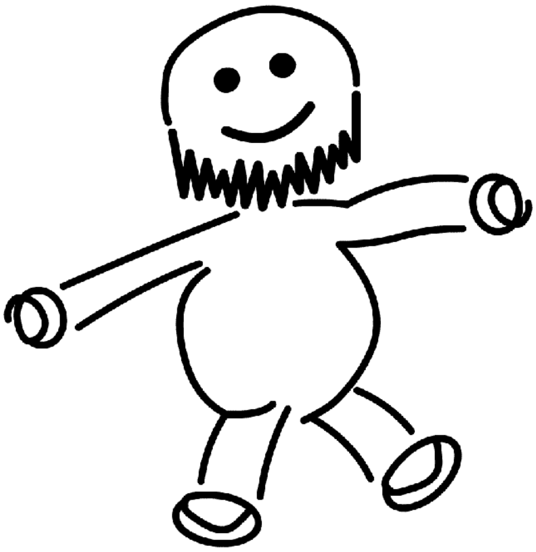
Physikalisches Praktikum für das Hauptfach Physik

Versuch 02

Die Gravitationswaage

Sommersemester 2005



Name:	Daniel Scholz
Mitarbeiter:	Hauke Rohmeyer
EMail:	physik@mehr-davon.de
Gruppe:	13
Assistent:	Sarah Köster
Durchgeführt am:	26. Mai 2005
Protokoll abgebeben:	02. Juni 2005
Protokoll verbessert:	—

Stempel:

Testiert: ______________________

1 Einleitung

Die ***Gravitationskonstante*** γ gehört zu den wichtigsten Naturkonstanten: Mit ihrer Hilfe lässt sich z.B. die Masse der Erde bestimmen. Seit Issac Newton 1667 das ***Gravitationsgesetz*** aufstellte, ist die experimentelle Bestimmung von γ eine besondere Herausforderung. Denn aufgrund der vergleichsweise schwachen Wirkung der Gravitationskraft und der Tatsache, dass diese nicht abgeschirmt werden kann, ist die Gravitationskonstante bis heute eine der am wenigsten exakt bestimmten Größen. In diesem Versuch soll γ mit Hilfe der ***Gravitationswaage*** von Cavendish und Eötvös bestimmt werden.

2 Theorie

2.1 Gravitationsgesetz

Das Gravitationsgesetz besagt, dass zwei Körper sich gegenseitig anziehen, mit einer Kraft die proportional zu dem Produkt ihrer Massen und antiproportional zu ihrem Abstand ist. Als Newton das Gravitationsgesetz aufstellte, war eine Erklärung gefunden warum Gegenstände von der Erde angezogen werden, wie der Apfel, der vom Baum fällt. Man konnte nun auch erklären, warum der Mond um die Erde, und die Erde um die Sonne kreist. Die Bewegung der Planeten war schon vor Newton bekannt, und wurde durch die ***Keplerschen Gesetze*** beschrieben. Diese beruhten allerdings nur auf astronomischen Beobachtungen, und erst Newtons Gravitationsgesetz beschrieb die Kraft, die die Planeten auf ihrer Bahn hält.

Newton entwickelte das Gesetz aus den folgenden Beobachtungen:

(1) Alle Körper, egal welcher Masse, fallen auf der Erdoberfläche gleich schnell, abgesehen von denen, die auf Grund ihrer Form zu großen Luftwiderstand haben. Die Fallbeschleunigung ist also für alle Körper gleich groß, und demzufolge muss die wirkende Kraft proportional zur fallenden Masse sein. $\vec{F} \sim m_1$

(2) Aus dem dritten Newtonschen Axiom [actio = reactio] folgt, dass es sich um eine beidseitige Anziehung handeln muß. Der Apfel zieht die Erde also mit der gleichen Kraft an, wie die Erde den Apfel. Also ist die zweite Masse auch proportional zur Kraft. $\vec{F} \sim m_2$

(3) Weiterhin ist die Stärke der Kraft aus dem Abstand zwischen den beiden Massen gegeben. Die Beziehung $\vec{F} \sim r^{-2}$ erkannte Newton durch Beobachtungen der Mondbahn. Die Zentripetalbeschleunigung, die auf den Mond wirkt, konnte Newton aus dem Abstand des Mondes von der Erde und dessen Umlaufzeit berechnen. Nun setzte er die Zentripetalbeschleunigung mit der Schwerebeschleunigung, die die durch die Erde verursacht wird, gleich. Die Schwerebeschleunigung im Abstand des Mondes verglichen mit der Schwerebeschleunigung auf der Erdoberfläche ergab eine Abstandsabhängigkeit von r^{-2}.

Aus diesen Beobachtungen formulierte Newton folgendes Gesetz:

$$F \;=\; \gamma\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Dabei ist γ eine Proportionalitätskonstante. Sie legt die Größe der Kraft zwischen zwei Einheitsmassen im Einheitsabstand fest.

2.2 Die Keplerschen Gesetze

Johannes Kepler leitete aus den bis dahin bekannten astronomischen Beobachtungen die drei folgenden Gesetze über Planetenbewegung her:

(1) Die Umlaufbahnen aller Planeten haben die Form einer Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

(2) Die Verbindungslinie zwischen der Sonne und einem Planeten überstreicht in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächen.

(3) Das Quadrat der Umlaufzeit eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz der Hauptachse von seiner Umlaufbahn.

Erst nachdem Newton das Gravitationsgesetz aufstellte, konnten die Keplerschen Gesetze bewiesen werden.

Das erste Keplersche Gesetz

Newton konnte zeigen, dass Körper, die sich in einem Kraftfeld bewegen welches mit r^{-2} abfällt, sich auf Kegelschnitten bewegen. Dadurch kann es nur drei verschiedene Bahntypen geben: Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln. Auf Hyperbel- oder Parabelbahnen bewegen sich Körper, die einmal an der Sonne vorbeifliegen, und niemals wiederkehren. Die einzige geschlossene Bahn die Ellipse, demzufolge müssen sich Planeten auf Ellipsen bewegen.

Das zweite Keplersche Gesetz

Das zweite Keplersche Gesetz ergibt sich daraus, dass die Kraft, die die Sonne auf einen Planeten ausübt, zur Sonne gerichtet ist, also eine Zentralkraft ist. Also ist $\vec{r} \times \vec{F} = 0$. Das heißt, dass der Drehimpuls erhalten bleibt.

In einem Zeitintervall dt bewegt sich ein Planet um die Strecke $\vec{v}\,dt$ weiter. Sein Radiusvektor $\vec{r}$ überstreicht dabei eine Fläche, die halb so groß ist, wie das durch $\vec{r}$ und $\vec{v}\,dt$ gebildete Parallelogramm. Deshalb gilt für die Fläche dA, die vom Radiusvektor im Zeitintervall dt überstrichen wird

$$dA \;=\; \frac{1}{2}\, r \times v\ dt \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{m}\, r \times mv\ dt.$$

Mit $L = \vec{r} \times m\vec{v}$ folgt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} L.$$

Der Drehimpuls ist erhalten, also zeitlich konstant. Für den Flächenabschnitt dA folgt daraus, dass dieser für gleiche Zeitintervalle auch gleich groß sein muß.

Das dritte Keplersche Gesetz

Wir zeigen hier nur das dritte Keplersche Gesetz für den Spezialfall, dass die Umlaufbahn des Planeten ein Kreis ist. Betrachtet man einen Planeten, der sich mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit dem Radius r um die Sonne bewegt, dann besitzt er die Zentripetalbeschleunigung $\frac{v^2}{r}$. Diese Beschleunigung kommt nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz durch die Anziehung zwischen der Sonne und dem Planeten zustande. Es gilt:

$$F = ma \Rightarrow \gamma \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r},$$

wobei M die Masse der Sonne und m die Masse des Planeten ist. Da beide Seiten der Gleichung m enthalten, lässt sich dieses herauskürzen. Nun gilt $v = \frac{2\pi}{T} r$.

$$\Rightarrow \qquad T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} r^3$$

Da in dieser Gleichung kein m mehr vorkommt, gilt sie für alle Planeten. Dies ist aber gerade das 3. Keplersche Gesetz, welches besagt, dass das Quadrat der Umlaufzeit eines Planeten proportional zur dritten Potenz seiner Umlaufbahn ist.

2.3 Versuchsaufbau

Da für die Herleitung der Formel zur Bestimmung von γ der Aufbau der Gravitationswaage von entscheidener Bedeutung ist, wird dieser hier schon vorweggenommen.

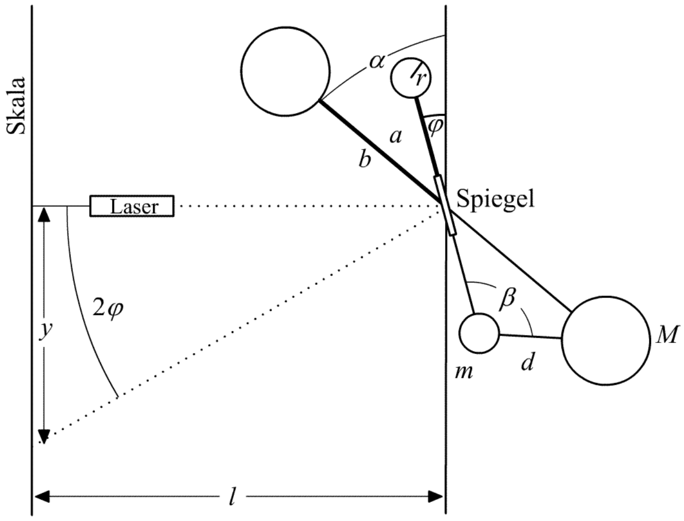


Abbildung 1 - Versuchsaufbau

An einem dünnen Torsionsfaden sind ein Spiegel und am Ende zwei kleine Kugeln angebracht. Über einen Lichtzeiger, der an dem Spiegel reflektiert und auf eine Skala projeziert wird, lässt sich die Drehung des Torsionsfadens messen. Die kleinen Kugeln befinden sich in einem evakuierten Glaszylinder um dessen Innenseite ein Kupfergitter befestigt ist. Das Kupfergitter hat den Sinn, dass sich die Kugeln und der Faden nicht statisch aufladen können, da sie sonst aufgrund der wirkenden Coulombkraft die Messung verfälschen würden. Um den Glaszylinder herum sind zwei große Bleikugeln drehbar befestigt. Die Kugelpaare [eine große und eine kleine Kugel] liegen nicht in einer Ebene sondern vertikal versetzt. Somit wirkt die Gravitation des einen Kugelpaares weniger auf das andere Kugelpaar. Durch Drehung der großen Kugeln wirkt die Gravitationskraft auf die kleinen Kugeln. Dadurch wird ein Drehmoment auf den Torsionsfaden ausgeübt und das System beginnt zu schwingen. Die neue Ruhelage ist genau die, wo sich die wirkende Gravitationskraft und das Drehmoment vom Torsionsfaden aufheben.

2.4 Bestimmung der Gravitationskonstante

Auf die kleinen Kugeln wirkt die Gravitationskraft:

$$F = \gamma \frac{Mm}{d^2}$$

wobei d der Abstand zwischen einer kleinen und der näherliegenden großen Kugel ist. Somit wirkt auf die kleinen Kugeln ein Drehmoment

$$|\vec{M}_{Grav}| \;=\; 2\;|a \times F| \;=\; 2\;|a||F|\;sin\beta \;=\; 2\;a\;\gamma\;\frac{Mm}{d^2}\sin\beta$$

Nun gilt $\sin\beta \;=\; \frac{b\;\sin(\alpha-\varphi)}{d}$

$$\Rightarrow M_{Grav} \;=\; 2a\gamma\frac{Mm\;b\;\sin(\alpha-\varphi)}{d^3}$$

und nach dem Kosinussatz gilt $d^2 \;=\; a^2 + b^2 - 2ab\;\cos(\alpha-\varphi)$, womit sich M_{Grav} vereinfacht zu

$$M_{Grav} \;=\; \frac{2a\gamma Mmb\;\sin(\alpha-\varphi)}{(a^2\;+\;b^2\;-\;2ab\;\cos(\alpha-\varphi))^{\frac{3}{2}}}$$

Durch die Torsion des Fadens wirkt ein entgegengesetztes Drehmoment $M_T \;=\; D\varphi$ auf die kleinen Kugeln, das in der Ruhelage vom Betrag her genauso groß ist wie M_{Grav}. Dabei ist D die Winkelrichtgröße des Torsionsmomentes, die sich experimentell aus der Schwingungsdauer T bestimmen lässt. Es gilt

$$D \;=\; \frac{4\pi^2}{T^2}\;J$$

wobei J das Trägheitsmoment der Torsionshantel ist. Das Trägheitmoment einer Kugel mit der Drehachse durch den Schwerpunkt ist $J_s \;=\; \frac{2}{5}mr^2$. Der Schwerpunkt der Kugeln ist im Abstand a zu dem Torsionsfaden. Nun lässt sich mit Hilfe des Steinerschen Satzes das Trägheitsmoment der Kugeln ausrechnen:

$$J \;=\; 2(J_s + ma^2) \;=\; 2m(\frac{2}{5}r^2 + a^2)$$

Durch einsetzen ergibt sich das rücktreibende Drehmoment M_T

$$M_T \;=\; D\varphi \;=\; \frac{4\pi^2}{T^2}\;J\;\varphi \;=\; \frac{4\pi^2}{T^2}\;2m(\frac{2}{5}r^2 + a^2)\varphi \;=\; \frac{8\pi^2 m\varphi}{T^2}\;(\frac{2}{5}r^2 + a^2)$$

In der Gleichgewichtslage gilt $M_T = M_{Grav}$:

$$\frac{8\pi^2 m\varphi}{T^2}(\frac{2}{5}r^2 + a^2) \;=\; \frac{2a\gamma Mmb\;\sin(\alpha-\varphi)}{(a^2\;+\;b^2\;-\;2ab\;\cos(\alpha-\varphi))^{\frac{3}{2}}}$$

Da $\varphi << \alpha$ gilt $\sin(\alpha-\varphi) \;\approx\; \sin\alpha$ und $\cos(\alpha-\varphi) \;\approx\; \cos\alpha$. Löst man die Gleichung nach γ auf, erhält man

$$\gamma \;\approx\; 4\pi^2\varphi\frac{(\frac{2}{5}r^2 + a^2)(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}{abMT^2\sin\alpha}$$

Da beide Drehmomente m [die Masse der kleinen Kugeln] enthalten, kürzen sich diese beim Gleichsetzen heraus.

3 Versuchsdurchführung

3.1 Versuchsdurchführung

Für die Messung befindet sich das System anfänglich in Ruhelage. Das heißt, dass die großen Kugeln so gedreht sind, dass kein Drehmoment auf den Torsionsfaden wirkt. In dieser Lage wird der Lichtzeiger an der Skala abgelesen. Danach werden die großen Kugeln in einem Winkel von 54° um die kleinen Kugeln gedreht. Bei diesem Winkel wirkt das maximale Drehmoment auf den Torsionsfaden. Die kleinen Kugeln beginnen zu schwingen und man misst nun den Ausschlag auf der Skala alle 15 s über 5 Perioden. Danach werden die großen Kugeln in einen Winkel von -54° gebracht und die Messung wird wiederholt.

4 Auswertung

Wir arbeiteten an der Drehwaage II. Hier sind noch einmal die Parameter unserer Apparatur aufgelistet:

Senkrechte Lichtzeigerlänge	l [m]	2.71
Masse der großen Kugeln	M [kg]	9.993
Masse der kleinen Kugeln	m [kg]	0.02
Radius der kleinen Kugeln	r [m]	0.0075
Abstand Schwerpunkt - Drehachse kl. Kugeln	a [m]	0.024
Abstand Schwerpunkt - Drehachse gr. Kugeln	b [m]	0.102

4.1 Messreihe 1

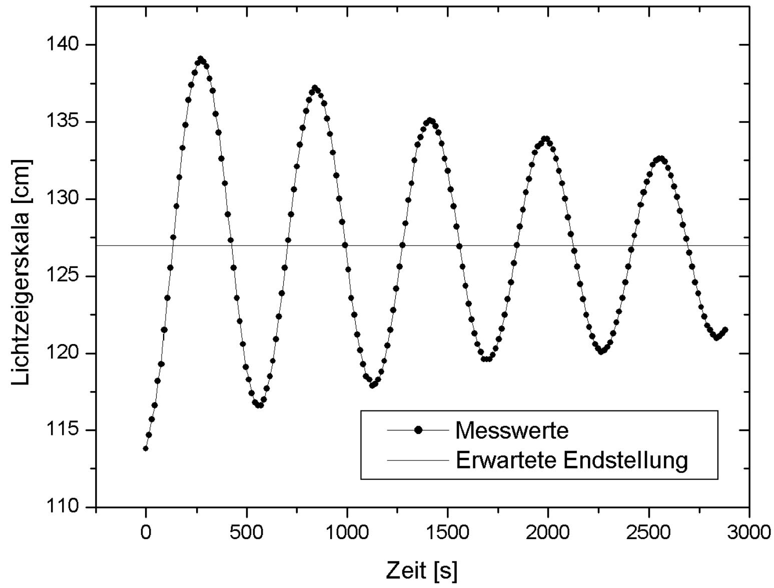


Abbildung 2 - Messreihe 1

Die Nullauslenkung lag bei 113,8 cm.

Aus je drei aufeinanderfolgenden Maximalausschlägen y_i wurde nun die erwartete Endstellung $\overline{y} = \frac{y_1+2y_2+y_3}{4}$ berechnet. $T/2$ ist die Zeit zwischen den Maximalauschlägen.

y_i $[cm]$	$\overline{y}$ $[cm]$	$T/2$ $[s]$
139.1	-	270
116.6	-	285
137.2	127.38	285
117.9	127.23	285
135.1	127.03	285
119.6	126.93	285
133.9	127.05	300
120.1	126.88	270
132.6	126.68	300
121	126.58	270

Für $\overline{y}$ ergibt sich der Mittelwert $126,97\ cm$. Die mittlere Auslenkung ergibt sich, wenn von diesem Wert noch die Nullauslenkung abgezogen wird. Es ergibt sich eine mittlere Auslenkung von $y = 0,132\ m$ mit dem Fehler $\sigma_y = 0,002\ m$. Dieser errechnet sich durch eine Abschätzung der Geschwindigkeit der Pendelbewegung nahe beim Maximalausschlag.

Nun lässt sich daraus der Winkel φ aus der Geometrie der Gravitationswaage bestimmen [siehe Abbildung 1]. Es gilt

$$\varphi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{l}\right) = 0,0243\ rad$$

mit dem Fehler

$$\sigma_\varphi = \sqrt{\sigma_y^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \sigma_l^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)^2} = 0,0004\ rad$$

Hier bei wurde $\sigma_l = 0,005\ m$ angenommen.

Da die Skala nur alle 15 s abgelesen wurde ist der Fehler für eine halbe Periode $\sigma_{y_i} = 7,5\ s$. Für die Periode ergibt sich der gewichtete Mittelwert $T = 567\ s$ mit dem Fehler $\sigma_T = 2\cdot(2,4\ s + \Delta T_{sys}) = 2\cdot(2,4\ s + 0,01\ s + 0,005\cdot 283,5\ s) = 7,66\ s$.

Da der Drehteller am Anfang des Versuches nicht auf 0, sondern auf 3,5° gedreht war, haben wir den Drehteller auf 50° gedreht, und es gilt

$$\alpha = \frac{\pi\ rad}{180^\circ}\cdot(50^\circ - 3,5^\circ) = 0,8116\ rad$$

Nun können wir die Gravitationskonstante berechnen:

$$\gamma \;=\; 4\pi^2\varphi\frac{(\frac{2}{5}r^2+a^2)(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}{abMT^2\sin\alpha} \;=\; 6,674\cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}$$

Der Fehler berechnet sich nach der Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_\gamma \;=\; \sqrt{\sigma_\varphi^2\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}\right)^2+\sigma_T^2\left(\frac{\partial\gamma}{\partial T}\right)^2} \;=\; 0,207\cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}$$

Der Literaturwert [Quelle: Praktikumsskript] liegt bei

$$\gamma \;=\; 6,67259(85)\cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}$$

4.2 Messreihe 2

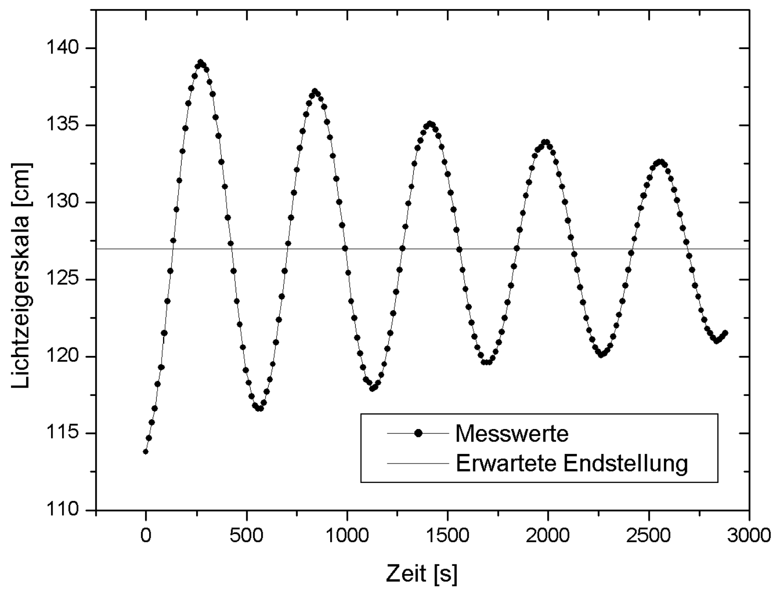


Abbildung 3 - Messreihe 2

y_i $[cm]$	$\overline{y}$ $[cm]$	$T/2$ $[s]$
69.5	-	225
125.4	-	285
73.5	98.45	285
121.1	98.38	285
77	98.18	300
117.3	98.1	285
80	97.9	285
114	97.83	285
82.6	97.65	285
111.2	97.6	285

Für $\overline{y}$ ergibt sich der Mittelwert $98,01\ cm$. Es ergibt sich eine mittlere Auslenkung von $y = 0,158\ m$ mit dem Fehler $\sigma_y = 0,005\ m$.

Nun ist $\varphi = 0,0291\ rad$ mit dem Fehler $\sigma_\varphi = 0,0010\ rad$.

Für die Periode ergibt sich der gewichtete Mittelwert $T = 561\ s$ mit dem Fehler $\sigma_T = 2,4\ s + \Delta T_{sys} = 7,57\ s$.

Diesesmal haben wir den Drehteller auf -50° gedreht, und es ist

$$\alpha = \frac{\pi\ rad}{180°} \cdot (-50°) = -0,873\ rad$$

Nun können wir die Gravitationskonstante berechnen:

$$\gamma = 8,082 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}$$

Der Fehler berechnet sich nach der Fehlerfortplanzung:

$$\sigma_\gamma = 0,337 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}$$

Und noch mal zur Erinnerung: Der Literaturwert [Quelle: Praktikumsskript] liegt bei

$$\gamma = 6,67259(85) \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}$$

4.3 Diskussion

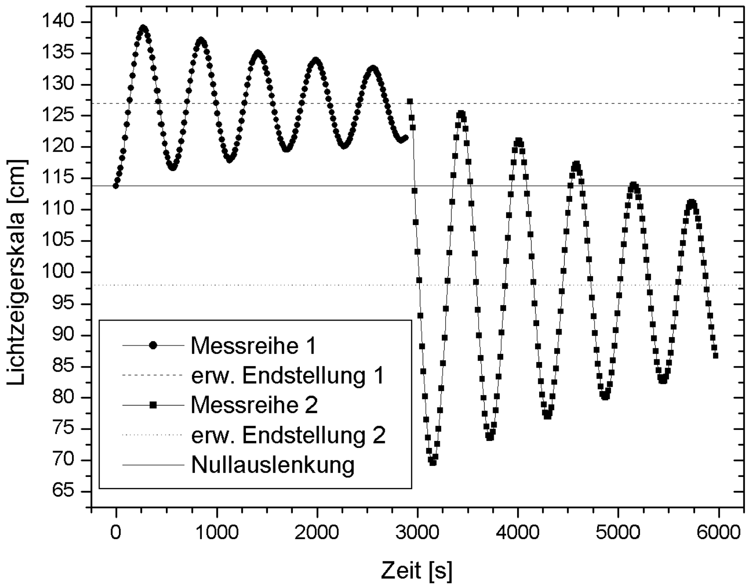


Abbildung 4 - Vergleich

Bei Messreihe 1 liegt der Fehlerbalken in dem Bereich des zur Zeit anerkannten Wertes von γ. Unser Ergebnis stimmt mit γ sogar in der Größenordnung 10^{-13} überein. Hier ist es denkbar, ob wir unseren Fehler überschätzt haben.

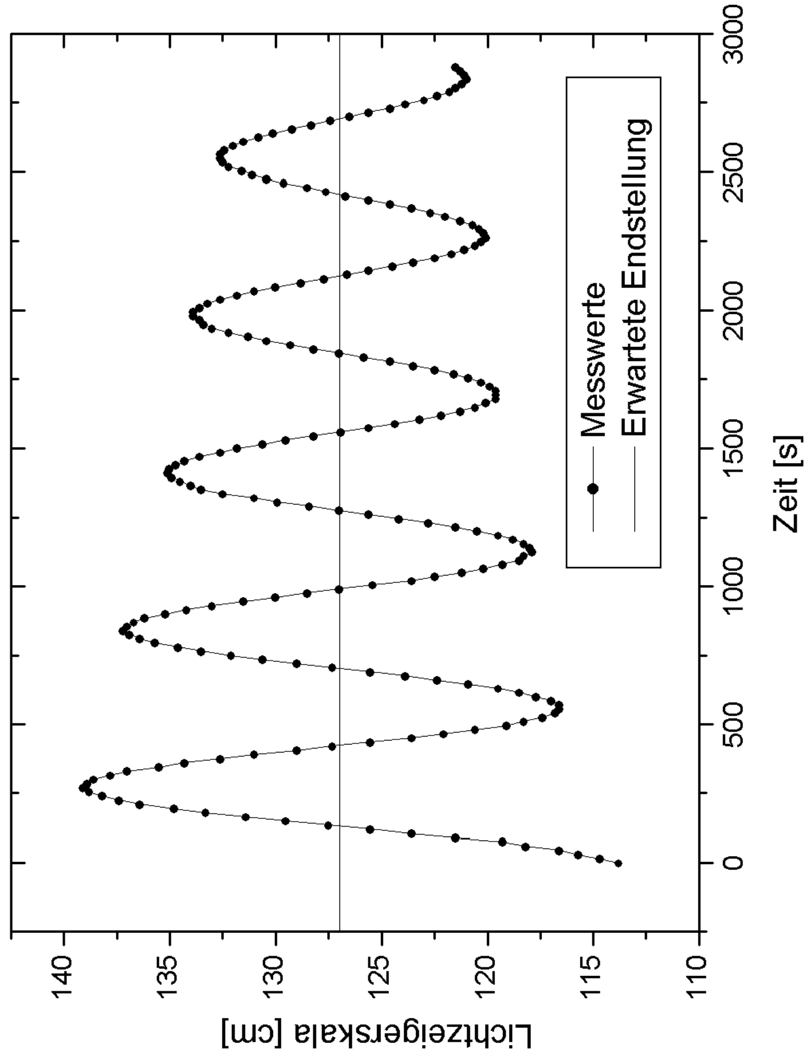
Der errechnete Wert für γ ist bei Messreihe 2 zu klein. Das liegt wahrscheinlich daran, dass die kleinen Kugeln nach dem Drehen der großen Kugeln sehr stark beschleunigt wurden, so dass die Amplitude der Schwingung sehr groß wurde. Hieran kann man erkennen, dass es wichtig ist, das der Versuch begonnen wird, wenn der Aufbau in vollkommener Ruhe ist.

Es ist erfreulich, dass wir trotz des vergleichsweise geringem Messaufwandes einigermaßen sinnvolle Ergebnisse erzielt haben.

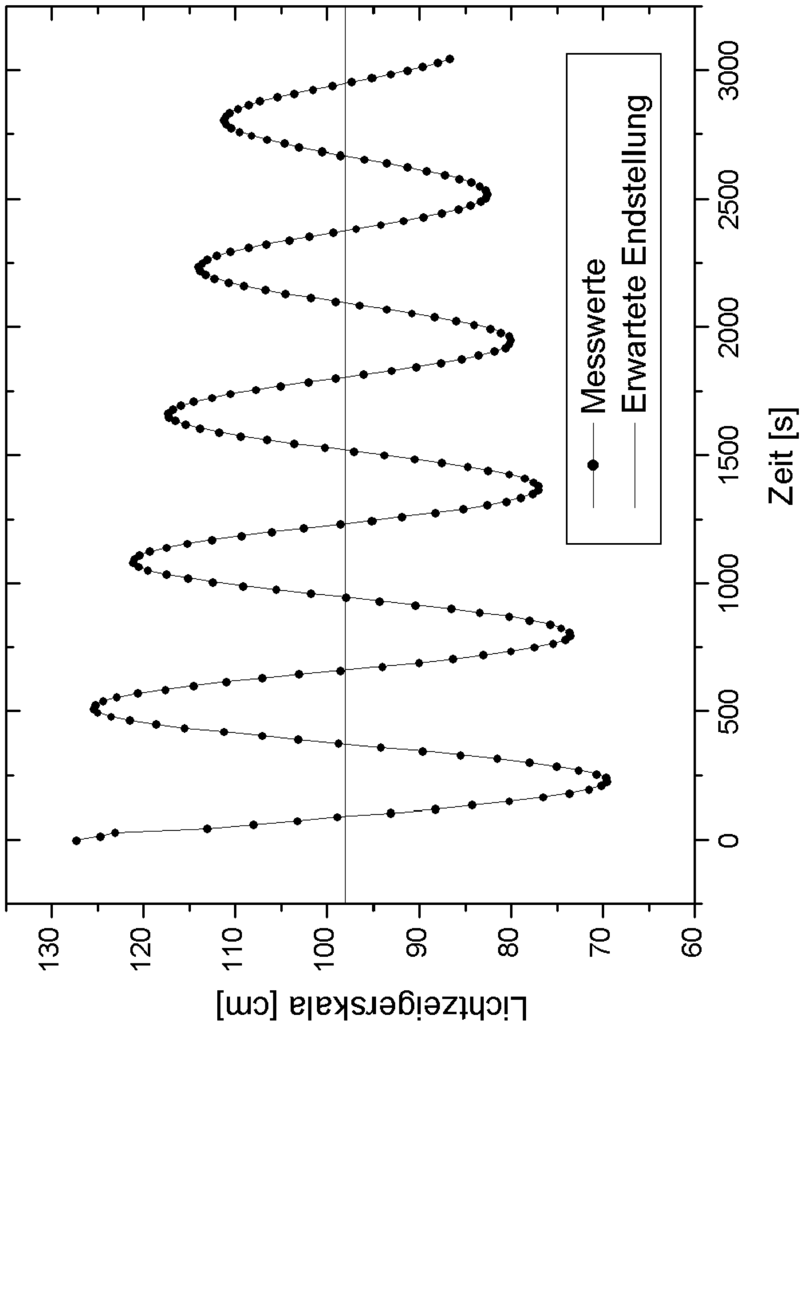
Wir glauben, dass der Zeitpunkt des Beginns der 2. Messreihe von entscheidener Bedeutung ist. Wie man in Abbildung 4 erkennen kann, haben wir die großen Kugeln gedreht, als die Schwingung gerade „nach oben“ ging, der Winkel φ also größer wurde. Hätte man die großen Kugeln schon vorher gedreht, wären die kleinen Kugeln noch stärker beschleunigt worden, und die Amplitude der 2. Messreihe wäre noch größer geworden. Wahrscheinlich wäre dann auch der errechnete Wert für γ noch größer geworden.

5 Anhang

5.1 Abbildung 2 - Messreihe 1



5.2 Abbildung 3 - Messreihe 2



5.3 Abbildung 4 - Vergleich