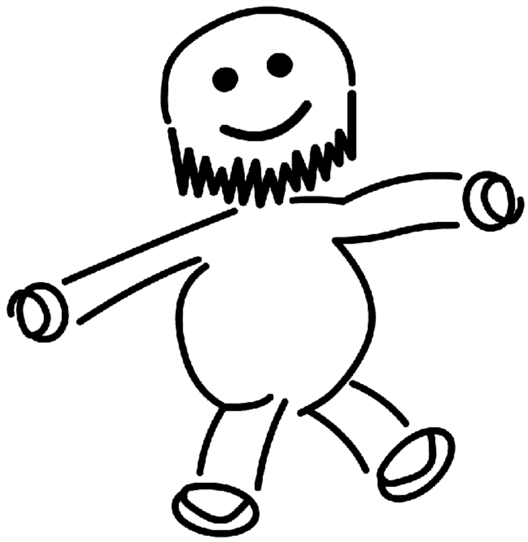
Physikalisches Praktikum für das Hauptfach Physik

Versuch 07

Der Adiabatenexponent

Sommersemester 2005



Name:	Daniel Scholz
Mitarbeiter:	Hauke Rohmeyer
EMail:	physik@mehr-davon.de
Gruppe:	13

Assistent:	Dagmar Steinhauser
Durchgeführt am:	07. Juli 2005
Protokoll abgebeben:	14. Juli 2005
Protokoll verbessert:	—

Unterschrift:

Testiert: ____________________________

1 Einleitung

In diesem Versuch soll der ***Adiabatenexponent*** $\kappa = c_p/c_V$ nach zwei verschiedenen Methoden bestimmt werden. Im ersten Teil wird der Adiabatenexponent nach ***Rüchardt*** für Luft, Argon und Kohlenstoffdioxid berechnet, im zweiten Teil nach ***Clement-Desormes*** für Luft. Der Adiabatenexponent ist eine wichtige Größe bei der Beschreibung adiabatischer Zustandsänderungen, insbesondere bei Gasen.

2 Theorie

2.1 Der Adiabatenexponent

Der Adiabatenexponent κ ist definiert als Quotient der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen.

$$\kappa \ := \ \frac{c_p}{c_V}$$

Warum er Exponent genannt wird macht die Poisson-Gleichung deutlich, in der die Proportionalität $p \sim V^{-\kappa}$ beschrieben wird.

2.2 Zustandsänderungen

Findet bei einer Zustandsänderung eines Gases kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt, ist also $\Delta Q = 0$, so nennt man diese Zustandsänderung ***adiabatisch***. Ist dagegen die Temperatur konstant $[\Delta T = 0]$, so nennt man sie ***isotherm***. Ist das Volumen konstant $[\Delta V = 0]$, so nennt man sie ***isochor***. Ist schließlich der Druck konstant $[\Delta p = 0]$, so nennt man sie ***isobar***.

2.3 Poisson-Gleichung

Bei einem konstanten Gasvolumen wird keine Volumenarbeit an ihm verrichtet. Es gilt also $\mathrm{d}W = 0$. Nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik folgt

$$\mathrm{d}U \ = \ \mathrm{d}W + \mathrm{d}Q \ = \ \mathrm{d}Q.$$

Für die spezifische Wärmekapazität folgt dann

$$c_V \ = \ \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)_V \ = \ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} \qquad \Leftrightarrow \qquad c_V \mathrm{d}T \ = \ \mathrm{d}U.$$

Bei einem adiabatischen Prozess gilt dagegen $\mathrm{d}Q = 0$. Nach dem 1. Hauptsatz folgt also

$$\mathrm{d}U \ = \ \mathrm{d}W + \mathrm{d}Q \ = \ \mathrm{d}W \ = \ -p\mathrm{d}V.$$

Da die innere Energie dU eine Zustandsgröße ist, lassen sich die gewonnen Gleichungen nun gleichsetzten.

$$c_V \mathrm{d}T \;=\; \mathrm{d}U \;=\; -\,p\mathrm{d}V.$$

Für ein Mol $[n = 1]$ gilt nach der idealen Gasgleichung $p = RT/V$. Setzt man dies ein und führt eine Trennung der Variablen durch folgt

$$c_V \mathrm{d}T \;=\; -\,p\mathrm{d}V \;=\; -\frac{RT}{V}\mathrm{d}V \qquad \Leftrightarrow \qquad c_V \frac{\mathrm{d}T}{T} \;=\; -\,R\frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

Integriert man diese Gleichung auf beiden Seiten, so erhält man

$$c_V \ln T \;=\; -\,R \ln V + C.$$

Wobei C eine Konstante ist. Stellt man dies nach C um, so gilt

$$C \;=\; c_V \ln T + R \ln V \;=\; \ln T^{c_V} + \ln V^R \;=\; \ln(T^{c_V} \cdot V^R) \;=\; const.$$

Woraus schließlich

$$T^{c_V} V^R \;=\; const$$

folgt. Nun gilt $c_p = c_V + R$ [siehe dazu Versuch 06: Spezifische Wärme der Luft und Gasthermometer], woraus $R = c_p - c_V$ folgt. Somit gilt also

$$T^{c_V} V^R \;=\; T^{c_V} V^{c_p - c_V} \;=\; const \qquad \Rightarrow \qquad TV^{\frac{c_p - c_V}{c_V}} \;=\; TV^{\kappa-1} \;=\; const.$$

Für ein Mol gilt nach der idealen Gasgleichung $T = pV/R$. Setzt man dies ein, so erhält man

$$TV^{\kappa-1} \;=\; \frac{pV^\kappa}{R} \;=\; const.$$

Daraus folgt schließlich die Poisson-Gleichung für ideale Gase:

$$pV^\kappa \;=\; const \qquad \Leftrightarrow \qquad p \sim V^{-\kappa}.$$

2.4 Berechnung des Adiabatenexponentes über die Freiheitsgrade

In Versuch 06 [Spezifische Wärme der Luft und Gasthermometer] haben wir folgende Beziehungen hergeleitet:

$$\frac{c_V}{R} \;=\; \frac{f}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad c_V \;=\; \frac{f}{2}R$$

sowie

$$c_p \;=\; c_V + R \;=\; \left(\frac{f}{2} + 1\right) R \;=\; \left(\frac{f+2}{2}\right) R.$$

Daraus folgt

$$\kappa \;=\; \frac{c_p}{c_V} \;=\; \frac{\frac{f+2}{2}R}{\frac{f}{2}R} \;=\; \frac{f+2}{f}.$$

2.5 Berechnung des Adiabatenexponentes nach Rüchardt

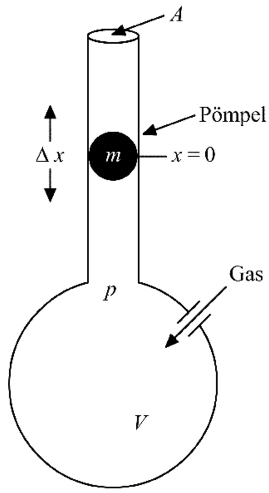


Abbildung 1: Schema des Versuchsaufbaus

In ein Gefäß des Volumens V wird ein Gas gepumpt, so dass in dem Gefäß der Druck p herrscht. Auf der Oberseite des Gefäßes ist eine Röhre mit der Querschnittsfläche A angebracht. An dem Punkt $x = 0$ hat die Röhre ein kleines Loch. Befindet sich nun ein eng anliegender Pömpel in der Glasröhre [kein Gas kann an ihm vorbeiströmen], so führt dieser eine ungedämpfte Schwingung aus. Befindet sich der Pömpel der Masse m unterhalb des Loches, so drückt ihn der Überdruck in der Röhre nach oben, hat er das Loch passiert, so kann ihn das Gas nicht weiter nach oben drücken, da es aus dem Loch herausströmt. Nun fällt der Pömpel aufgrund seiner Gewichtskraft mg wieder nach unten. Aus der Schwingungsdauer T lässt sich κ bestimmen.

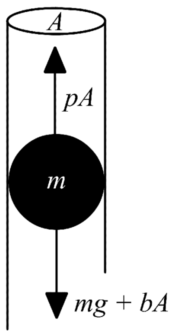


Abbildung 2: Gleichgewichtslage des Pömpels

Herrscht außerhalb des Gefäßes der Luftdruck b, so ist der Pömpel im Gleichgewicht, also wenn

$$mg + b \cdot A \;=\; p \cdot A \qquad \Leftrightarrow \qquad p \;=\; b + \frac{mg}{A}$$

gilt. Schwingt der Pömpel nun um Δx über die Gleichgewichtslage hinaus, so erhöht sich der Gasdruck p im Gefäß um dp. Es gilt

$$m\ddot{x} \;=\; A \cdot \mathrm{d}p \;.$$

Um dp zu berechnen benutzt man die Poisson-Gleichung [siehe 2.3]. Es gilt also $pV^\kappa = const$. Dies leitet man nun nach V ab:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(pV^\kappa) &= \mathrm{d}p \cdot V^\kappa + p \cdot \kappa V^{\kappa-1} \cdot \mathrm{d}V \;=\; 0 \\
V^\kappa \mathrm{d}p &= -\kappa V^{\kappa-1} p \mathrm{d}V \\
\mathrm{d}p &= -\kappa p \frac{\mathrm{d}V}{V} \;=\; -\,\kappa p \frac{A\ \Delta x}{V}.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich eine Differentialgleichung für die Schwingung des Pömpels:

$$m\ddot{x} \;=\; A \cdot \mathrm{d}p \;=\; -\,\kappa p \frac{A^2\ x}{V} \qquad \Leftrightarrow \qquad m\ddot{x} + \frac{\kappa p A^2}{V} x \;=\; 0.$$

Für diese allgemeine Schwingungsgleichung ist die Lösung für die Schwingungsdauer

$$T \;=\; 2\pi \sqrt{\frac{mV}{\kappa p A^2}}.$$

Stellt man dies nach κ um, ergibt sich

$$\kappa \;=\; \frac{4\pi^2 mV}{pA^2T^2}.$$

Nun schwingt die Luft in dem Rohr ebenfalls mit, also ist die Masse $m_{eff} = m + m_L$. Die Querschnittsfläche des Rohres ist $A = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$.

Somit erhält man die Formel, die in der Auswertung benötigt wird:

$$\kappa \;=\; \frac{64 m_{eff} V}{p d^4 T^2}.$$

2.6 Berechnung des Adiabatenexponent nach Clement-Desormes

Diese Methode nutzt die Druckmessung vor und nach einer adiabatisch ablaufenden Expansion. In einem Behälter wird der Druck mit Hilfe eines Blasebalges erhöht. Nach einem Temperaturausgleich mit der Umgebungstemperatur wird der Druck gemessen [Zustand 1]. Nun wird das Gas über ein Ventil expandiert [Zustand 2]. Jetzt wird das Ventil geschlossen und man hat man wieder das Ausgangsvolumen bei einer geringeren Temperatur [Zustand 2]. Nach einem Temperaturausgleich wird wieder der Druck gemessen [Zustand 4].

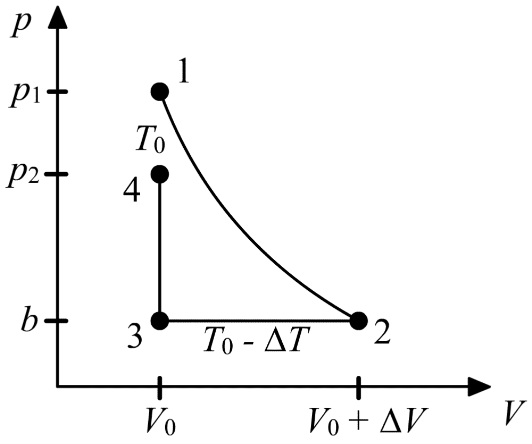


Abbildung 3: pV Diagramm des Versuchs

Zustand	Druck	Volumen	Temperatur
1	$b + \Delta p_1$	V_0	T_0
2	b	$V_0 + \Delta V$	$T_0 - \Delta T$
3	b	V_0	$T_0 - \Delta T$
4	$b + \Delta p_2$	V_0	T_0

Der Übergang von Zustand 1 zu Zustand 2 ist adiabatisch. Somit lässt sich die Poisson-Gleichung $pV^\kappa = const$ anwenden.

$$\begin{aligned} p_1 V_1^\kappa &= p_2 V_2^\kappa \\ (b + \Delta p_1) V_0^\kappa &= b(V_0 + \Delta V)^\kappa. \end{aligned}$$

Teilt man beide Seiten der Gleichung durch b und benutzt die für $\Delta V \ll V_0$ geltende Näherung $(V_0 + \Delta V)^\kappa \approx V_0^\kappa + \kappa V_0^{\kappa-1} \Delta V$, folgt

$$\frac{b + \Delta p_1}{b} V_0^\kappa = V_0^\kappa + \kappa V_0^{\kappa-1} \Delta V$$

$$\begin{aligned} 1+\frac{\Delta p_1}{b} &\approx 1+\kappa\frac{\Delta V}{V} \\ \frac{\Delta p_1}{b} &\approx \kappa\frac{\Delta V}{V} \\ \frac{\Delta p_1}{\kappa\, b} &\approx \frac{\Delta V}{V}. \end{aligned}$$

Für die Temperaturen der Zustände 1 und 2 lässt sich die Poisson-Gleichung $TV^{\kappa-1} = const$ anwenden.

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}.$$

Eingesetzt ergibt sich

$$(T_0-\Delta T)(V_0+\Delta V)^{\kappa-1} = T_0 V_0^{\kappa-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\Delta T}{T_0} = (\kappa-1)\frac{\Delta V}{V_0}.$$

Setzt man $\Delta V/V$ aus der ersten Gleichung ein, folgt

$$\frac{\Delta T}{T_0} = (\kappa-1)\frac{\Delta p_1}{\kappa\, b}.$$

Da sich beim Übergang zwischen Zustand 3 und 4 das Volumen nicht ändert, kann man die Volumina gleichsetzten. Für ideale Gase gilt $V = nRT/p$.

$$\begin{aligned} V_3 &= V_4 \\ \frac{nR(T_0-\Delta T)}{b} &= \frac{nRT_0}{b+\Delta p_2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{b}{b+\Delta p_2} = \frac{T_0-\Delta T}{T_0} = 1-\frac{\Delta T}{T_0}.$$

Setzt man nun das oben hergeleitete Ergebnis für $\Delta T/T_0$ ein und formt nach κ um, erhält man schließlich

$$\kappa = \frac{b\Delta p_1 + \Delta p_1 \Delta p_2}{b(\Delta p_1 - \Delta p_2) + \Delta p_1 \Delta p_2},$$

was sich für $\Delta p_1 \Delta p_2 \ll b$ vereinfachen lässt zu

$$\kappa \approx \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2}.$$

Da nun für die Druckänderung im Manometer $\Delta p = \varrho g \Delta h$ gilt, wobei ϱ die Dichte des Öls, g die Schwerebeschleunigung und Δh die Höhenänderung am Manometer ist, vereinfacht sich κ schließlich zu

$$\kappa \approx \frac{\varrho g \Delta h_1}{\varrho g \Delta h_1 - \varrho g \Delta h_2} = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 - \Delta h_2}.$$

Dies ist die Formel, die in der Auswertung benötigt wird. Da sich ϱ rauskürzt, braucht man es für die Auswertung nicht.

3 Versuchsdurchführung

3.1 Methode nach Rüchardt

Zunächst sollte überprüft werden, ob an den Gasanschlüssen ein Überdruck von $0,5 - 1$ *bar* eingestellt worden ist. Dies ist wichtig, da der Pömpel sonst nicht in Schwingung gebracht werden kann.

Nun wird das auf dem Tisch angebrachte Ventil geöffnet. Der Pömpel sollte sich anheben. Dann das Entlüftungsventil öffnen, und die Apparatur ca. 3 Minuten mit dem Gas durchspülen. Dieser beschleunigte Gasaustausch sollte bei jedem Gaswechsel durchgeführt werden.

Nun wird das Entlüftungsventil geschlossen, und das am Tisch befestigte Ventil so weit aufgedreht, bis sich eine symmetrische Schwingung um die kleine Öffnung im Glasrohr ergibt. Es ist darauf zu achten, dass der Pömpel nicht an das obere Ende des Rohres anschlägt.

Die Stoppuhr wird auf die gewünschte Anzahl der Schwingungen eingestellt, und die Messung mit dem Taster gestartet. Die Schwingungsdauer ist für jede der drei Gasarten zu messen: 10 mal für eine Schwingung und jeweils 3 mal für 10, 50 und 100 Schwingungen. Es sollte bei jeder Gasart die ungefähre Schwingungsamplitude gemessen werden.

Nun sollten noch die Daten an der Apparatur notiert, der Luftdruck im Raum und die Strecke zwischen des Luftschlitzes und dem oberen Ende des Rohres gemessen werden.

3.2 Methode nach Clement-Desormes

Durch den Blasebalg wird der Druck in der Apparatur erhöht. Nach einiger Zeit wird der Überdruck Δh_1 am Manometer abgelesen. Nun wird das Entlüftungsventil für kurze Zeit geöffnet. Nach einiger Zeit wird wieder der Überdruck Δh_2 abgelesen. Die Messung sollte mehrmals für verschiedene Öffnungszeiten [ca. 0,1 s; 1 s; 5 s] wiederholt werden.

4 Auswertung

4.1 Rüchardt

κ lässt sich nun mit der in 2.5 hergeleiteten Formel berechnen. Es gilt

$$\kappa = \frac{64 m_{eff} V}{T^2 p d^4}.$$

Die effektive Masse m_{eff} berechnet sich aus der Summe der Masse des Pömpels und der mitschwingenden Luftsäule. Es gilt

$$m_{eff} = m + m_l = m + hA\varrho,$$

wobei m die Masse des Pömpels, $h = 11,5\ cm$ die Strecke zwischen dem Luftschlitz und dem oberen Rohrende, A die Querschnittsfläche des Rohres und $\varrho = 1,204\ kg/m^3$ die Dichte der Luft bei einer Temperatur von $20°C$ ist.

p ist der Druck in der Apparatur für den

$$p \;=\; b + \frac{mg}{A}$$

gilt. Dabei ist b der äußere Luftdruck und g die Schwerebeschleunigung.

Wir maßen einen Luftdruck von $b = 742,8$ Torr $= 742,8 \cdot 101325/760\ Pa = 99031\ Pa$ mit einem Fehler von $\sigma_b = 0,1$ Torr $\approx 14\ Pa$. Es ergibt sich ein Druck von $p = 99662\ Pa$ mit dem Fehler $\sigma_p = \sigma_b = 14\ Pa$.

An der Apparatur lasen wir folgende Werte ab: $m = 4,954\ g$, $d = 9,905\ mm$ und $V = 2211\ cm^3$.

Es ergaben sich folgende Werte für κ:

Perioden	κ Luft	σ_{κ_L}	κ Argon	σ_{κ_A}	κ CO_2	σ_{κ_C}
1	1.47148	0.01472	1.68498	0.01686	1.39122	0.01392
10	1.46735	0.01468	1.61497	0.01616	1.40856	0.01409
50	1.47023	0.01471	1.64452	0.01645	1.39972	0.014
100	1.46855	0.01469	1.68363	0.01684	1.37434	0.01375

Der jeweilige Fehler ergibt sich durch das Gesetz der Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_\kappa \;=\; \sqrt{\sigma_p^2\left(\frac{\partial\kappa}{\partial p}\right)^2 + \sigma_T^2\left(\frac{\partial\kappa}{\partial T}\right)^2} \;=\; \frac{64Vm_{eff}}{T^2d^4p}\sqrt{\frac{\sigma_p^2}{p^2} + \frac{4\sigma_T^2}{T^2}}\;,$$

wobei $\sigma_T = 0,000001 + \text{Messwert} \cdot 0,005\,s$ der systematische Fehler der Lichtschranke ist.

Bestimmt man den gewichteten Mittelwert ergibt sich

κ Luft	σ_{κ_L}	κ Argon	σ_{κ_A}	κ CO_2	σ_{κ_C}
1.469	0.008	1.656	0.009	1.393	0.007

Durch den in 2.4 hergeleiteten Zusammenhang

$$\kappa \;=\; \frac{f+2}{f} \qquad \Leftrightarrow \qquad f = \frac{2}{\kappa - 1}$$

können wir nun die Freiheitsgrade der jeweiligen Gase berechnen. Für den entsprechenden Fehler gilt

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_\kappa^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \kappa}\right)^2} = \frac{2\ \sigma_\kappa}{(\kappa-1)^2}.$$

f Luft	σ_{f_L}	f Argon	σ_{f_A}	f CO_2	σ_{f_C}
4.26	0.07	3.05	0.04	5.09	0.09

4.2 Clement-Desormes

Nach der in 2.6 hergeleiteten Formel berechnet sich κ durch

$$\kappa = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 - \Delta h_2}.$$

Der Fehler ergibt sich durch das Gesetz der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_\kappa = \sqrt{\sigma_{\Delta h_1}^2 \left(\frac{\Delta h_2}{(\Delta h_1 - \Delta h_2)^2}\right)^2 + \sigma_{\Delta h_2}^2 \left(\frac{\Delta h_1}{(\Delta h_1 - \Delta h_2)^2}\right)^2}.$$

Wobei wir $\sigma_{\Delta h_1} = \sigma_{\Delta h_2} = 0,002\ m$ geschätzt haben.

Öffnungszeit	Δh_1	Δh_2	κ_L	σ_{κ_L}
0.1 s	43	29	3.071	0.001
1 s	58.5	28	1.918	0.001
5 s	62.5	11.5	1.226	0.001

5 Diskussion

5.1 Rüchardt

Da Luft und CO_2 5 Freiheitsgrade[1] haben [siehe dazu Versuch 06: Spezifische Wärme der Luft und Gasthermometer], wäre der theoretisch erwartete Wert von κ

$$\kappa_{L,C} = \frac{f+2}{f} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

[1] Nach http://de.wikipedia.org/wiki/Freiheitsgrad, Aufrufdatum 28. Juli 2005, hat CO_2 sogar 6 Freiheitsgrade: "Kohlendioxid (dreiatomig, linear) weist sechs Freiheitsgrade auf, da hier der Schwingungsfreiheitsgrad bereits bei Normaltemperatur verfügbar ist".

Für Luft haben wir einen zu hohen Wert berechnet. Dies liegt vielleicht daran, dass der Druck in der Apparatur stark variierte. Die Werte für CO_2 und Argon sind sehr zufriedenstellend. Argon ist ein Edelgas und hat somit 3 Freiheitsgrade. Der theoretische Wert für κ wäre somit

$$\kappa_A = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{3} \approx 1,66.$$

5.2 Clement-Desormes

Aufgrund einer ungenauen Beschreibung im Praktikumsskript haben wir nur sehr wenig Messungen durchgeführt. Außerdem fehlte in unserem Manometer etwas Öl, so dass wir ein Offset beim Ablesen hatten. Unsere Werte sind sehr seltsam, doch kann man erkennen, dass die Öffnungszeit von 5 s schon etwas zu lang war. Für lange Öffnungszeiten wird schon ein Temperaturausgleich stattfinden, so dass sich kein Überdruck mehr einstellt. Also strebt κ für lange Öffnungszeiten gegen 1. Bei dem Ergebnis für eine Öffnungszeit von $0,1$ s ist es möglich, dass wir das Ventil nicht richtig geöffnet haben. Somit konnte kein Druckausgleich stattfinden, und der Überdruck nach dem Temperaturausgleich war zu hoch. Somit war auch der Wert für κ zu hoch.

5.3 Verbesserungsvorschläge

Der Luftdruck sollte noch etwas höher eingestellt werden, so dass die einzelnen Gruppen auch parallel arbeiten können. Zudem sollte der Versuchsaufbau ganz links mit der kurzen Strecke zwischen Luftschlitz und Rohrende ersetzt werden. Bei diesem Aufbau war es sehr schwer den Gasdruck so zu regulieren, dass sich eine gleichmäßige Schwingung ergab, ohne dass der Pömpel sofort an das Rohrende stieß, bzw. dass der Pömpel überhaupt schwang.

5.4 Abschließende Kommentare

Diesesmal hatten wir ein wenig Pech mit unserer Apparatur. Der Pömpel wollte einfach nicht so richtig schwingen, und blieb manchmal einfach in der Mitte des Rohres stehen. Die Beschreibung von dem 2. Versuchsteil ist eine Katastrophe. Das Praktikumsskript war hier sehr ungenau, so dass wir wahrscheinlich völlig falsche Werte am Manometer abgelesen haben.[Hauke]

Teil 2 war total dumm der Aufbau, sonst immerhin ganz lustig. [Daniel]