Medianprobleme in der Ebene mit positiven und negativen Gewichten

Seminarvortrag von Daniel Scholz und Dörte Thoms
am 16. November 2005

Aufgabe 1

Es seien die drei Standorte

$$A_1 = (2,2), \qquad A_2 = (3,8) \qquad \text{und} \qquad A_3 = (7,4)$$

gegeben. Jeder dieser Standort besitzt einen eigenen gauge γ_m, welcher durch die Extrempunkte von B_m für $m = 1,..,3$ gegeben wird:

$$\begin{aligned} \operatorname{ext}(B_1) &= \{(0,1),\, (1,-1),\, (-1,-1)\}, \\ \operatorname{ext}(B_2) &= \{(0,1),\, (1,0),\, (0,-1),\, (-1,0)\}, \\ \operatorname{ext}(B_3) &= \{(2,1),\, (2,-1),\, (-2,-1),\, (-2,1)\}. \end{aligned}$$

Weiter seien die Standorte

$$X_1 = (2,5), \qquad X_2 = (6,7) \qquad \text{und} \qquad X_3 = (7,1)$$

gegeben.

(1) Zeichne die Standorte A_1 bis A_3 mit dem Einheitskreis des jeweiligen gauges in ein Koordinatensystem.

(2) Finde heraus, welcher gauge auch eine Norm ist und um welche Norm es sich dabei handelt.

(3) Zeichne nun auch X_1 bis X_3 in das Koordinatensystem und bestimme die Abstände von X_i zu A_m bezüglich des gauges γ_m für $i = 1, 2, 3$ und $m = 1, 2, 3$.

Aufgabe 2

Es seien die drei existierenden Standorte

$$A_1 = (3,3), \qquad A_2 = (6,6) \qquad \text{und} \qquad A_3 = (8,4)$$

mit den Gewichten

$$w_1 = 2, \qquad w_2 = 1 \qquad \text{und} \qquad w_3 = 1$$

gegeben. Diesen Standorten besitzen die folgenden gauges:

$$\gamma_1(x) = \|x\|_1, \qquad \gamma_2(x) = \|x\|_\infty \qquad \text{und} \qquad \gamma_3(x) = \frac{1}{2}\|x\|_\infty.$$

Weiter sei $R = [5,8] \times [1, 3.5]$ ein verbotenes Gebiet.

(1) Zeichne die Standorte A_1 bis A_3 mit dem Einheitskreis des jeweiligen gauges in ein Koordinatensystem.

(2) Bestimme H und I graphisch, also die Vereinigungen der Fundamentalrichtungen und deren Schnittpunkte.

(3) Zeichne das verbotene Gebiet R in das Koordinatensystem und bestimme die Schnittpunkte $H \cap \partial R$.

(4) Bestimme die Menge der optimalen Standorte $X^*(f)$ in $F = \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Int}(R)$, also

$$X^*(f) = \min_{x \in F} \sum_{m=1}^{3} w_m \gamma_m(x - A_m).$$