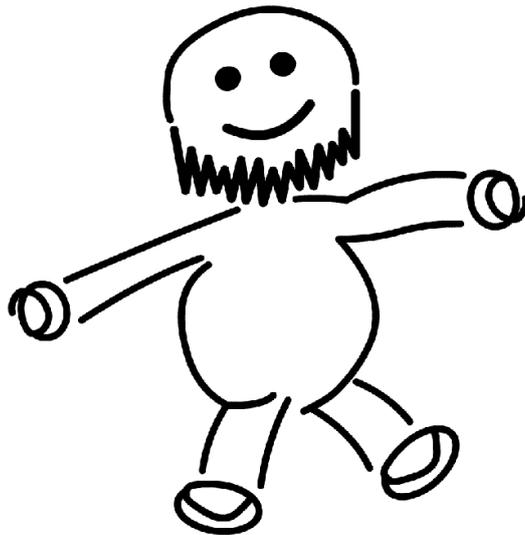


# Physikalisches Praktikum für das Hauptfach Physik

Versuch 09

## Diffusion

Sommersemester 2005



Name:	Daniel Scholz
Mitarbeiter:	Hauke Rohmeyer
E-Mail:	physik@mehr-davon.de
Gruppe:	13
Assistent:	Dagmar Steinhauser
Durchgeführt am:	09. Juni 2005
Protokoll abgeben:	30. Juni 2005
Protokoll verbessert:	14. Juli 2005

Unterschrift:

Testiert: \_\_\_\_\_

## 1 Einleitung

In diesem Versuch wird die Diffusion von Methylenblau in Wasser untersucht. Eine räumliche Inhomogenität einer physikalischen Größe erzeugt einen Ausgleichsstrom. In diesem Versuch handelt es sich um eine Konzentrationsinhomogenität, die durch einen Massestrom ausgeglichen wird. Die Konzentration von Methylenblau wird hierbei als Funktion des Ortes und der Zeit untersucht. Somit können die Fickschen Gesetze verifiziert, und die Diffusionskonstante  $D$  bestimmt werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Brownsche Molekularbewegung

Die Brownsche Molekularbewegung ist eine Eigenbewegung der Moleküle. Diese wurde vom schottischen Botaniker Robert Brown im Jahr 1827 wiederentdeckt, in dem er Pollen in einem Wassertropfen beobachtete [schon 1785 beobachtete Jan Ingenhousz diese Bewegung von Holzkohlestaub auf Alkohol]. Die Erklärung für diese unregelmäßig zuckende Bewegung des Pollens ist, dass die Moleküle des Wassertropfens gegen die Pollenteilchen stoßen.

Diffusion und Osmose basieren auf dieser Molekularbewegung.

### 2.2 Die Fickschen Gesetze

Diffusion findet statt, wenn die Teilchenkonzentration  $c(x)$  keine konstante Funktion ist. Es folgt also ein Diffusionsstrom, dessen Stromdichte  $\vec{j}$  dem Konzentrationsgefälle  $\vec{\nabla} c$  entgegengesetzt ist. Der Teilchenstrom fließt also von Gebieten mit hoher Konzentration in Gebiete mit niedriger Konzentration. Durch diesen Zusammenhang erhält man das 1. Ficksche Gesetz, mit dem materialspezifischen Diffusionskoeffizienten  $D$

$$\vec{j}(\vec{x}) = -D \vec{\nabla} c.$$

Nun verlangt aber die Erhaltung der Teilchenzahl, dass die Teilchenzahldichte in einem bestimmten Volumen abnimmt, wenn mehr Teilchen aus- als einströmen.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x})$$

Setzt man nun in diese Gleichung das 1. Ficksche Gesetz ein, erhält man die allgemeine Diffusionsgleichung, das 2. Ficksche Gesetz:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) = D\Delta c.$$

## 2.3 Mathematische Lösung der Diffusionsgleichung

Das 2. Ficksche Gesetz ist eine partielle Differentialgleichung, die z.B. durch eine Fouriertransformation gelöst werden kann.

Werden beide Seiten des 2. Fickschen Gesetztes fouriertransformiert, so erhält man

$$\frac{\partial F(c)}{\partial t} = D\Delta F(c) = D\Delta \int_{-\infty}^{\infty} \vec{j}(c) e^{ikc} dc = -k^2 DF(c).$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung, die mit dem Exponentialansatz gelöst werden kann. Man erhält

$$F(c) = A e^{-k^2 Dt} \text{ mit } A := F(c_{t=0}).$$

Nun lassen sich die Anfangsbedingungen für unseren speziellen Versuchsaufbau zum Zeitpunkt  $t = 0$  wie folgt formulieren:

$$c(x, 0) = \begin{cases} c_0 & \text{für } x \leq 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

Somit erhält man die Fouriertransformierte für  $t = 0$ :

$$F(c_{t=0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 c_0 e^{ikx} dx.$$

Wird diese Lösung nun rücktransformiert erhält man nach einigen Umformungen

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right],$$

wobei erf die Gaußsche Fehlerfunktion ist, die wie folgt definiert ist:

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-v^2) dv.$$

## 2.4 Photowiderstand

Der Photowiderstand ist ein Widerstand, dessen Wert von der Intensität des einstrahlenden Lichtes abhängt. Bei steigender Lichtintensität sinkt sein Widerstand. Der Photowiderstand ist ein Halbleiter und besteht oft aus einer Cadmiumsulfid-Schicht. Da in dem Halbleiter kaum freie Elektronen zur Verfügung stehen, kann kaum elektrischer Strom fließen. Wird nun der Photowiderstand mit Licht bestrahlt, werden die Atome angeregt. So stehen zusätzliche Elektronen zur Verfügung, es kann mehr Strom fließen, und somit ist der Widerstand kleiner.

## 2.5 Wheatstonesche Brückenschaltung

Nach dem Ohmschen Gesetz  $U = R \cdot I$  lässt sich ein Widerstand messen, indem man die Spannung  $U$  an ihm und den Strom  $I$  durch ihn bestimmt, und beide durcheinander teilt. Durch die Innenwiderstände der Messgeräte würde die Messung jedoch sehr ungenau sein. Man vermeidet dies, indem man stromlos misst. In einer **Wheatstone-Brücke** schaltet man den zu bestimmenden Widerstand  $R_x$  [in diesem Versuch den Photowiderstand] mit drei bekannten Widerständen zusammen [siehe Abbildung 1], von denen mindestens einer variabel ist [z.B.  $R_v$  - in diesem Versuch ein Potentiometer].

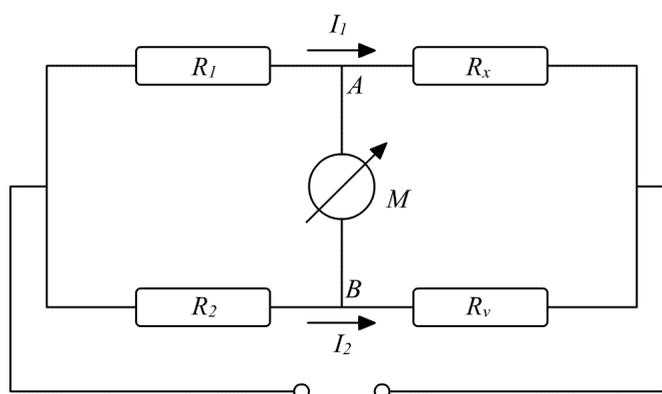


Abbildung 1: Wheatstone-Brücke

Nun wird die Brücke abgeglichen:  $R_v$  wird so eingestellt, dass durch das Messinstrument  $M$  kein Strom fließt. Das ist der Fall wenn die Spannung zwischen  $A$  und  $B$  verschwindet, was bedeutet, dass die Spannungsabfälle an  $R_x$  und  $R_v$  gleich sind [also auch die an  $R_1$  und  $R_2$ ]. Weil nun durch  $M$  kein Strom fließt, geht der Strom  $I_1$  bei  $A$  vollständig weiter durch  $R_x$ , und der Strom  $I_2$  an  $B$  durch  $R_v$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 I_1 R_x &= I_2 R_v \quad \text{und} \quad I_1 R_1 = I_2 R_2 \\
 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} &= \frac{R_v}{R_x} = \frac{R_2}{R_1} \\
 \Rightarrow R_x &= R_v \frac{R_1}{R_2}.
 \end{aligned}$$

Da  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_v$  bekannt sind, lässt sich  $R_x$  also bestimmen.

### 3 Versuchsdurchführung

#### 3.1 Versuchsaufbau

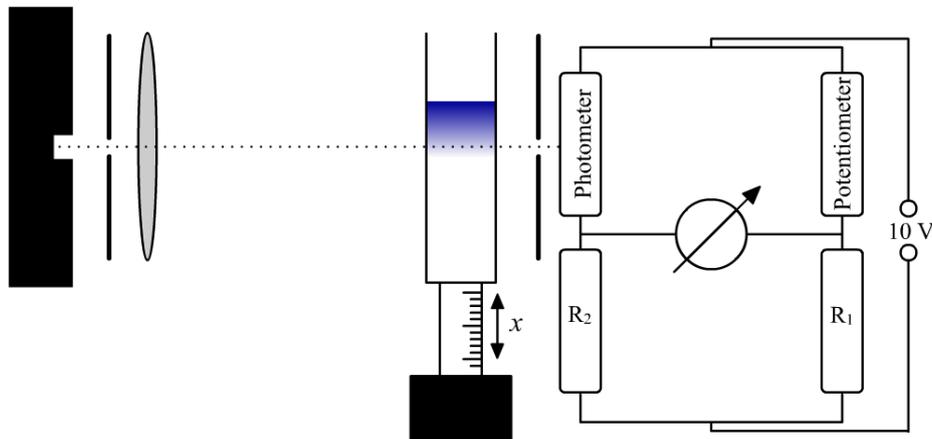


Abbildung 2: Schema des Versuchsaufbaus

In einer Glasküvette wird Methylenblau über Wasser geschichtet. Das vertikale Konzentrationsprofil wird mittels der Absorption des Lichtes der Quecksilberdampfampe über einen Photowiderstand gemessen. Hierzu ist dieser an eine Wheatstone-Brückenschaltung angeschlossen. Die Brückenschaltung wird mit Hilfe eines Graufilters auf eine bestimmte Konzentration abgeglichen. Nun kann der Ort dieser Konzentration als Funktion der Zeit durch Höhenverstellung der Küvette gemessen werden. Wenn die Brückenschaltung für verschiedene Konzentrationen von Methylenblau geeicht wird, so kann das Konzentrationsprofil innerhalb der Küvette gemessen werden.

#### 3.2 Versuchsdurchführung

Zunächst wird die Wheatstone-Brücke mit Kabeln zusammengesteckt. Hierbei ist zu beachten, dass der Widerstand  $R_1$  möglichst klein [5,1 oder 20  $k\Omega$ ], und der Widerstand  $R_2$  groß [82  $k\Omega$ ] gewählt wird [siehe Abbildung 2]. Es sollte nun ausprobiert werden, ob die Brückenschaltung auf alle Konzentrationen, die für den Versuch benötigt werden, geeicht werden kann. Notfalls müssen zwei Potentiometer in Reihe geschaltet werden.

Für Messung 1 wird die Brücke nun auf die Konzentration  $c_0/16$  geeicht. Dann wird eine Küvette zu 3/4 mit Wasser gefüllt und Methylenblau darüber geschichtet. Die Küvette wird in die Halterung gesteckt, wobei darauf geachtet werden sollte, dass die Halterung nahe am Photometer steht, und die Mikrometerschraube im weiteren Versuchsablauf noch weiter nach oben gedreht werden kann [ca. 3  $mm$ ].

In den nächsten 30 Minuten wird die Position der Küvette mittels der Mikrometerschraube immer so eingestellt, dass das Ampèremeter keinen Strom

misst. Alle 30 Sekunden wird die Skala an der Mikrometerschraube abgelesen.

Für Messung 2 wird die 1. Küvette vorsichtig zur Seite gestellt und die Brückenschaltung auf die Konzentration  $c_0/32$  geeicht. Mit einer zweiten Küvette wird genauso verfahren wie in Messung 1.

Für Messung 3 wird die Küvettenhalterung so eingestellt, dass durch hin- und herschieben der Halterung leicht zwischen der Küvette und einem daneben eingestecktem Graufilter gewechselt werden kann. 40 Minuten nach Messung 2 wird die Konzentrationsverteilung innerhalb der Küvette bestimmt. Dafür wird die Brückenschaltung hintereinander auf die Konzentrationen  $c_0/2$ ,  $c_0/4$ ,  $c_0/8$ ,  $c_0/16$  und  $c_0/32$  geeicht und jeweils der dazugehörige Wert der Mikrometerschaltung notiert. Danach wird die Konzentrationsverteilung nochmals in umgekehrter Reihenfolge gemessen. Nach Abschluss der Messung wird die Zeit notiert, die für den gesamten Vorgang in Anspruch genommen wurde.

100 Minuten nach Beginn von Messung 1 wird in Messung 4 das Konzentrationsprofil der 2. Küvette bestimmt. Es wird genauso wie in Messung 3 verfahren.

## 4 Auswertung

### 4.1 Verlauf der Messungen

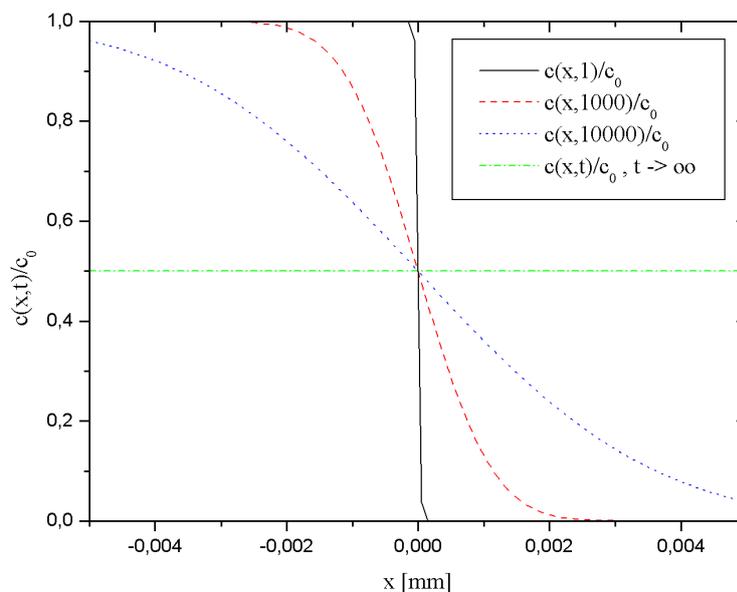


Abbildung 3: Diffusionskurven für verschiedene Messzeiten

In der Graphik sind Diffusionskurven für verschiedene Messzeiten  $t$  aufgetragen. Die Diffusionskurven berechnen sich nach

$$\frac{c(x,t)}{c_0} = \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right),$$

wobei  $D = 4 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$  angenommen wurde.

Bei Messung 1 und 2 wird der Ort einer bestimmten Konzentration in Abhängigkeit von der Zeit bestimmt. In der Graphik bewegt man sich also parallel zur x-Achse.

Bei Messung 3 und 4 wird die Zeit nahezu konstant gehalten und verschiedene Konzentrationen in Abhängigkeit vom Ort gemessen. In der Graphik bewegt man sich also auf einer der eingezeichneten Kurven.

Nachdem die beiden Flüssigkeiten aufeinander geschichtet wurden besteht zwischen ihnen eine klare Trennschicht. Durch die Diffusion werden die beiden Flüssigkeiten ineinander vermischt, und so stellt sich für  $t \rightarrow \infty$  ein stationärer Zustand ein.

## 4.2 Bestimmung des Diffusionskoeffizienten

### Messung 1

Die in 2.3 hergeleitete Formel muss nach  $D$  aufgelöst werden.

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) = 1 - \frac{2 c(x, t)}{c_0}$$

Wenn man nun die konstante Konzentration  $c(x, t) = \frac{c_0}{16}$  einsetzt, ergibt sich

$$\operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) = 1 - \frac{2 c(x, t)}{c_0} = 1 - \frac{2 \frac{c_0}{16}}{c_0} = 1 - \frac{2}{16} = \frac{7}{8}.$$

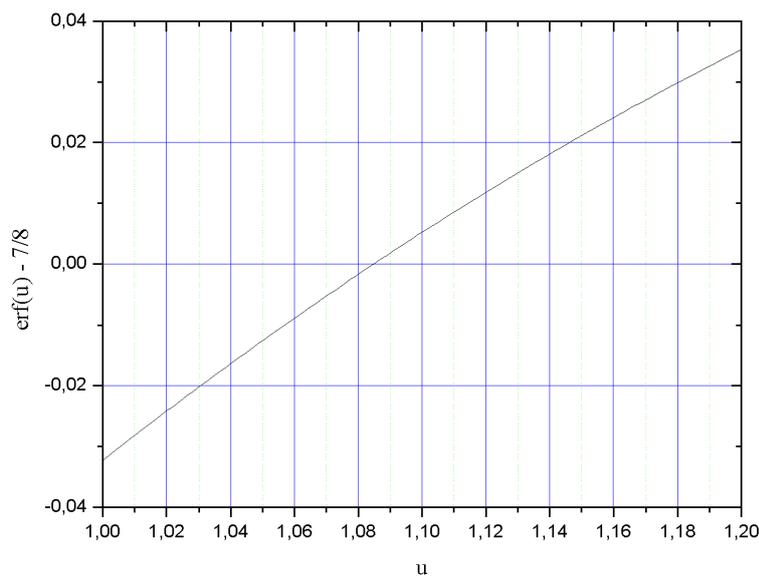


Abbildung 4: Gaußsche Fehlerfunktion

Nun liest man in Abbildung 4 ab, dass  $\operatorname{erf}(1,085) - \frac{7}{8} \approx 0$ , also  $\operatorname{erf}(1,085) \approx \frac{7}{8}$  gilt. Daraus folgt

$$\frac{x}{\sqrt{4Dt}} = 1,085 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{x^2}{t} \frac{1}{4 \cdot 1,085^2},$$

was sich mit  $m := \frac{x^2}{t}$  vereinfacht zu

$$D = \frac{m}{4,7089}.$$

Um  $m$  zu bestimmen, wird das Quadrat der Diffusionsstrecke gegen die Zeit aufgetragen. Die Auftragung ergibt eine Gerade, da  $4,7089^{-1}$  sowie  $D$  konstant sind. Somit muss auch  $\frac{x^2}{t} = m$  konstant sein.

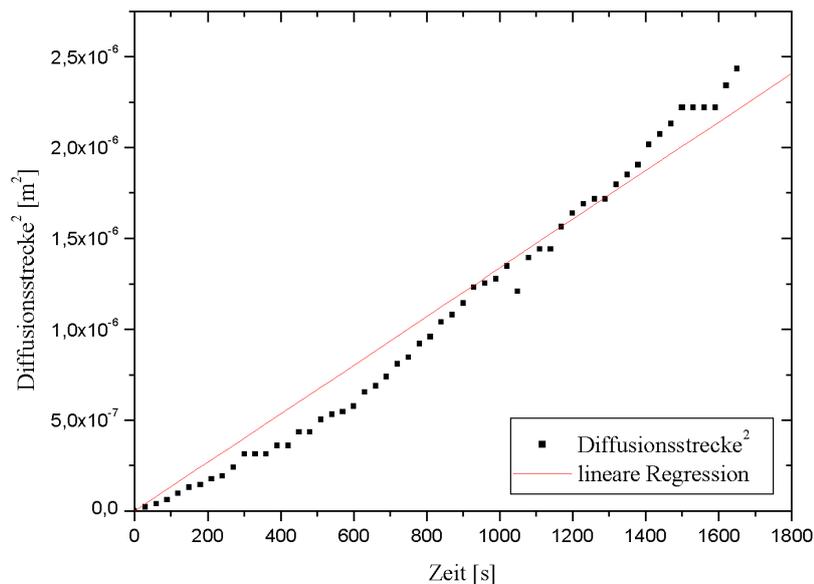


Abbildung 5: Bestimmung von  $m$

Durch lineare Regression ergibt sich  $m = 1,34 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$  mit dem Fehler  $\sigma_m = 0,02 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Also ist

$$D = \frac{1,34 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2}{4,7089 \text{ s}} = 2,84 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Der Fehler ergibt sich durch das Gesetz der Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_m^2 \left( \frac{\partial D}{\partial m} \right)^2} = \sqrt{\frac{\sigma_m^2}{4,7089}} = 0,10 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

## Messung 2

In Messung 2 gilt  $[c(x, t) = \frac{c_0}{32}]$ , also

$$\operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) = 1 - \frac{2 \frac{c_0}{32}}{c_0} = \frac{15}{16}.$$

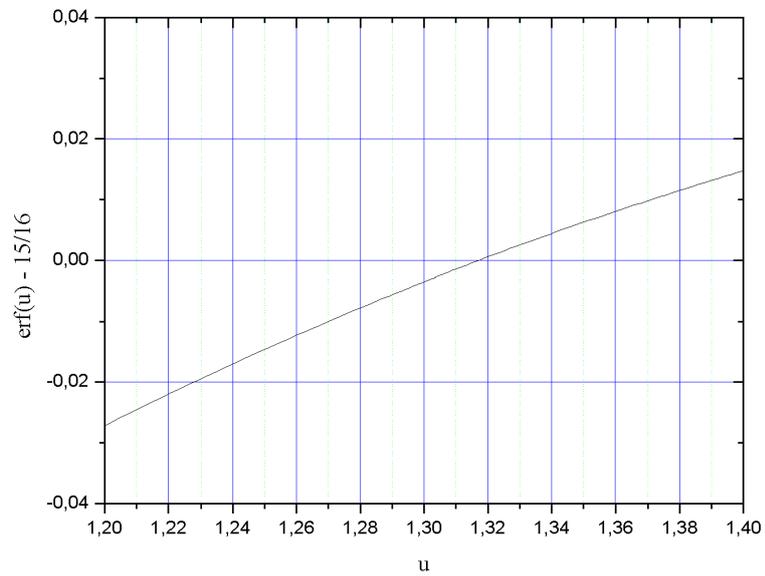


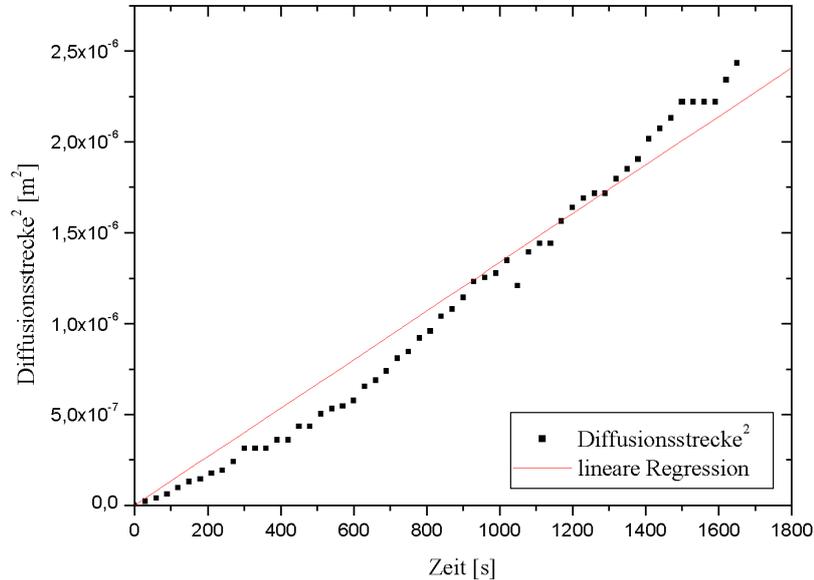
Abbildung 6: Gaußsche Fehlerfunktion

In Abbildung 6 liest man ab, dass  $\text{erf}(1,317) \approx \frac{15}{16}$  gilt.

Daraus folgt analog zur Berechnung von  $D$  in Messung 1

$$D = \frac{m}{4 \cdot 1,317^2},$$

wobei  $m$  wieder mit linearer Regression ermittelt wird.

Abbildung 7: Bestimmung von  $m$ 

Es ergibt sich  $m = 2,16 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$  mit dem Fehler  $\sigma_m = 0,04 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Also ist

$$D = \frac{2,16 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2}{4 \cdot 1,317^2 \text{ s}} = 3,11 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

mit dem Fehler

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sigma_m^2}{4 \cdot 1,317^2}} = 0,29 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Wenn wir den gewichteten Mittelwert aus Messung 1 und 2 bilden, ergibt sich

$$D = 2,87 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

mit dem Fehler

$$\sigma_D = 0,10 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

### 4.3 Konzentrationsprofil

Mit dem errechneten Diffusionskoeffizienten lassen sich nun die theoretisch erwarteten Werte für das Konzentrationsprofil mit den gemessenen Werten vergleichen.

Leider konnten wir die Brückenschaltung nicht für die Konzentration  $c_0/2$

eichen, so dass diese Messwerte fehlen.

Wenn man nun die in 2.3 hergeleitete Formel nach  $c(x, t)/c_0$  umstellt, lassen sich die theoretische erwarteten Werte des Konzentrationsprofils für eine konstante Zeit berechnen:

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{c(x, t)}{c_0} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right].$$

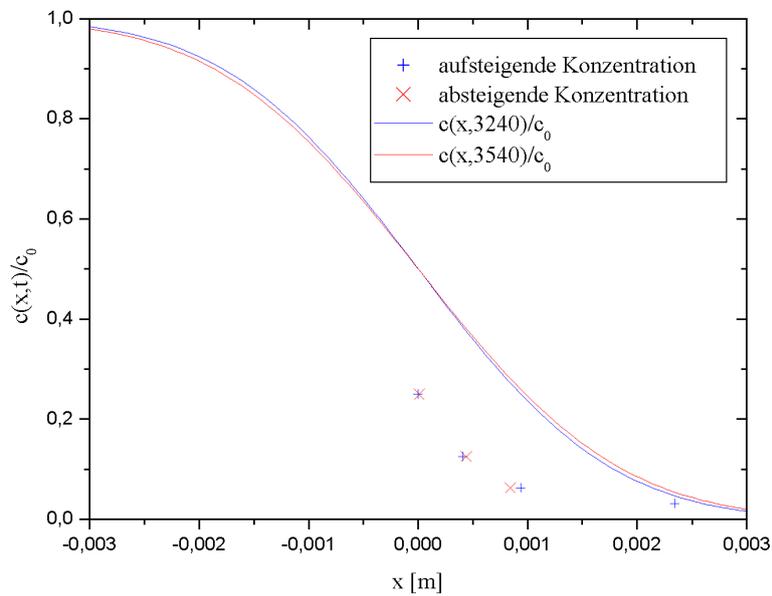


Abbildung 8: Konzentrationsprofil nach 54 Minuten

Wir haben ungefähr 5 Minuten für die Messung benötigt. In Abbildung 8 kann man sehen, dass die theoretisch erwarteten Werte sich in diesem Zeitraum nur minimal unterscheiden.

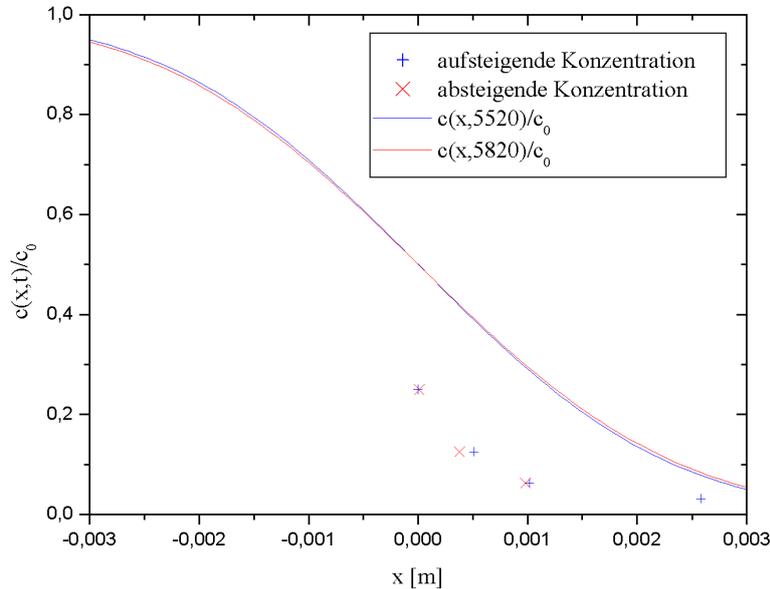


Abbildung 9: Konzentrationsprofil nach 92 Minuten

Auffällig ist, dass die Werte für die Konzentrationen  $c_0/4$ ,  $c_0/8$  und  $c_0/16$  deutlich unter den theoretisch erwarteten liegen.

Dies könnte daran liegen, dass die Graufilter die zur Eichung der Messbrücke benutzt wurden sehr stark verschmutzt waren bzw. keine einheitliche Farbe hatten. Es ist sehr fraglich, ob wir hier tatsächlich die richtigen Konzentrationen gemessen haben.

## 5 Diskussion

Die Werte für den Diffusionskoeffizienten weichen stark von dem im Praktikumsskript vorgeschlagenem Wert von  $D = 4 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$  ab. Auch die Fehlerbalken liegen nicht im erhofften Bereich.

Wir sind mit dem Endergebnis unzufrieden, doch haben wir schon während des Versuches gemerkt, dass unsere Messungen nicht sehr präzise waren. Es lassen sich sehr viele Fehlerquellen nennen.

Wie schon bemerkt, waren die Graufilter sehr stark verschmutzt, oder „ausgelaufen“. Auch die Küvetten waren verschmutzt. Also wurden wahrscheinlich nicht die richtigen Konzentrationen gemessen.

Bei Messung 1 und 2 war zudem unser Praktikumsaufbau falsch justiert. Die Küvette stand nicht nah genug am Photometer, so dass der Lichtstrahl

nicht auf die Küvette fokussiert war. Dies ist wohl die größte Fehlerquelle bei unserem Ergebnis. Da der Raum nicht abgedunkelt war, haben äußere Einflüsse den Widerstand des Photometers stark beeinflusst. Hat sich eine Wolke vor die Sonne geschoben, so haben wir längere Zeit den gleichen Widerstand gemessen, ohne die Position der Küvette zu verändern. Das gleiche passierte, wenn sich jemand von uns bewegte, oder vor dem Versuchsaufbau entlanglief.

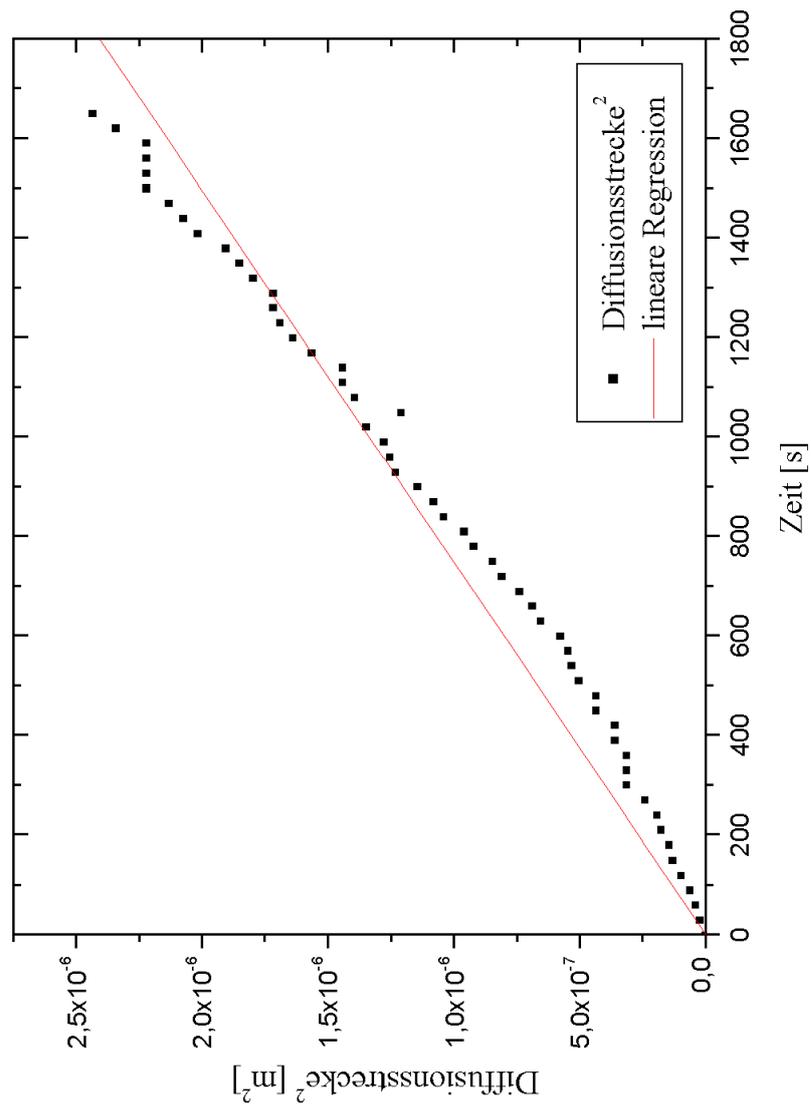
Zudem war das Ampèremeter nicht empfindlich genug, so dass die Messbrücke nur sehr ungenau geeicht werden konnte.

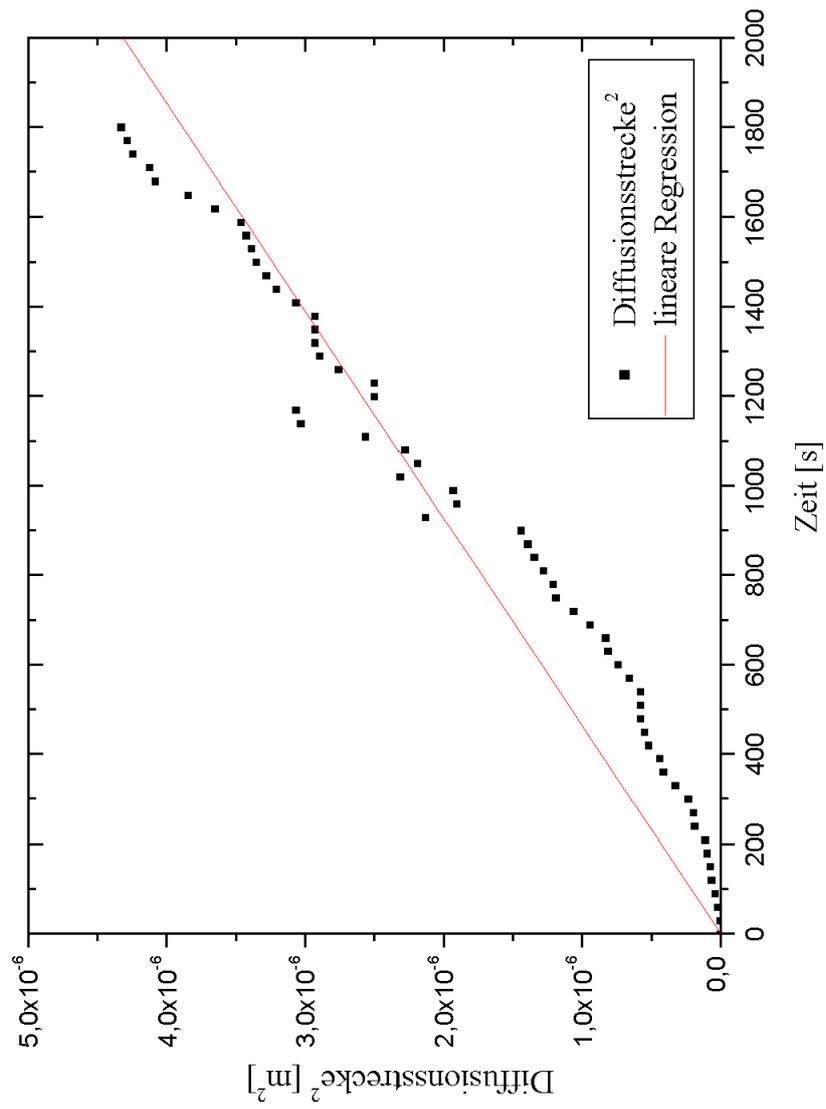
### **5.1 Verbesserungsvorschläge**

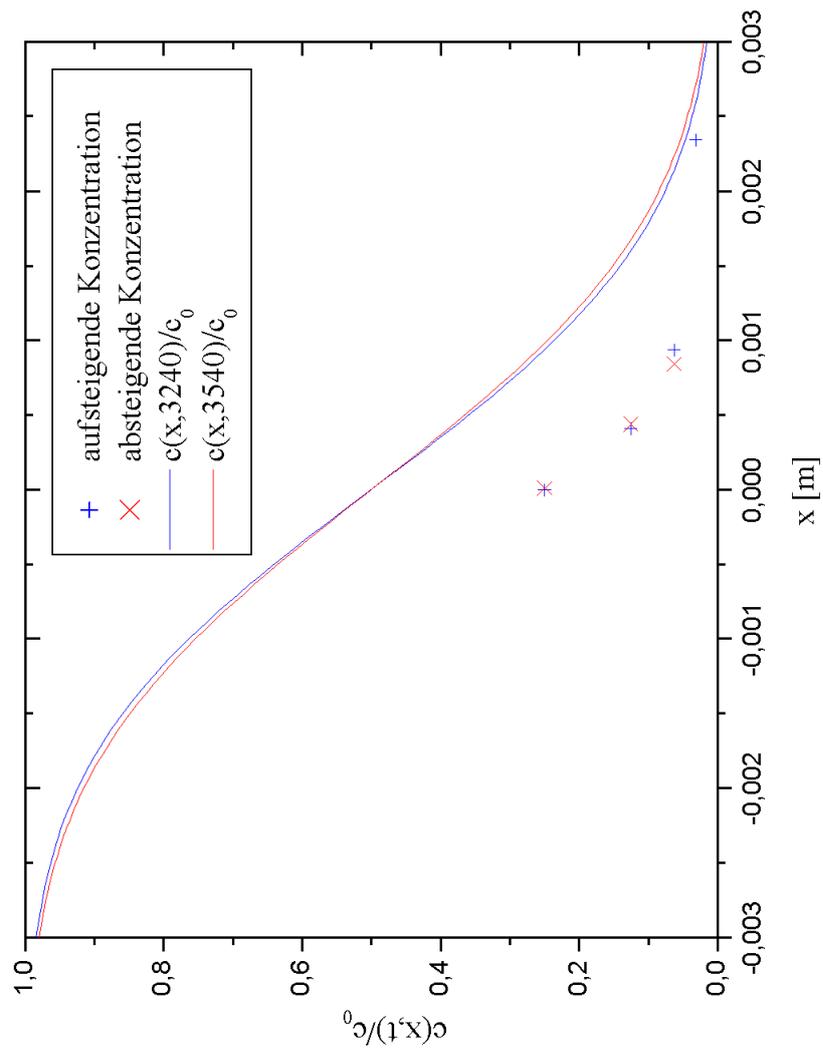
Die Potentiometer sollten repariert werden, bzw. es sollten noch mehr vorhanden sein, um sie evt. in Reihe schalten zu können. Nach dem Zusammenstecken der Messbrücke sollte der Assistent darum gebeten werden, die Jalousien herunterzufahren. Am besten wird das Licht noch gedimmt. Eventuelle Toilettengänge der Praktikanten sollten erledigt werden, so dass sie für den Rest der Messung ihren Platz nicht mehr verlassen müssen. Sollte der Praktikumsleiter den Raum betreten, so sollte dieser freundlich, aber bestimmt, darum gebeten werden die Tür schleunigst wieder von aussen zu schließen, da die Praktikanten sich auch über gute Messergebnisse freuen.

## 6 Anhang

### 6.1 Abbildung 5: Bestimmung von $m$ - Messung 1



6.2 Abbildung 7: Bestimmung von  $m$  - Messung 2

**6.3 Abbildung 8: Konzentrationsprofil nach 54 Minuten**

## 6.4 Abbildung 9: Konzentrationsprofil nach 92 Minuten

