432.