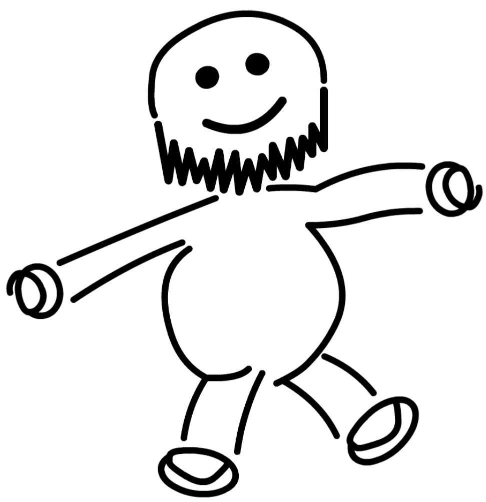
Physik I und II Kurzfassung



Daniel Scholz im Winter 2004 und Sommer 2005

Überarbeitete Version vom 20. Juli 2005.

Inhaltsverzeichnis

1 Mechanik

1.1 Mathematisches

Sinus und Cosinus

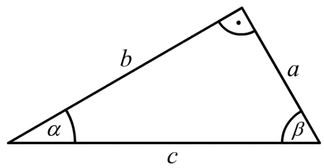


Abbildung 1

In einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$a = c \cdot \sin(\alpha) \qquad \text{und} \qquad b = c \cdot \cos(\alpha)$$

1.2 Fehlerberechnung

Mittelwert:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Standardabweichung empirisch:

$$s' = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{x'} - x_i\right)^2}$$

Standardabweichung:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{x} - x_i\right)^2}$$

Fehlerbalken:

$$\frac{s'}{\sqrt{n}}$$

Eine Messung ist im Fehlerbalken, wenn gilt:

$$|s - s'| < \frac{s'}{\sqrt{n}}$$

relativer Fehler:

$$\frac{s'}{\overline{x}}$$

Eine Messung ist gut, wenn für den relativen Fehler $< 1\%$ gilt.

1.3 Newtons Axiome

(Trägheit)

Kräftefreie Körper bewegen sich geradelinig gleichförmig.

(Aktion)

Es gilt stets die Bewegungsgleichung $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

(Reaktion)

Jede Kraft erzeugt eine Gegenkraft.

1.4 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichung ist

$$\vec{F} \;=\; m \cdot \vec{a}.$$

Es gilt

$$\vec{v}(t) \;=\; \frac{d\vec{r}}{dt} \;=\; \dot{\vec{r}} \qquad \text{und} \qquad \vec{a}(t) \;=\; \frac{d\vec{v}}{dt} \;=\; \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \;=\; \ddot{\vec{r}}$$

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist die Beschleunigung $\vec{a}$ konstant. Es gilt:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v_0} + \vec{a}t \\ \vec{r}(t) &= \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{aligned}$$

Gleichförmige Kreisbewegung

Eine gleichförmige Kreisbewegung ist eine Bewegung um ein Zentrum $(0, 0)$ mit dem Radius r und konstanter Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$. Es gilt:

$$\vec{r}(t) \;=\; \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega t) \\ r \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad F \;=\; |\vec{F}| \;=\; m\omega^2 r$$

Dabei zeigt $\vec{F}$ stets zum Zentrum und ω ist die Dreh- oder Kreisfrequenz. Es ist

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r} \quad \text{konstant}$$

mit der Umlaufzeit T.

Harmonisch Schwinung

Es sei $x_0 = x$ die maximale Auslengung einer Schwingung mit $v_0 = 0$. Dann gilt:

$$\vec{x}(t) = x \cdot \sin(\omega t) \qquad \Leftrightarrow \qquad F = |\vec{F}| = -m\omega^2 x = -Dx$$

Es ist

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \quad \text{konstant}$$

und $D = m\omega^2$ ist die Federkonstante.

1.5 Arbeit, Leistung, Energie, Impuls

Bewegungen sollen zeitunabhängig betrachtet werden.

Arbeit

$$W = \text{Kraft} \cdot \text{Weg} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{R} = \int_{Weg} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2}\right]$$

gemessen in

$$\left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2} = Nm = J = Watt\,s = Ws\right]$$

$\vec{F}(\vec{r})$ ist ein Kraftfeld, d.h. die Kraft $\vec{F}$ hängt vom Ort $\vec{r}$ ab.

Hängt die Arbeit nicht vom Weg ab, so heißt das Kraftfeld konvervativ oder homogen (Beispiel: Gravitationsfeld).

Für einen Weg $\vec{r}(t)$ auf dem Intervall $t \in [a, b]$ gilt:

$$W_{AB} = \int_{Weg} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_a^b \mathrm{d}t \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Leistung

$$P = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}} = \text{Kraft} \cdot \text{Geschwindigkeit} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

gemessen in

$$\left[\frac{kg \cdot m^2}{s^3} = \frac{Nm}{s} = \frac{Ws}{s} = Watt = W\right]$$

Energie

Kinetische und potentielle Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \qquad \text{und} \qquad E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

In konservativen Kraftfeldern gilt

$$E_{kin} + E_{pot} = k \quad \text{konstant,}$$

also ist $E_{kin} + E_{pot}$ zeitlich konstant, d.h. es gilt

$$\frac{d}{dt}\left(E_{kin} + E_{pot}\right) = 0.$$

Elastische Stöße

Die Energieerhaltung gilt nur bei elastischen Stößen, d.h. bei Massen, die sich nach einem Stoß sofort getrennt weiterbewegen.

Impuls

$$\vec{p} = \text{Masse} \cdot \text{Geschwindigkeit}$$

Der Gesamtimpuls

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

ist zeitlich konstant.

Elastische Stöße

Die Impulserhaltung gilt bei elastischen und unelastischen Stößen, d.h. auch bei Massen, die sich nach einem Stoß gemeinsam und ggf. deformiert weiterbewegen.

Schwerpunktsatz

Der Schwerpunkt (eines abgeschlossenen Systems) bewegt sich geradlinig und gleichförmig.

Drehimpuls

Ein Massepuntes P drehe sich um das Zentrum $(0,0,0)$. Wirkt auf P stets eine nach Z gerichtete Kraft, so heißt diese Zentralkraft.

Im Zentralkraftfeld ist der Drehimpuls

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \qquad \left[\frac{kg \cdot m^2}{s} = Nm \cdot s\right]$$

zeitlich konstant, d.h. es gilt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

Flächensatz

In gleicher Zeit wird vom Strahl $\overline{ZP}$ stets die gleiche Fläche überstrichen.

1.6 Pendel

Für einen Massepunkt m an einem masselosem Faden der Länge l gilt:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Die Schwingungsdauer T ist also unabhängig von m und proportional zu $\sqrt{l}$.

Ist das Pendel mit dem Winkel $\varphi < \pi/2$ ausgelenkt, so gilt

$$x = l \cdot \sin(\varphi).$$

Für die Bewegungsgleichung gilt

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}(t) &= \sin(\omega t) \cdot g \\ \vec{r}(t) &= -\frac{1}{\omega^2} \sin(\omega t) \cdot g + v_0 t + r_0, \end{aligned}$$

dabei $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Für sehr kleine Winkel ist die Rückstellkraft annähernd proportional zur Auslenkung.

1.7 Reibung

Bewegt sich ein Körper im Fluid (Flüssigkeit oder Gas), so spricht man von Stokes Reibung. Es gilt

$$\text{Bremskraft} \sim v.$$

Beispiel:

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = -mg - \alpha v$$

1.8 Kepler Gesetze

(1) Planeten bewegen sich auf Ellipsen, die Sonne liegt im Brennpunkt.

(2) Es gilt der Flächensatz: In gleicher Zeit wird gleiche Fläche überschritten.

(3) Die Quadrate der Umlaufzeiten (T_1, T_2) von Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Bahnachsen (a_1, a_2) zueinander:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

1.9 Zweikörperproblem

Schwerpunktvektor:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Effektive oder reduzierte Masse:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Ellipsen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hyperbeln:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit den Brennpunkten

$$F_{1,2} = \left(\pm\sqrt{a^2 + b^2},\, 0\right)$$

Gravitation

Gravitationskonstante:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-1} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

Für zwei Körper der Massen m_1 und m_2 sowie dem Abstand r gilt:

$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

1.10 Potential

Das Potential $U(\vec{r})$ ist die potentielle Energie in Abhängigkeit des Ortes. Es gilt:

$$\vec{F}(\vec{r}) \;=\; -\vec{\nabla}U(\vec{r})$$

Drehimpulserhaltung

Der Drehimpuls ist erhalten, wenn

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \;=\; \vec{r}\times\vec{F} \;=\; \vec{0}$$

gilt.

Flächensatz

Die Flächengeschwindigkeit ist konstant, wenn

$$\frac{F}{dt} \;=\; \frac{1}{2}\left|\vec{v}\times\vec{r}\right| \;=\; \frac{1}{2m}\left|\vec{m}v\times\vec{r}\right| \;=\; \frac{1}{2m}\left|\vec{L}\right| \;=\; 0$$

gilt.

Effektives Potential

Stellt man den Vektor $\vec{r}$ in den Polarkoordinaten

$$\vec{r} \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}$$

dar, so gilt

$$|\vec{L}| \;=\; m\,r^2\dot{\varphi}.$$

Für die Energie gilt nun

$$\begin{aligned} E \;&=\; E_{kin}+E_{pot} \;=\; \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2+U(\vec{r}) \;=\; \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\varphi}^2+\dot{r}^2\right)+U(\vec{r}) \\ &=\; \frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{\vec{L}^2}{2mr^2}+U(\vec{r}). \end{aligned}$$

Somit ist das effektive Potential

$$U_{eff} \;=\; \frac{\vec{L}^2}{2mr^2}+U(\vec{r}).$$

Bahnkurven

Ein Massepunkt bewegt sich auf einer geschloßenen Bahnkurve, wenn

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} \;=\; 0$$

gilt, wenn also Gravitations- und Zentrifugalkraft gleich groß sind.

1.11 Gedämpfte Schwingung

Es muss die DGL

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 \;=\; 0$$

gelöst werden. Man erhält

$$x(t) \;=\; A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t} \qquad \text{mit} \qquad \lambda_{1,2} \;=\; -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

als Lösungen.

Schwache Dämpfung ($\omega_0^2 > \gamma^2$)

Man erhält komplexe Lösungen für $\lambda_{1,2}$ und somit folgt:

$$x(t) \;=\; ae^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \delta) \qquad \text{mit} \qquad \omega_1 \;=\; \sqrt{\omega_0^2 - \gamma}$$

Starke Dämpfung ($\omega_0^2 < \gamma^2$)

Man erhält reelle Lösungen für $\lambda_{1,2}$ und somit folgt für große Zeiten:

$$x(t) \;=\; ae^{-\frac{1}{\tau}} \qquad \text{mit} \qquad \frac{1}{\tau} \;=\; \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \;>\; 0$$

τ heißt Relaxationszeit oder Abklingzeit.

Kritische Dämpfung ($\omega_0^2 = \gamma^2$)

Es gilt $\lambda_1 = \lambda_2$ und somit folgt:

$$x(t) \;=\; ae^{-\gamma t} + ate^{-\gamma t}$$

1.12 Erzwungene Schwingung

Wird ein System mit einer Schwingfrequenz ω_0 durch eine äußere periodische Kraft mit der Kreisfrequenz ω angetrieben, so erhält man folgende DGL:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 \;=\; F \cdot \cos(\omega t)$$

Es gilt:

(1) Auch das System schwinkt nach gewisser Einschwingzeit mit der Frequenz ω der antreibenden Kraft.

(2) Bei langsamer Anregung schwingen System und Anreger in gleicher Phase, bei schneller Anregung genau um π Phasenverschoben.

(3) Gilt $\omega_0 = \omega$, so ist die Phasenverschiebung genau $\pi/2$.

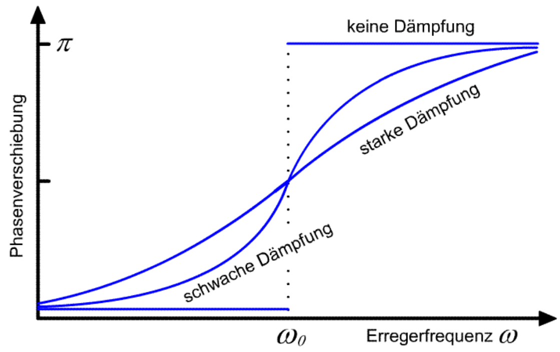


Abbildung 2

(4) Ist $\omega_0 \approx \omega$, so ist die Amplitude der Schwingung am größten, man spricht von Resonanz.

(5) Gilt $\omega_0 = \omega$ und ist die Erregerfrequenz stärker als die Reibung im System, so wird die Amplitude größer und größer, bis so viel Energie im System ist, das es sich selbst zerstört. Man sprich von Resonanzkatastrophe.

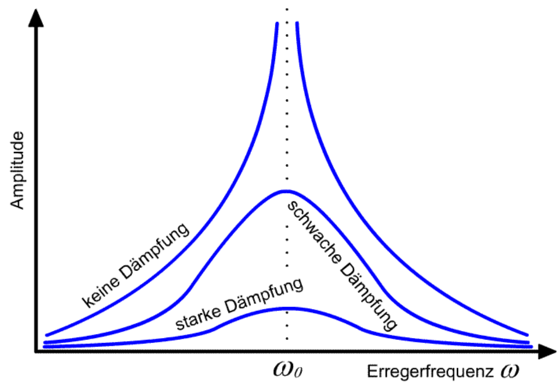


Abbildung 3

1.13 Schwingungen und Schwebung

Die Überlagerung zweier Schwingungen

$$x_1(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_1 t) \qquad \text{und} \qquad x_2(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_2 t)$$

mit gleicher Auslenkung x_0 (ohne Phasenverschiebung) ergibt:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2x_0 \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

Durch Überlagerung zweier Schwingungen mit gleicher Amplitude und geringem Frequenzunterschied entsteht eine Schwebung. Sind die Schwingungfrequenzen der beiden Schwingungen T_1 und T_2, so gilt für die Schwebungsfrequenz:

$$T_s = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}$$

1.14 Bewegte Bezugssysteme

Bewegt sich ein kräftefreier Körper stets geradlinig gleichförmig, so bewegt es sich in einem Intertialsystem (IS), andernfalls in einem bewegten Bezugssystem (KS).

Galilei Transformation

$$\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t) + \vec{v}_0 \cdot t$$

Bewegte Bezugssysteme

$$\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t) + \vec{a}(t)$$

Rotierende Bezugssysteme

Bewegt sich ein Körper in einem rotierenden Bezugssystem, so scheint dem mitrotierenden Beobachter eine senkrecht zur Richtung der Drehachse und senkrecht zur Geschwindigkeit Kraft anzugreifen, der Corioliskraft.

Es gilt:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \underbrace{2m(\dot{\vec{r}} \times \vec{\omega})}_{\text{Corioliskraft}} + \underbrace{m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}}_{\text{Zentrifugalkraft}}$$

1.15 Starre Körper

Ein starrer Körper der Masse M ist ein aus N Massepunkten m_i bestehnder Körper, bei dem die Abstände aller Massepunkten untereinander zeitlich konstant sind.

Der Schwerpunktsvektor ist somit

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i.$$

Freiheitsgrad

Man benötigt 6 Größen, um einen starren Körper eindeutig festzulegen, nämlich 3 für den Schwerpunktsvektor und 3 für die Winkel des ortsfesten bewegten Bezugssystem im Körper.

Man spricht von 6 Freitheitsgraden.

Drehmoment bei Rotationsbewegung

Der Drehmoment ist die zeitliche Änderung des Drehimpules:

$$\vec{M} \;=\; \vec{r} \times \vec{F} \;=\; \dot{\vec{L}}$$

Trägheitsmoment bei Rotationsbewegung

$$J \;=\; \sum_{i=1}^{N} r'^2 m_i \;=\; \int r'^2 \,\mathrm{d}m \;=\; \int r'^2 \varrho \,\mathrm{d}V \qquad [kg \cdot m^2]$$

Beispiele für Trägheitsmomente:

(1) Kreisscheibe mit Radius R, Achse ist Symmetrieachse:

$$J \;=\; \frac{1}{2} M R^2$$

(2) Kugel mit Radius R, Achse durch Mittelpunkt:

$$J \;=\; \frac{2}{5} M R^2$$

(3) Stab mit Länge L, Achse senkrecht zum Stabende:

$$J \;=\; \frac{1}{3} M L^2$$

(4) Stab mit Länge L, Achse senkrecht zur Stabmitte:

$$J \;=\; \frac{1}{12} M L^2$$

Trägheitsmoment als Rotationskörper

Das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers mit einer Symmetrieachse kann als Rotationskörper aufgefasst werden. Entsteht der Körper durch Rotation der Funktion $f(x)$ entlang der Drehachse um die y Achse, so ergibt sich das Trägheitsmoment

$$J \;=\; \varrho \int r'^2 \,\mathrm{d}V \;=\; \varrho \cdot 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot x^3 \,\mathrm{d}x$$

mit geeigneten Grenzen a und b.

Steinersche Satz

Sei $J_{A'}$ das Trägheitsmomente eines Körpers der Masse M bezüglich der Achse A' durch den Schwerpunkt, sei A eine zu A' parallele Achse und sei a der Abstand von A' und A. Dann gilt

$$J_A \;=\; J_{A'} + M \cdot a^2.$$

Winkelgeschwindigkeit bei Rotationsbewegung

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ hat stets die Richung der Drehachse. Es gilt:

$$d\vec{r} \;=\; d\varphi \times \vec{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} \;=\; \vec{v} \;=\; \frac{d\varphi}{dt} \times \vec{r} \;=\; \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Für den Drehimpuls gilt somit bei Rotation um die Symmetrieachse

$$\vec{L} \;=\; J \cdot \vec{\omega}.$$

Trägheitsmoment als Tensor bei Rotationsbewegung

Der Drehimpuls $\vec{L}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ sind nur bei Rotation um die Symmetrieachse parallel und einfach zu berechnen.

Andernfalls kann man das Trägheitsmoment als Tensor darstellen, in diesem Falle also eine symmetrische 3×3 Matrix.

Für den Trägheitstensor gilt dann

$$\overset{\leftrightarrow}{J} \;=\; \int \varrho \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}V.$$

Bei einer symmetrischen 3×3 Matrix gibt es stets 3 Eigenvektoren.

Die Drehachsen in Richtung der Eigenvektoren heißen Hauptträgheitsachsen und verändern den Trägheitsmoment bei Rotation um diese Achse nicht.

Beispiel

Bei einem Würfel der Gesamtmasse von 12 kg und der Kantenlänge von 1 m ergibt sich folgender Trägheitstensor:

$$\overset{\leftrightarrow}{J} \;=\; \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat den Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Eigenvektor, bei der Drehachse durch zwei Eckpunkte des Würfels ändert sich das Trägheitsmoment also nicht.

Rotationsenergie bei Rotationsbewegung

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

Vergleich Translation und Rotation

Eine Translation ist eine fortschreitende Bewegung, eine Rotation ist eine Drehbewegung. Die physikalischen Größen der Translation und der Rotation entsprechen sich gegenseitig:

	Translation	Rotation
	Masse m	Trägheitsmoment J
Ort	$\vec{r}$	$\vec{\varphi}$
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	$\vec{\omega}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$	$\dot{\vec{\omega}}$
Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$
	Kraft $\vec{F}$	Drehmoment $\vec{M}$
	Impuls $\vec{p}$	Drehimpuls $\vec{L}$
Bewegungsgleichung	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = J\dot{\vec{\omega}}$
	Impulserhaltung	Drehimpulserhaltung

1.16 Strömungen in Flüssigkeiten

Druck

Greift an einem Flächenstück A eine senkrechte Kraft F an, so herrscht ein Druck p:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{F}{A} \qquad \left[\frac{N}{m^2} = Pa = 10^{-5} bar\right]$$

Eine Flüssigkeitssäule der Höhe h und der Dichte ϱ übt auf den Boden den Druck $p = \varrho g h$ aus (Schweredruck).

Auftrieb

Die Auftriebskraft F_A, die auf einen Körpers in einer Flüssigkeitist wirkt, ist gerade $F_A = \varrho V g$. Dabei ist ϱV das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

Oberflächenspannung

Die Oberflächenenergie E_{Ob} ist proportional zur Oberfläche A:

$$E_{Ob} = \sigma \cdot A$$

Der Proportionalitätsfaktor σ heißt spezifische Oberflächenspannung.

Kapillarität

Eine Flüssigkeit steigt in einem Rohr mit dem Radius r um die Höhe

$$h = \frac{2\sigma}{\varrho r g}$$

an. Dabei ist ϱ die Dichte der Flüssigkeit.

Innere Reibung

Zwischen einer Platte der Fläche A und einer festen Wand befindet sich ein Flüssigkeitsfilm der Dicke z. Um die Platte mit der Geschwindigkeit v parallel zur Wand zu verschieben, benötigt man die Kraft

$$F = \eta \frac{Av}{z}.$$

Dabei ist η die Viskosität $\left[N \cdot s \cdot m^{-2}\right]$ der Flüssigkeit (Beispiel Wasser: $10^{-3}\, Nsm^{-2}$, Glyzerin: $1,5\, Nsm^{-2}$).

Laminare Röhrströmung

Auch in einem Rohr haften Flüssigkeiten am Rand und strömen in der Mitte am schnellsten. Eine derartige Strömung mit entscheidenden Reibungskräften heißt laminare Strömung.

Gesetzt von Hagen-Poiseuille

In einemn Rohr vom Radius R und der Länge l zwischen zwei Drücken p_1 und p_2 ist die Gesamtmenge Q einer durchströmenden Flüssigkeit gerade

$$Q = \dot{V} = \int_0^R 2\pi r v(r)\,\mathrm{d}r = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l}.$$

Bei gleichem Druckgefälle fließt durch ein Rohr mit doppelten Radius also 16 mal soviel Flüssigkeit.

Gesetzt von Stokes

Bewegt sich eine Kugel vom Radius r mit der Geschwindigkeit v durch eine Flüssigkeit, so wirkt die Kraft:

$$F = -6\pi\eta v r.$$

Dieses Gesetzt dient auch dazu, die Viskosität η zu messen.

Turbulente Strömung

Wenn selbst bei stationären Strömungen andere Größen mehr Einfluß haben als die Reibungskräfte, so heißt eine solche Strömung turbulent.

Strömungen idealer Flüssigkeiten

In idealen Flüssigkeiten können alle Reibungskräfte vernachlässigt werden.

Bei idealen Flüssigkeiten gilt die Kontinuitätsgleichung

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2,$$

das Produkt aus Röhrenquerschnittsfläche und Stömungsgeschwindigkeit ist also konstant.

Bernoulligleichung

Ist p_0 der Druck in einer ruhenden idealen Flüssigkeit (zum Beispiel der hydrostatischer Druck $\varrho g h$), dann gilt bei einer Geschwindigkeit v und einem Druck p dieser Flüssigkeit

$$p + \frac{1}{2}\varrho v^2 = p_0 = \text{konstant.}$$

Wirkt auf die Flüssigkeit nur der hydrostatische Druck, dann gilt also

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + p + \varrho g h = \text{konstant.}$$

Ausströmen aus einem Loch

Hat ein Flüssigkeitsgefäß ein kleines Loch um h unterhalb der Oberfläche und dort den Druck p, so spritzt nach Bernoulli ein Strahl mit der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\varrho}}$$

aus dem Gefäß. Dabei ist ϱ die Dichte der Flüssigkeit.

Besteht der Druck p nur aus dem Schweredruck, so gilt also

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Torricelli zeigte 1640: Es ist so, als sei die ausströmende Flüssigkeit aus der Höhe h gefallen.

Übersicht

Ist die Querschnittsfläche eines Rohres klein, so folgt aus der Kontinuität, dass die Fließgeschwindigkeit einer idealen Flüssigkeit groß ist. Nach Bernoulli ist in diesem Falle dann der Druck klein.

2 Wärmelehre

Die drei Grundgrößen der Wärmelehre sind

$$\begin{aligned} \text{Temperatur} \quad & T \quad [K], \\ \text{Druck} \quad & p \quad \left[\frac{N}{m^2} = \frac{kg}{s^2 \cdot m}\right], \\ \text{Volumen} \quad & V \quad \left[m^3\right], \end{aligned}$$

sowie die

$$\text{Dichte} \qquad n = \frac{\text{Teilchenanzahl}}{\text{Volumen}} = \frac{N}{V} \quad \left[\frac{1}{m^3}\right].$$

2.1 Temperatur

Die Temperatur ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie der Moleküle. Die genaue Definition ist

$$E = \frac{1}{2} m \langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{3}{2} k_b T$$

mit der Boltzmannkonstante $k_b = 1,381 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$.

2.2 Ideale Gase

Bei idealen Gasen gilt für Druck p, Temperatur T und Volumen V

$$\begin{aligned} p &\sim \frac{1}{V} && \text{bei} \quad T \text{ konstant,} \\ T &\sim p && \text{bei} \quad V \text{ konstant,} \\ V &\sim T && \text{bei} \quad p \text{ konstant.} \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit die Zustandsgleichung $p = n k_b T$ oder anders

$$p \cdot V = N \cdot k_b \cdot T.$$

Drückt man die Teilchenanzahl N in mol aus, so erhält man $v = \frac{N}{N_A}$ mit $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{\text{Teilchen}}{\text{mol}}$ und somit

$$p \cdot V = v \cdot R \cdot T,$$

dabei $R = N_A \cdot k_b = 8,31 \frac{J}{K \cdot \text{mol}}$.

Innere Energie

Die innere Energie eines idealen Gases ist

$$U = \frac{3}{2} N k_b T$$

und es ergibt sich somit $pV = \frac{2}{3}U$.

Barometrische Höhenformel

Sei ϱ_0 die Anfangsdichte und V_0 das Anfangsvolumen, sei p_0 der Anfangsdruck und sei h die Höhe. Dann gilt bei idealen Gasen die barometrische Höhenformel

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}} = p_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{p_0 V_0}}.$$

2.3 Wärmekapazität

Feiheitsgrade

Die Freiheitsgrade eines Moleküls setzt sich aus der Summe der Freiheitsgrade der Rotation, der Translation und der Schwingung zusammen. Vernachlässigt man die Schwingungen von Gasmolekülen, so erhält man für einatomarige Moleküle (He) den Freiheitsgrad 3, nämlich nur 3 Freiheitsgrade der Translation. Für geradlinige Moleküle (H_2, CO_2) erhält man den Freiheitsgrad 5, nämlich 3 für die Translation und 2 für die Rotation. Nur für nicht lineare Moleküle (H_20) erhält man alle 6 Freiheitsgrade.

Die Moleküle in einem homogenen Festkörper können nicht rotieren, aber dafür schwingen. Die Moleküle eines solchen Festkörpers haben also 6 Freiheitsgrade, 3 für die Translation und 3 für die potentielle Schwingung.

Wärmekapazität

Ein Molekül mit f Freiheitsgeraden enthält die mittlere Gesamtenergie

$$E = \frac{f}{2} k_b T.$$

Um einen homogenen Körper der Masse M bestehend aus Molekülen der Masse m um ΔT zu erwärmen, braucht man also die Energie

$$\Delta E = \frac{M}{m} \cdot \frac{f}{2} \cdot k \Delta T.$$

Dabei ist f die Anzahl der Feiheitsgraden der Moleküle und $\frac{M}{m}$ ist somit die Anzahl der Moleküle.

Das Verhältnis

$$C = \frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{Mf}{2m} k_b \qquad \left[\frac{J}{K}\right]$$

ist die Wärmekapazität des Körpers und bezogen auf $1\,kg$ ist

$$c = \frac{\Delta E}{M \Delta T} = \frac{f}{2m} k_b \qquad \left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$$

die spezifische Wärmekapazität dieses Körpers.

Regel von Dulong und Petit

Für ein mol eines Festkörpers ergibt sich somit die molare Wärmekapazität

$$C_{\text{mol}} = N_A \frac{f}{2} k_b = 3 N_A k_b = 24,9 \ \frac{J}{\text{mol} \cdot K}.$$

Dies ist ein Richtwert vor allem für schwere Elemente. Bei leichteren Körpern nehmen die Moleküle bei niedrigen Temperaturen keine Energie mehr auf, es kommt zur Einfrierung der Freiheitsgrade.

2.4 Erster Hauptsatz

Die innere Energie ΔU eines Systems ist die Summe aus der Wärmemenge ΔQ und der mechanischen Arbeit ΔW:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W.$$

Mechanische Arbeit ergibt eine Änderung des Volumens.

Bei konstanter Temperatur, also bei $\Delta Q = 0$, gilt stets

$$\Delta U = \Delta W = -p \cdot \Delta V.$$

Bei konstanten Volumen, also wenn keine mechanische Arbeit geleistet wird und $\Delta V = 0$ gilt, folgt

$$\Delta U = \Delta Q.$$

2.5 Zustandsänderungen

Alle folgenden Betrachtungen beziehen sich wieder nur auf ideale Gase, also gilt

$$p = \frac{N k_b T}{V} \qquad \text{und} \qquad U = \frac{3}{2} N k_b T.$$

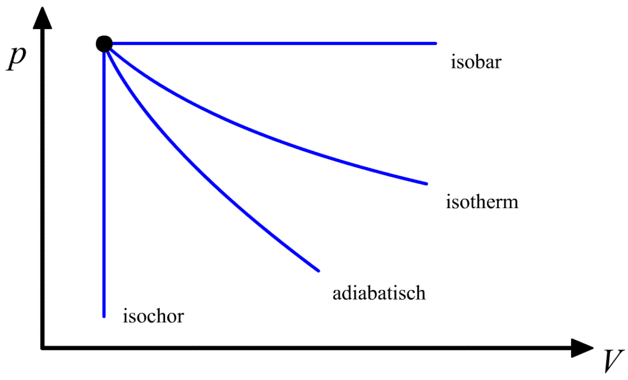


Abbildung 4

Isotherme Volumensänderung

Bei einer isothermen Volumensänderung ist die Temperatur T des Gases konstant.

Nach dem ersten Hauptsatz gilt $\Delta W = -p\Delta V$ und $\Delta Q = -\Delta W$. Es ergibt sich somit für die mechanische Arbeit

$$W \;=\; -\int_{V_0}^{V_1} p(V,T)\,\mathrm{d}V \;=\; -\,Nk_bT\cdot\log\left(\frac{V_1}{V_0}\right) \;=\; -\,Q.$$

Ist $W<0$, so findet eine Expansion und bei $W>0$ eine Kompression statt.

Adiabatischer Volumensänderung

Eine adiabatische Volumensänderung findet in einem thermisch abgeschlossenen System statt, das heißt das Gas kann keine Wärme aufnehmen, ändert aber seine Temperatur.

In dem gesamten System gilt $\Delta Q = Q = 0$ und somit $\Delta U = \Delta W$. Es ergibt sich für die mechanische Arbeit

$$W \;=\; \frac{3}{2}Nk_b\cdot\Delta T.$$

Es folgt

$$p \;=\; p_0\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\frac{5}{3}} \qquad\Leftrightarrow\qquad p\cdot V_1^{\frac{5}{3}} \;=\; \text{konstant}.$$

Isochore Volumensänderung

Bei einer isochoren Volumensänderung ist das Volumen V konstant.

Nach dem ersten Hauptsatz gilt nun wieder $\Delta U = \Delta Q + \Delta w = \Delta Q - p\Delta W = \Delta Q$, also $W=0$ und

$$Q \;=\; \frac{3}{2}Nk_b\cdot\Delta T.$$

Isobare Volumensänderung

Bei einer isobaren Volumensänderung ist der Druck p konstant.

Durch $\Delta W = -p\Delta V$ und $V_0 = \frac{Nk_bT_0}{p}$, $V_1 = \frac{Nk_bT_1}{p}$ sowie durch $Q = U - W$ ergibt sich

$$W = Nk_b(T_0 - T_1) \qquad \text{und} \qquad Q = \frac{5}{2}Nk_b(T_1 - T_0).$$

Übersicht

isotherm

T konstant, $V_0 \rightarrow V_1$.

$$\begin{aligned} W &= -nRT\log\left(\frac{V_1}{V_0}\right) \\ Q &= nRT\log\left(\frac{V_1}{V_0}\right) \end{aligned}$$

adiabatisch

$V_0 \rightarrow V_1$, $T_0 \rightarrow T_1$.

$$\begin{aligned} W &= \frac{3}{2}nR(T_1 - T_0) \\ Q &= 0 \end{aligned}$$

isochor

V konstant, $T_0 \rightarrow T_1$.

$$\begin{aligned} W &= 0 \\ Q &= \frac{3}{2}nR(T_1 - T_0) \end{aligned}$$

isobar

p konstant, $V_0 \rightarrow V_1$, $T_0 \rightarrow T_1$.

$$\begin{aligned} W &= nR(T_0 - T_1) \\ Q &= \frac{5}{2}nR(T_1 - T_0) \end{aligned}$$

2.6 Carnot Prozess

Der Carnot Prozess beschreibt eine zyklisch arbeitende Wärmekraftmachine. Es soll dabei Wärme in mechanische Arbeit umgewandelt werden. Dies geschieht in vier Schritten:

(1) isotherme Expansion

(2) adiabatische Expansion

(3) isotherme Kompression

(4) adiabatische Kompression

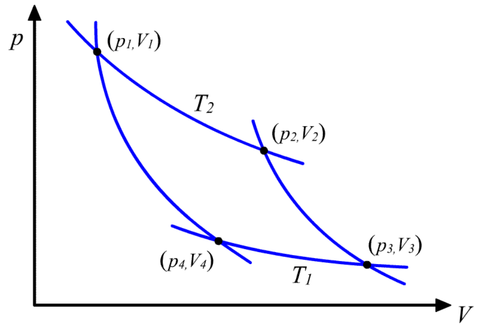


Abbildung 5

Für den Carnot Prozess ergibt sich der Wirkungsgrad

$$\eta \;=\; \frac{W_{\text{ges}}}{Q_{T_1}} \;=\; \frac{T_2 - T_1}{T_2} \;=\; 1 - \frac{T_1}{T_2} \qquad \text{mit} \qquad T_1 < T_2.$$

Es gibt keine Machine, die einen besseren Wirkungsgrad hat als der des Carnot Prozesses.

2.7 Entropie

Ein Vorgang, die nur in die Hinrichtung verlaufen kann, heißt irreversibel.

Kann ein Vorgang hingegen in Hin- und Rückrichtung verlaufen, so heißt er reversibel.

Die Entropie ist ein Maß für die Unordnung. Es gilt

$$dU \;=\; dQ + dW \;=\; TdS - pdV.$$

3 Elektrostatik

3.1 Grundlagen

Coulombsches Gesetz

Experimentell gilt für die Kraft zwischen ruhenden geladenen Körpern:

(1) $|\vec{F}| \sim \frac{1}{r^2}$.

(2) $\vec{F} \sim \frac{\vec{r}_2 \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$.

(3) $|\vec{F}| \sim q_1$ und $|\vec{F}| \sim q_2$.

(4) Ist $q_1 q_2 > 0$, so stoßen sich die Körper ab, und ist $q_1 q_2 < 0$, so ziehen sie sich an.

Daraus ergibt sich nun das Coulombsche Gesetz

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3},$$

dabei sind q_1 und q_2 die Ladungen in Coulomb $[C]$ und $\varepsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12}\, As/Vm$ ist die sogenannte Influenzkonstante.

Elektrisches Feld

Eine Ladung verändert den Raum, unabhängig von einer zweiten Ladung.

Sei $q_1 = q$ im Ursprung und sei $q_2 = q_{test}$ eine Testladung. Dann ist das elektrische Feld von q gerade

$$\vec{E}(\vec{r}) := \frac{\vec{F}_{21}}{q_{test}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \qquad \left[\frac{N}{C}\right].$$

Für eine Ladung im Ursprung gilt weiter

$$\text{Linienstrom} = \frac{\text{Zahl der Linien}}{\text{Kugeloberfläche}} = \frac{\text{Zahl der Linien}}{4\pi R^2} \sim \frac{1}{R^2}.$$

Feldlinien eines elektrischen Feldes verlaufen immer von positiven zu negativen Ladungen.

Superpositionsprinzip

Das Gesamtfeld $\vec{E}(\vec{r})$ von N Punktladungen ist die Vektorsumme der einzelnen Felder:

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}.$$

Beispiel Dipol

Für einen Dipol mit einer positiven Ladung q bei $(a,0,0)$ und einer negativen Ladung $-q$ bei $(-a,0,0)$ gilt gerade

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{\vec{r}-a\vec{e}_x}{|\vec{r}-a\vec{e}_x|^3} - \frac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3} \right).$$

Skizziert sieht das Feld folgendermassen aus:

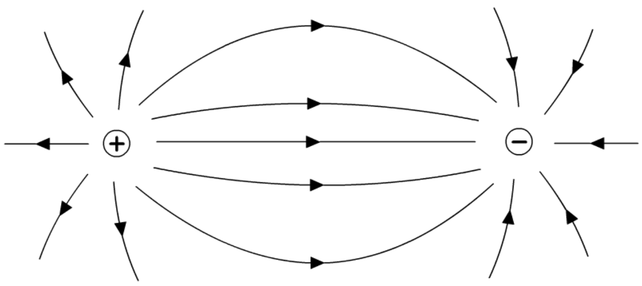


Abbildung 6

3.2 Arbeit und Potential

Elektrisches Potential

Befindet sich eine Ladung im Ursprung und soll eine Testladung in dem elektrischen Feld von a nach b bewegt werden, so muss Arbeit vollrichtet werden. Der Betrag der Arbeit ist unabhängig von der Wahl des Weges von a nach b, da die Arbeit entlang eines Kreisbogens um den Ursprung gleich 0 ist.

Somit erhält man für das elektrische Potential $\phi(\vec{r})$ gerade

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}).$$

Befindet sich eine Ladung q im Ursprung, dann gilt

$$\phi(\vec{r}) \;=\; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r}|} \qquad \text{und} \qquad \vec{E}(\vec{r}) \;=\; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

Befindet sich eine Ladung q am Ort $\vec{r}_1$, dann gilt

$$\phi(\vec{r}) \;=\; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \qquad \text{und} \qquad \vec{E}(\vec{r}) \;=\; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}.$$

Nach dem Superpositionsprinzip gilt nun für N Punktladungen

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

Beispiel Dipol

Für einen Dipol mit einer positiven Ladung q bei $(a, 0, 0)$ und einer negativen Ladung $-q$ bei $(-a, 0, 0)$ gilt gerade

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} - \frac{1}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|} \right).$$

Spannung

Da die Arbeit nicht vom Weg abhängt, gilt für diese auch

$$W_{ab} = -\int_a^b \vec{E}\,\mathrm{d}s = \int_a^b (\vec{\nabla}\phi)\,\mathrm{d}s = \phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a).$$

Diese Potentialdifferenz ist die Spannung U zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Volt $[V]$.

3.3 Ladungsdichten

(1) Lineare Ladungsdichte $\lambda(x)$ in C/m:

$$\phi(x) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_c \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_x|}\,\mathrm{d}x.$$

(2) Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$ in C/m^2:

$$\phi(x) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_A \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_x|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) Volumenladungsdichte $q(x, y, z)$ in C/m^3:

$$\phi(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_x|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

δ Funktion

Seien x_i für $i = 1, .., M$ alle Nullstellen von $h(x)$.

Dann gilt für die δ Funktion

$$\delta(h(x)) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\delta(x - x_i)}{|h'(x_i)|} \qquad \text{und} \qquad f(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) f(x)\,\mathrm{d}z.$$

Beispiel

Es soll nun für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(a(x-x_0))\,\mathrm{d}x$$

berechnet werden.

Sei dazu $h(x) = a(x-x_0)$, dann gilt $h'(x) = a$ und $h(x) = 0$ nur für $x = x_0$. Somit folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(a(x-x_0))\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{|a|}f(x_0).$$

3.4 Elektrischer Fluss

Für den elektrischen Fluss ψ durch eine geschlossene Oberfläche S gilt

$$\psi \;:=\; \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}a,$$

dabei ist $\vec{n}$ der nach außen gerichtete Normalenvektor des Flächenstücks $\mathrm{d}a$.

Beispiel Kugel

Bei einer Kugel mit dem Radius R gilt somit

$$\begin{aligned}\psi \;&=\; \int_{\text{Kugel}} \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}a \;=\; \int_{\text{Kugel}} \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\vec{e}_r\,\mathrm{d}a\\ &=\; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int_{\text{Kugel}} \mathrm{d}a \;=\; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot 4\pi R^2 \;=\; \frac{q}{\varepsilon_0}.\end{aligned}$$

Es gilt sogar:

Gaußsches Gesetz

$$\psi \;=\; \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}a \;=\; \sum_{\vec{r}_i\in V_s}\frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

Der elektrische Fluss ψ, der durch die geschlossene Oberfläche S hervorquillt, ist proportional zur Summe der Ladungen q_i, die innerhalb dieser Fläche sitzen.

Bei einer homogenen Ladungsverteilung mit der Volumenladungsdichte q gilt somit

$$\psi \;:=\; \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}a \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V q\,\mathrm{d}V.$$

Beispiel Flächenladungsdichte

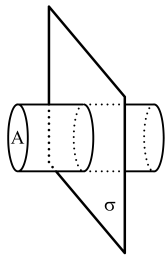


Abbildung 7

Für den elektrischen Fluss durch einen Zylinder mit der Boden- bzw. Deckelfäche A, der eine homogene Platte der Flächenladungsdichte σ senkrecht einschließt, gilt

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}a \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V q\, \mathrm{d}V.$$

Da das elektrische Feld $\vec{E}$ in Richtung von $\vec{n}$ steht, folgt

$$\underbrace{2A \cdot \vec{E}(\vec{r})}_{\text{hervorquellender Fluss}} \;=\; \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sigma \cdot A}_{\text{eingeschlossene Ladung}} \quad ,$$

das elektrische Feld ergibt sich somit zu

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

3.5 Kondensatoren

Ein Kondensatoren besteht aus zwei entgegengesetzt geladenen Körpern.

Es gilt

$$-\vec{\nabla} U(\vec{r}) \;:=\; -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \;=\; \vec{E}(\vec{r})$$

und somit ist $\Delta U = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)$.

Die Kapazität C eines Kondensators ist nun

$$C \;:=\; \frac{Q}{\Delta U} \qquad \text{in} \qquad F \;=\; \text{Farad},$$

dabei ist Q die Ladung der Körper.

Für die Energie E, die in einem Kondensator der Kapazität C gespeichert ist, gilt

$$E \;=\; \frac{1}{2} C (\Delta U)^2.$$

Plattenkondensatoren

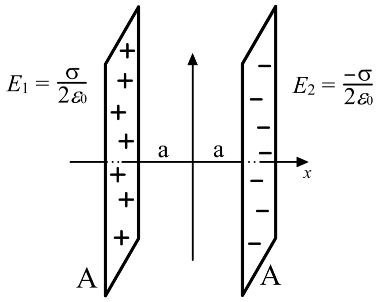


Abbildung 8

Bei einem Plattenkondensator mit $\vec{r}$ "zwischen" den Platten, gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) \;=\; \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{für} \quad |x| < a \\ 0 & \text{für} \quad |x| \geq a \end{cases} .$$

Es gilt weiter

$$U(\vec{r}) \;=\; -\int \vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} \;=\; -\int \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x\,\mathrm{d}r \;=\; -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x,$$

mit $\sigma = Q/A$ folgt also

$$\Delta U \;=\; \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A}2a.$$

Die Kapazität C eines Plattenkondensators ist also

$$C \;=\; \frac{Q}{\Delta U} \;=\; \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{2a}.$$

Reihen- und Parallelschaltung

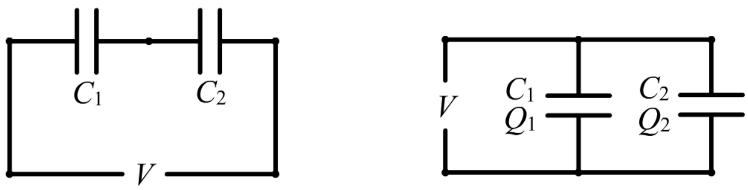


Abbildung 9

Bei einer Reihenschaltung von zwei Plattenkondensatoren gilt

$$\Delta U_1 \;=\; \frac{Q}{C_1} \qquad \text{und} \qquad \Delta U_2 \;=\; \frac{Q}{C_2}$$

sowie

$$V \;=\; \Delta U \;=\; \Delta U_1 + \Delta U_2 \;=\; \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \;=\; \frac{Q}{C},$$

somit ergibt sich für die Kapazität

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Bei einer Parallelschaltung von zwei Plattenkondensatoren gilt

$$V = V_1 = V_2 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C}$$

sowie

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = CV,$$

somit ergibt sich für die Kapazität

$$C = C_1 + C_2.$$

Dielektrika

Die Kapazität C eines Kondensators der Kapazität C_0 mit einem Dielektrika gefüllt ist

$$C = \varepsilon_r C_0,$$

dabei ist ε_r eine Materialkonstante des Dielektrikums.

Bei einem Plattenkondensator gilt also

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{2a}$$

und für die Energie ergibt sich

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}.$$

3.6 Der Satz von Gauß

Es gilt

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}a = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, \mathrm{d}V,$$

somit folgt nach dem Gaußschen Gesetz gerade

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\Delta U = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

dies beschreibt die Poisson Gleichung.

3.7 Gleichstrom

Für eine bewegte Ladung unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes $\vec{E}$ gilt

$$I = \text{Stromstärke} := \frac{\text{Ladungsmenge}}{\text{Zeit}} = \frac{Q}{t} \quad \text{in} \quad A = \text{Ampèr}.$$

Ohmsches Gesetz

Ist U die Spannung, I die Stromstärke und R der Widerstand in Ω, so gilt

$$I = \frac{U}{R}, \qquad R = \frac{U}{I}, \qquad U = RI, \qquad I \sim U.$$

Es gilt

$$R = \frac{\varrho \cdot l}{A},$$

dabei ist l die Länge des Leiters, A die Leiterquerschnittsfläche und ϱ ist ein materialspezifischer Widerstand des Leiters.

Daraus ergibt sich die Stromdichte

$$\vec{j} := \frac{1}{\varrho}\vec{E}.$$

3.8 Spiegelladungen

Befindet sich eine Ladung q in der Nähe einer leitenden Fläche, so müssen sich die Feldlinien krümmen, da diese senkrecht auf der Fläche auftreffen müssen. Sie krümmen sich geade, als ob eine Spiegelladung $-q$ mit gleichen Abstand zur Fläche vorhanden wäre:

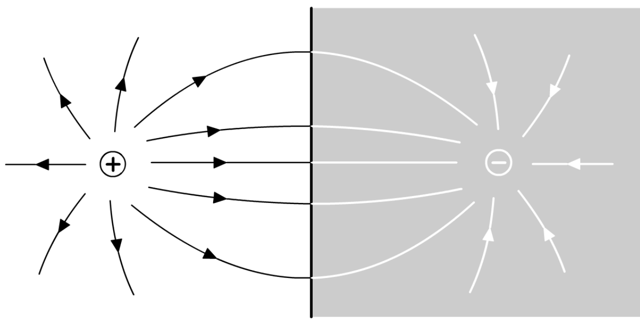


Abbildung 10

Zwei leitende Platten

Stehen zwei leitende Platten mit einem Winkel von α zueinander und gilt

$$\alpha = \frac{180^\circ}{n} \qquad \text{mit} \qquad n \in \mathbb{Z},$$

dann benötigt man $2n - 1$ Spiegelladungen, die symmetrisch im Kreis um den Schnittpunkt der Platten angeordnet sind.

4 Magnetostatik

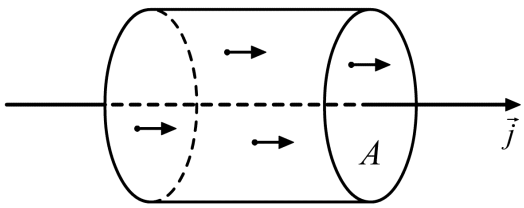
In der Magnetostatik werden nun bewegte Ladungen diskutiert und nicht nur wie bislang ruhende Ladungen.

4.1 Ladungserhaltung

Man definiert die Stromdichte $\vec{j}$ durch

$$\vec{j} \;=\; n_0 q\vec{v} \;=\; \frac{N}{V} q\vec{v},$$

dabei ist $n_0 = N/V$ die Teilchendichte, q die Ladung der Teilchen und $\vec{v}$ der Geschwindigkeitsvektor.



Bei zeitlich konstanten Volumen V gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho(\vec{x},t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x},t) \;=\; 0.$$

In der Magnetostatik gilt also

$$\vec{j}(\vec{r},t) \;=\; \vec{j}(\vec{r}) \qquad \text{und} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) \;=\; 0.$$

Der Linienstrom I ist

$$I \;=\; \left|\vec{j}\right| \cdot A,$$

dabei ist A die Leiterquerschnittsfläche.

4.2 Die Lorentzkraft

In der Elektrostatik gilt:

(1) Eine ruhende Ladung erzeugt ein $\vec{E}$ Feld.

(2) Im $\vec{E}$ Feld erfährt eine Ladung q die Kraft

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}.$$

In der Magnetostatik gilt:

(1) Eine bewegte Ladung erzeugt ein $\vec{B}$ Feld.

(2) Im $\vec{B}$ Feld erfährt eine bewegte Ladung q die Kraft

$$\vec{F} = (q \cdot \vec{v}) \times \vec{B}.$$

Die Gesamtkraft (Lorentzkraft) auf eine bewegte Ladung q ist somit

$$\vec{F} = q \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right).$$

4.3 Kraft auf Draht im Magnetfeld

Sei n_0 die Ladungsdichte, $\vec{j} = n_0 q \vec{v}$ die Stromdichte, $I = |\vec{j}|A$ der Linienstrom, A die Leiterquerschnittsfläche und am Ausgangspunkt gelte die Kraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

Dann wirkt auf ein kleines Leiterstück $\mathrm{d}\vec{l}$ die Kraft

$$\mathrm{d}\vec{F} = I(\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}) = I(\vec{e}_t \times \vec{B})\mathrm{d}l,$$

dabei ist $\vec{e}_t$ der Tangentialvekter an das Leiterstück.

Magnetisches Dipolmoment

Ist I der Linienstrom durch einen Leiter und ist A die Fläche, um die die Ladungen in dem Leiter rotieren, so gilt für das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ gerade

$$\vec{\mu} = I \cdot A \cdot \vec{n},$$

dabei ist $\vec{n}$ der Normalenvektor der Fläche A.

Beispiel

Zwei Punktladungen mit der Ladung q bewegen sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis vom Radius R in der xy-Ebene und die beiden Ladungen seien genau gegenüber gelegen.

Dann gilt

$$\vec{\mu} = I \cdot A \cdot \vec{n} = \frac{\omega q}{\pi} \cdot \pi R^2 \cdot \vec{e}_z = R^2 \omega q \cdot \vec{e}_z.$$

4.4 Magnetisches Feld einer bewegten Ladung

Das magnetische Feld einer bewegten Ladung q mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist

$$\vec{B}(\vec{r}) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}.$$

Es gilt das Superpositionsprinzip:

$$\vec{B}(\vec{r}) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \vec{B}_i(\vec{r}).$$

Biot Savartsches Gesetz

Eine stromtragende geschlossene Leiterschleife c mit dem Linienstrom I erzeugt das Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) \;=\; \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{\vec{e}_t \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}\, \mathrm{d}s.$$

Beispiele

Eine Kreisschleife in der x, y Ebene vom Radius R erzeugt auf der z Achse das Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) \;=\; \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_z.$$

Eine (unendlich) langer gerader Draht entlang der z Achse erzeugt das Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) \;=\; \vec{B}(\varrho, \varphi) \;=\; \frac{\mu_0 I}{2\pi\varrho} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \frac{\mu_0 I}{2\pi|\vec{r}|^2} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.5 Ampèresches Durchflutungsgesetz

Sei c eine geschlossene Kurve und sei $\vec{e}_t$ der Tangentialvektor der Kurve.

Dann gilt für ein Magnetfeld $\vec{B}$ gerade

$$\int_c \vec{B} \cdot \vec{e}_t \,\mathrm{d}l \;=\; \mu_0 \sum I_{\text{eingeschlossen}}.$$

Beispiel

Ist c eine Kreisschleife vom Radius R um einen Leiter mit dem Linienstrom I, so erhält man wieder vom Betrage her

$$2\pi R B \;=\; \mu_0 I \qquad \Leftrightarrow \qquad B \;=\; \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

4.6 Grundgleichungen der Magnetostatik

In der Elektrostatik gelten die Grundgleichungen

$$\textbf{(1)}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} \;=\; \varrho/\varepsilon_0 \qquad \text{und} \qquad \textbf{(2)}\ \vec{\nabla}\times\vec{E} \;=\; 0,$$

das $\vec{E}$ Feld ist also wirbelfrei.

In der Magnetostatik gelten die Grundgleichungen

$$\textbf{(1)}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad \textbf{(2)}\ \vec{\nabla}\times\vec{B} \;=\; \mu_0\vec{j},$$

das $\vec{B}$ Feld ist also quellenfrei.

Zu einer Oberfläche S mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ schreibt man auch

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} \;=\; 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}a \;=\; 0.$$

5 Elektrodynamik

5.1 Faradaysches Induktionsgesetz

Sei A die Fläche einer Stromschleife c.

Dann gilt für die induzierte Spannung U_{ind} gerade

$$U_{\mathrm{ind}} \;=\; -\dot{\phi} \;=\; -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}a \;=\; \int_c \vec{E}\cdot\vec{e}_t\,\mathrm{d}l \;=:\; -L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t},$$

dabei ist L die Induktivität.

Beispiel

Ist A die Fläche zwischen einer Spule der Länge l, welche N Windungen hat, so gilt

$$L \;=\; \mu_0 A N^2/l.$$

5.2 Satz von Stokes

Sei S eine Oberfläche und sei c die Kurve, die die Oberfläche S abschließt.

Dann gilt für ein Vektorfeld $\vec{A}$ gerade

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}a \;=\; \int_c \vec{e}_t\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}l.$$

5.3 Maxwell Gleichungen

Ist A_1 der Deckel eines Zylinders mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ und ist c die Kurve, die die Kreisfläche A_1 abschließt, so gilt für den Maxwellschen Verschiebungsstrom

$$\int_{A_1} (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}a \;=\; \int_c \vec{B}\cdot\vec{e}_t\,\mathrm{d}l \;=\; \mu_0 I,$$

dabei ist I der Linienstrom eines Leiters durch den Zylinder.

Aus diesem Verschiebungsstrom und aus den Grundgleichungen der Elektro- und Magnetostatik erhält man nun die Maxwell Gleichungen:

(1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varrho/\varepsilon_0$

(2) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$

(3) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

(4) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t + \mu_0\vec{j}$

Im Vakuum gilt stets $\varrho = 0$ sowie $\vec{j} = 0$.

5.4 Gleichungen für Potentiale

Sind ein Vektorfeld $\vec{A}$ und ein Skalarfeld ϕ gegeben, so erzeugen diese ein $\vec{E}$ und ein $\vec{B}$ Feld:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r},t) &= -\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t), \\
\vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t).
\end{aligned}$$

Gilt $\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_2(\vec{r},t)$ sowie $\vec{B}_1(\vec{r},t) = \vec{B}_2(\vec{r},t)$ mit $\phi_1, \phi_2, \vec{A}_1, \vec{A}_2$, so gibt es eine Eichtransformation $\psi(\vec{r},t)$ mit

$$\begin{aligned}
\phi_2(\vec{r},t) &= \phi_1(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t), \\
\vec{A}_2(\vec{r},t) &= \vec{A}_1(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\psi(\vec{r},t).
\end{aligned}$$

6 Wellengleichungen

Gilt $\varrho = 0$ und $\vec{j} = 0$, so ergeben sich aus den Gleichungen für Potentiale die Wellengleichungen

$$\begin{aligned}\left(\Delta\phi - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi\right) &= 0,\\ \left(\Delta\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}\right) &= 0.\end{aligned}$$

6.1 Lösungen der Wellengleichungen

Ebene Wellen

Eine spezielle Lösung der Wellengleichungen sind ebene Wellen:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 \cdot e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)},$$

dabei ist $\vec{k}$ der Wellenvektor mit $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$ und λ der Wellenlänge, $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}|$ ist der Ausbreitungsvektor, $\vec{k}\vec{r}$ ist konstant und $\omega = c|\vec{k}|$ ist die Kreisfrequenz mit der Lichtgeschwindigkeit c, eine Periode ist also $T = 2\pi/\omega$.

Kugelwellen

Eine weiter Lösung der Wellengleichungen sind Kugelwellen:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 \cdot \left(e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right) / |\vec{r}|.$$

Dabei gilt

$$\vec{E} \perp \hat{k}, \qquad \vec{E} \perp \vec{B} \qquad \text{und} \qquad \vec{B} \perp \hat{k},$$

somit bilden $\vec{E}, \vec{B}$ und $\hat{k}$ ein orthogonales Dreibein.

Außerdem gilt $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$.

Superposition

Für beide Lösungen der Wellengleichungen gilt das Superpostitionsprinzip.

6.2 Polarisation

Lineare Polarisation

Ist $\hat{k} = \vec{e}_z$, so gilt für die lineare Polarisation gerade

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= E_0\vec{e}_y\cos(kz-\omega t),\\ \vec{B}(\vec{r},t) &= B_0\vec{e}_x\cos(kz-\omega t).\end{aligned}$$

Zirkulare Polarisation

Eine Lösung der zirkularen Polarisation ist zum Beispiel

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= E_0\left(\vec{e}_y\cos(kz-\omega t)+\vec{e}_x\sin(kz-\omega t)\right),\\ \vec{B}(\vec{r},t) &= B_0\left(\vec{e}_x\cos(kz-\omega t)-\vec{e}_y\sin(kz-\omega t)\right).\end{aligned}$$

6.3 Energiedichte

Die Energiedichte U des elektromagnetischen Feldes ist

$$U = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\vec{E}^2+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right).$$

Für den Poyntingvektor

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$$

gilt nun

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0.$$