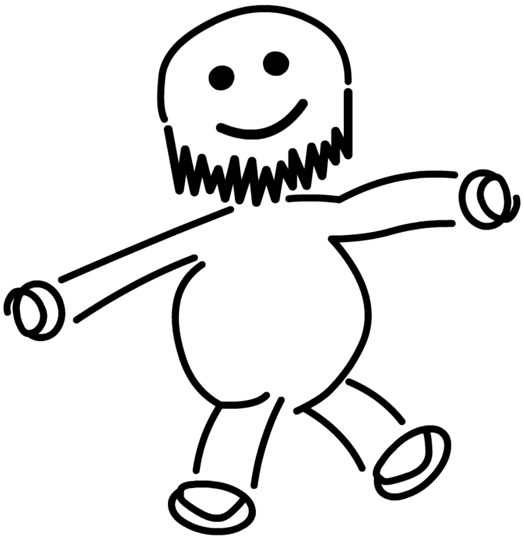
Physikalisches Praktikum für das Hauptfach Physik

Versuch 16

Das Magnetometer

Wintersemester 2005 / 2006



Name:	Daniel Scholz
Mitarbeiter:	Hauke Rohmeyer
EMail:	physik@mehr-davon.de
Gruppe:	B9

Assistent:	Tobias Liese
Durchgeführt am:	28. September 2005
Protokoll abgebeben:	29. September 2005
Protokoll verbessert:	—

Testiert: ____________________________

1 Einleitung

Ein Magnetometer ist eine Feldsonde für Magnetfelder. Mit dieser kann man die Stärke und die Richtung eines Magnetfeldes messen. In diesem Versuch soll das Magnetfeld von zwei Spulen sowie die Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes gemessen werden.

2 Theorie

2.1 Magnetismus

Magnetfelder werden von fliessenden Strömen oder durch Permanentmagnete erzeugt. Permanentmagnete waren schon sehr früh bekannt, damals bezeichnete man ***Magnete*** als Stoffe die Eisen anzogen. Die Feldlinien eines Permanentmagnetes können mit Eisenspänen „sichtbar“ gemacht werden. Ihr Verlauf ähnelt den Feldlininen zwischen positiven und negativen Ladungen eines Dipols, der Schluss auf magnetische „Ladungen“ ist jedoch falsch: wird ein Magnet geteilt, so entstehhen zwei neue Magneten, d.h. dass es keine magnetischen Monopole gibt.

Nimmt man nun solch einen magnetischen Dipol, so kann man jedoch die ***Polstärke*** der Pole als p und $-p$ definieren. Die ***Dipolachse*** ist die Verbindungslinie zwischen den beiden Polen im Abstand l. Nun kann das ***magnetische Dipolmoment*** $\vec{m}$ definiert werden. Es ist ein Vektor der in der Dipolachse liegt und zum Nordpol zeigt:

$$\vec{m} \;:=\; p \cdot \vec{l}\,.$$

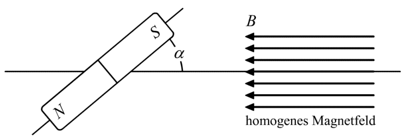


Abbildung 1: Drehmoment im homogenen Magnetfeld

$$\vec{M} \;=\; \vec{m} \times \vec{B} \qquad \Rightarrow \qquad |M| \;=\; m \cdot B \cdot \sin\alpha\,.$$

Das Drehmoment das auf einen magnetischen Dipol im homogenen Magnetfeld wirkt kann genutzt werden um das Dipolmoment bei bekannter Flussdichte oder die Flussdichte bei bekanntem Dipolmoment zu bestimmen. Eine Anwendung hiervon ist das Magnetometer, eine andere der Kompass. Hier dreht sich ein frei beweglicher Permanentmagnet solange, bis $\sin\alpha = 0$ [siehe Abbildung 1], also die Kompassnadel in die Richtung des Magnetfeldes zeigt.
Das ***magnetische Feld*** wird durch $\vec{B}$ beschrieben, und kann durch das Gesetz von ***Biot-Savart*** oder durch das aus den Maxwell Gleichungen ableitbare ***Ampèresche Gesetz*** berechnet werden. Die zugehörige SI-Einheit

ist ***Tesla***. Es gilt

$$1\,T \;=\; 1\,\frac{V\cdot s}{m^2} \;=\; 1\,\frac{N}{A\cdot m} \;=\; 1\,\frac{kg}{A\cdot s^2}\;.$$

Der ***magnetische Fluss*** Φ bezeichnet die Anzahl der Feldlinien durch eine gegebende Fläche A.

Magnetfeld eines langen Leiters

Ein stromdurchflossener Leiter ist von einem Magnetfeld umgeben. Wenn der Leiter lang [damit Randeffekte vernachlässigt werden können] und gerade ist, so bilden die Feldlinien konzentrische Ringe senkrecht zum Leiter. Man kann z.B. mit dem Ampereschen Durchflutungsgesetz die Stärke des Magnetfeldes ausrechnen. Es gilt

$$|\vec{B}| \;=\; \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{r}\;,$$

dabei ist r der Abstand zum Leiter. Das Magnetfeld ist also proportional zu I und nimmt mit $1/r$ ab.

Magnetfeld eines Kreisstroms

Das Magnetfeld in dem Mittelpunkt eines Kreisstromes beträgt

$$|\vec{B}| \;=\; \frac{\mu_0}{2}\cdot\frac{I}{r}\;.$$

Magnetfeld einer Spule

Das Magnetfeld einer Spule mit N Windungen lässt sich über das Superpositionsprinzip berechnen. Das Feld setzt sich aus N Kreisströmen auf der Strecke l zusammen:

$$|\vec{B}| \;=\; \frac{\mu_0 N I}{l} \;=\; \mu_0 n I\;. \tag{1}$$

dabei gilt $n := \frac{N}{l}$.

2.2 Magnetometer

Ein Permanentmagnet ist an einem Torsionsfaden aufgehängt. An dem Faden befindet sich ein Spiegel [in unserem Versuchsaufbau ist der Spiegel direkt an dem Stabmagneten befestigt]. Diese Anordnung ist zum Schutz vor Lufterschütterungen in einer Plexiglashülle untergebracht. Der Torsionsfaden kann durch einen Drehteller mit Winkelanzeige verdreht werden, somit kann ein Drehmoment auf den Stabmagneten ausgeübt werden, welches proportional zum Drehwinkel ist:

$$M_F \;=\; D\cdot\phi\;.$$

Über einen Lichtzeiger mit Skala kann der Drehwinkel α des Magneten bestimmt werden.

Die Gaußschen Hauptlagen

Ein Magnetometer kann in verschiedenen Orientierungen betrieben werden. Die wichtigsten sind die sogenannten ***Gaußschen Hauptlagen***, die auch in unserem Versuch Verwendung finden.

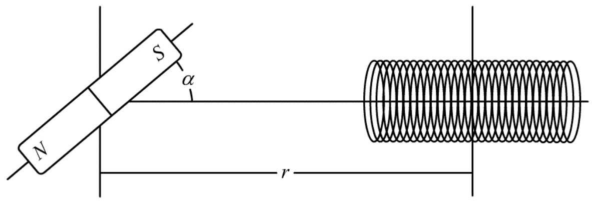


Abbildung 2: Erste Gaussche Hauptlage.

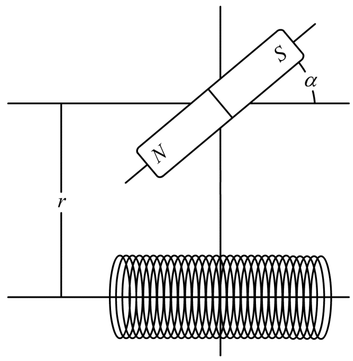


Abbildung 3: Zweite Gaussche Hauptlage.

Magnetfeld der Spule in der ersten Hauptlage

Der magnetische Fluss, der als integrale Größe über die Beziehung

$$\Phi \;=\; \int_A B \; \mathrm{d}a$$

definiert ist, verteilt sich für große Abstände r gleichmäßig über eine Kugeloberfläche. Daher kann man annehmen, dass

$$\Phi \;=\; BA \qquad \Rightarrow \qquad B \;=\; \frac{\Phi}{A} \;=\; \frac{\Phi}{4\pi r^2}$$

gilt. Dabei ist r der Abstand vom Spulenmittelpunkt zum Magnetometer. Dies gilt betragsmäßig für beide Pole der Spule, die sich im Abstand $(r - l/2)$ und $(r + l/2)$ vom Magnetometer befinden. Die Richtungen der beiden Magnetfelder sind natürlich einander entgegengesetzt. Das Magnetfeld am

Ort des Magnetometers ergibt sich durch Superposition der Magnetfelder der Pole:

$$B = B_N - B_S = \frac{\Phi}{4\pi}\left(\frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\right) = \frac{\Phi}{2\pi}\,\frac{rl}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2}\ .$$

Das Magnetfeld innerhalb einer Spule wurde in 2.1 berechnet. Dieses tritt ebenfalls ausserhalb der Spule auf [auf die genaue Herleitung wird an dieser Stelle verzichtet]. Somit gilt mit B aus Gleichung (1) für den magnetischen Fluss

$$\Phi = BA = \mu_0 nIA = \mu_0 NA\frac{I}{l}\ .$$

Nun ist A die Querschnittsfläche der Spule, für die $A = \pi\varrho^2$ gilt, wobei ϱ der Radius der Spule ist. Setzt man Φ und A ein, so erhält man das Magnetfeld am Ort des Magnetometers:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\Phi}{2\pi}\,\frac{rl}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\mu_0 N\pi\varrho^2 I}{2\pi l}\,\frac{rl}{\left(r^4-r^2\frac{l^2}{2}+\frac{l^4}{16}\right)} \\ &= \mu_0 I\,\frac{N\varrho^2}{2r^3}\,\frac{1}{\left(1-\frac{l^2}{2r^2}+\frac{l^4}{16r^4}\right)}\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Formel wird in der Auswertung gebraucht.

Magnetfeld der Spule in der zweiten Hauptlage

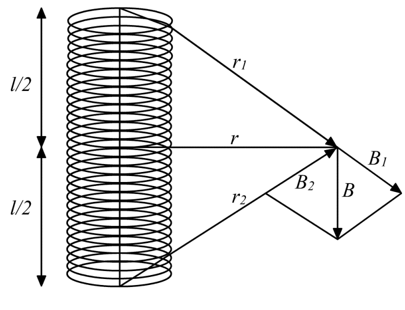


Abbildung 4: Skizze zur zweiten Hauptlage.

Wie in Abbildung 4 zu erkennen ist, gilt [mit der Ähnlichkeit von Dreiecken] folgende Relation:

$$\frac{|\vec{B}|}{2|\vec{B}_1|} = \frac{l}{2|\vec{r}_1|} \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{B}| = |\vec{B}_1|\cdot\frac{l}{2|\vec{r}_1|}\ .$$

Nun gilt

$$|\vec{B}_1| \;=\; |\vec{B}_2| \;=\; \frac{\mu_0 NIA}{l \cdot 4\pi |\vec{r}_{1,2}|^2}$$

und nach Pythagoras $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = \sqrt{r^2 + l^2/4}$. Somit folgt

$$B \;=\; \frac{\mu_0 NIA}{4\pi(r^2 + \frac{l^2}{4})^{\frac{3}{2}}} \;=\; \frac{\mu_0 NIA}{4\pi r^3 (1 + \frac{l^2}{4r^2})^{\frac{3}{2}}} \;,$$

was sich mit $A = \pi \varrho^2$ und die für $r \gg l$ geltende Näherung $\frac{l^2}{4r^2} \approx 0$ vereinfacht zu

$$B \;=\; \frac{\mu_0 NI\varrho^2}{4r^3} \,. \tag{3}$$

Das Magnetfeld der Spule nimmt also in der zweitem Hauptlage mit $1/r^3$ ab. Dieses werden wir in Versuchsteil A verifizieren.

2.3 Die magnetische Feldstärke H

Die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ und die Feldstärke $\vec{H}$ hängen wie folgt zusammen:

$$\vec{H} \;=\; \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B} \qquad \text{[Im Vakuum]}$$

$$\vec{H} \;=\; \frac{1}{\mu} \cdot \vec{B} \qquad \text{[In Materie]}$$

Dabei ist μ_0 die magnetische Feldkonstante und $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$ die Permeabilität der eingebrachten Materie. Oerstedt $[Oe]$ ist die cgs-Einheit für die Feldstärke H. Die SI-Einheit ist A/m und es gilt die Umrechnung[1].

$$1 \; A/m \;=\; 4\pi \cdot 10^{-3} \;=\; 0{,}012566 \; Oe \tag{4}$$

2.4 Das Erdmagnetfeld.

Der Südpol eines Kompasses zeigt nach Süden. Da sich gleichnamige Pole abstoßen und ungleichnamige Pole anziehen, befindet sich also nahe des geographischen Südpols der magnetische Nordpol.

[1] Nach http://de.wikipedia.org/wiki/Oersted_%28Einheit%29, aufgerufen am 07.09.2005

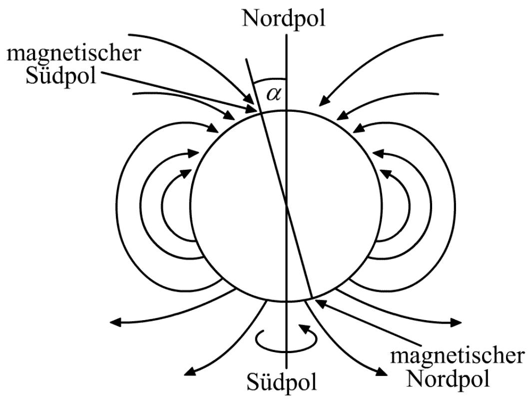


Abbildung 5: Erdmagnetfeld

Wie in Abbildung 5 zu sehen ist, hat das Magnetfeld der Erde an fast allen Orten auf der Erdoberfläche eine horizontale und eine vertikale Komponente. Da das Magnetometer nur in horizontaler Richtung frei beweglich ist, messen wir in unserem Versuch nur die horizontale Komponente des Erdmagnetfeldes. Um die vertikale Komponente des Erdmagnetfeldes zu messen, bedient man sich eines Inklinatoriums, welches in Abbildung 6 dargestellt ist.

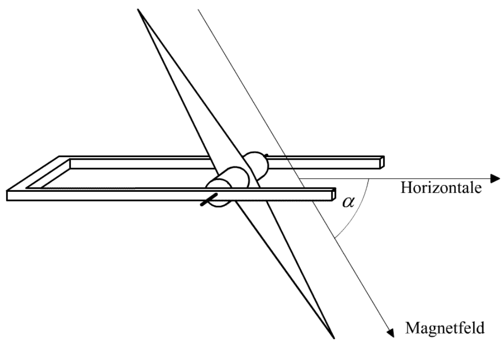


Abbildung 6: Inklinatorium.

Wichtige Begriffe zum Erdmagnetfeld

Die ***Deklination*** beschreibt die Abweichung der Richtung des Erdmagnetfeldes von der Nord-Süd Richtung, die ***Inklination*** den Winkel zwischen der Horizontalen und der Richtung des Erdmagnetfeldes.

Isogonen sind Linien, die Orte gleicher Deklination auf der Erdoberfläche verbinden, ***Isoklinen*** solche mit gleicher Inklination. Schließlich nennt man Linien die Orte mit gleicher Horizontalintensität verbinden ***Isodynamen***.

Das Erdmagnetfeld in Göttingen

In Göttingen beträgt die Horizontalintensität $H_h = 0,189\ Oe$, die Deklination $2,6°$ westlich und die Inklination $66,7°$ Nord [2].

Mit Gleichung (4) können wir nun die Horizontalintensität des Erdmagnetfeldes in der SI-Einheit angeben:

$$B_h \;=\; \mu_0 H \;=\; 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{0,189}{4\pi \cdot 10^{-3}}\ T \;=\; 18,9 \cdot 10^{-6}\ T\ .$$

Um die Horizontalintensität genauer bestimmen zu können, müsste man noch die Permeabilität der Erde einbeziehen. Die Inklination beträgt in Göttingen $66,7°$ und somit ergibt sich eine Vertikalkomponente von

$$B_v \;=\; \tan(66,7°) \cdot B_h \;=\; 43,9 \cdot 10^{-6}\ T\ .$$

3 Versuchsdurchführung

3.1 Teil A: Magnetfeld von Spulen

Die $1/r^3$ Abhängigkeit der Induktionsflussdichte B soll in der zweiten Hauptlage verifiziert werden.

(1) Die Spulendaten beider Spulen werden notiert [Länge, Durchmesser, Windungen].

(2) Ohne Spulenfeld wird der Drehteller so eingestellt, dass der Dipolvektor des Stabmagneten senkrecht zur Spule steht. Die resultierende Nullage des Lichtzeigers wird auf der Skala markiert.

(3) Der Drehteller wird um $5°$ gedreht. Nun wird der Spulenstrom I in Abhängigkeit von der Entfernung des Spulenmittelpunkts zum Magnetometer r bei beiden Spulen gemessen, der benötigt wird um den Stabmagneten und damit den Lichtzeiger wieder in die Ausgangslage zu bringen. Es muss hierbei auf die richtige Polung der Spule geachtet werden, eventuell muss umgepolt werden.

3.2 Teil B: Magnetfeld der Erde

Die Horizontalkomponente B_h des Erdmagnetfeldes in Göttingen wird durch den Vergleich mit dem Magnetfeld B_s einer langen Spule in der ersten Hauptlage bestimmt. Es wird die Stromstärke I ermittelt, die benötigt wird um

---

[2] Nach P. Schaaf (2005): „Das Physikalische Praktikum“. Universitätsdrucke Göttingen

diese beiden antiparallelen Magnetfelder am Ort des Magnetometers zu kompensieren. Es muss darauf geachtet werden die Spule richtig zu polen. Sonst wird man das Erdmagnetfeld verstärken und nicht abschwächen.

(1) Mit einem Kompass wird die Spule parallel zum Erdmagnetfeld ausgerichtet. Das Magnetometer wird in der ersten Hauptlage im Abstand von etwa $r = 75\,cm$ von der Spulenmitte so aufgestellt, dass der Südpol des Permanentmagneten nach Süden zeigt. Nun wird das Plexiglasgehäuse gedreht bis zwei der Strichmarkierungen des Gehäuses auf der verlängerten Achse des Permanentmagneten liegen [$\alpha = 180°$ in Abbildung 2].

(2) Der obere Drehtelle wird nun so gedreht, dass der Permanentmagnet mit den 90° versetzten Strichen auf einer Linie liegt. Diese Lage wird mit dem Lichtzeiger auf der Skala markiert. Nun wird der Drehteller auf die ursprüngliche Nord-Süd-Ausrichtung zurückgedreht und der Wert des Drehtellers notiert [ϕ_0].

(3) Die beiden Drehmomente Φ_l und Φ_r werden ohne Spulenfeld gemessen, die für eine Drehung des Permanentmagneten um 90° nach links und rechts notwendig sind. Hierzu wird der obere Drehteller solange nach links oder nach rechts gedreht, bis der Lichtzeiger wieder auf der Nulllage zu ruhen kommt. Die beiden Drehmomente sollten betragsmäßig gleich sein. Weichen sie um mehr als 5° voneinander ab, muss die Stellung des Magnetometers und des Stabmagneten korrigiert werden.

(4) Die Drehmomente Φ_l und Φ_r werden wie in **(3)**, nur diesmal mit verschiedenen Spulenströmen gemessen. Die Stellung von Magnetometer und Spule werden nicht mehr korrigiert. Es sollten Spulenströme zwischen 0 und 800 mA in einer Schrittweite von 50 mA benutzt werden.

4 Auswertung

4.1 Teil A: Magnetfeld von Spulen

Theoretisch gilt

$$\phi/(NIA) \sim 1/r^3 \,,$$

dabei ist $\phi = 5°$ der Drehwinkel des Drehtellers, N die Windungszahl der Spule, A die Fläche der Spule, I der Spulenstrom und r der Abstand vom Spulenmittelpunkt zum Magnetometer. Um den Exponenten aus Gleichung (3) bestimmen zu können, tragen wir $\phi/(NAI)$ gegen r in doppelt logarithmischem Maßstab auf, und führen wir eine lineare Regression durch. Die erhaltene Gerade hat die Funktion

$$\ln(y) \quad = \quad m \cdot \ln(r) + \ln(c)$$

$$= \ln(r^m) + ln(c)\,,$$

$$\Rightarrow \quad y = r^m + c \quad \Rightarrow \quad y \sim r^m\,.$$

Die Steigung der Regressionsgerade gibt uns also den Exponenten aus Gleichung (3) an.

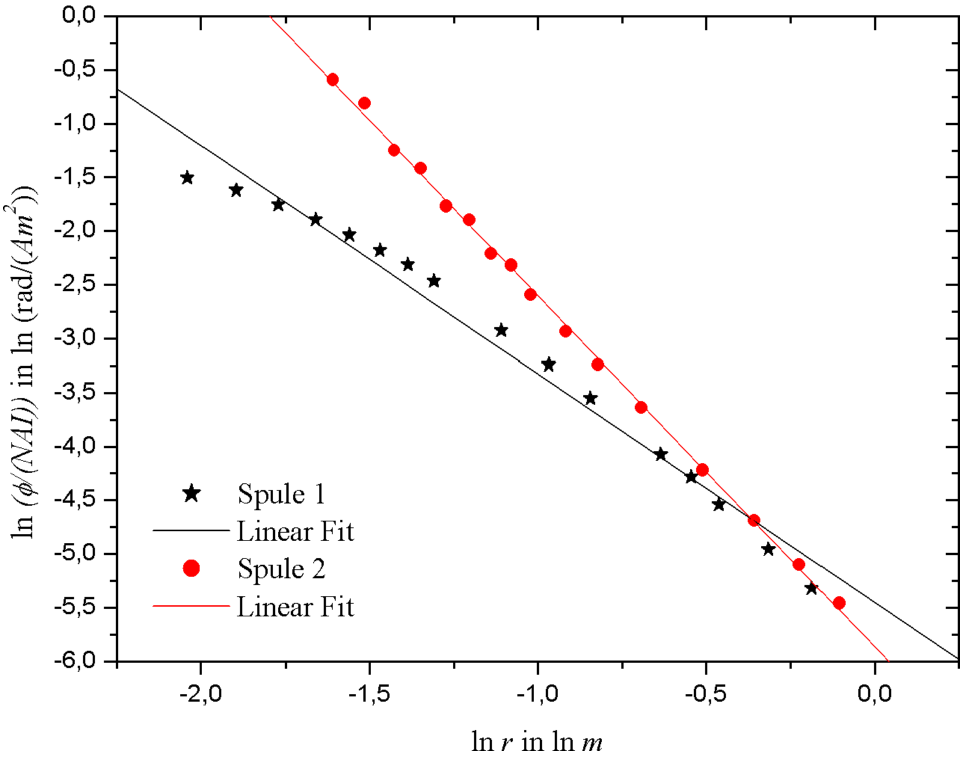


Abbildung 7: Spulenmittelpunkt - Magnetometer.

Wir erhalten $m_{r_1} = -2,13 \pm 0,09$ für Spule 1 [$N = 6690,\ A = 0,00709\,m^2$] und $m_{r_2} = -3,26 \pm 0,04$ für Spule 2 [$N = 1500,\ A = 0,03631\,m^2$].

Nun tragen wir $\phi/(NAI)$ gegen R in doppelt logarithmischem Maßstab auf, wobei R der Abstand vom Spulenende zum Magnetometer ist. Für R gilt nach Pythagoras

$$R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}\,,$$

dabei ist l die Länge der Spule. Wieder können wir lineare Regression durchführen und den Exponenten aus Gleichung (3) bestimmen.

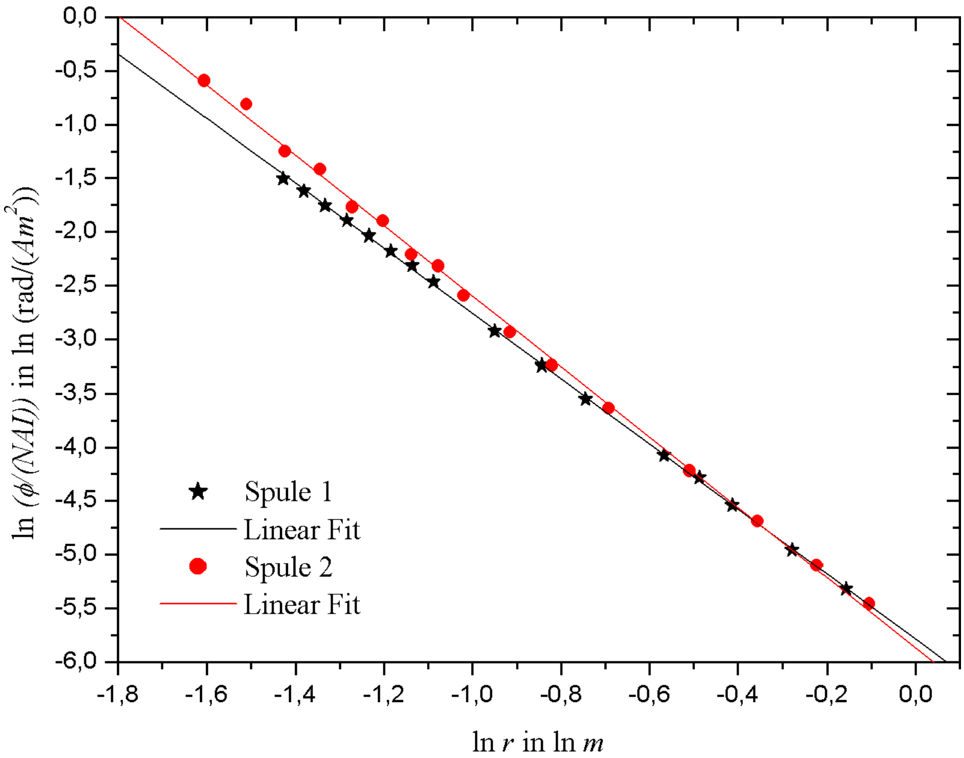


Abbildung 8: Spulenende - Magnetometer.

Wir erhalten $m_{R_1} = -3,02 \pm 0,02$ für Spule 1 $[l = 0,403\,m]$ und $m_{R_2} = -3,27 \pm 0,04$ für Spule 2 $[l = 0,036\,m]$. Berechnen wir den gewichteten Mittelwert, erhalten wir $-3,07 \pm 0,02$. Theoretisch sollten wir $m = -3$ erhalten. Ein erstaunlich gutes Ergebnis dafür, dass wir in Abbildung 7 sehen, wohl bei der Berechnung des Spulenfeldes einige Annäherungen gemacht wurden.

4.2 Teil B: Erdmagnetfeld

Es sei im Voraus zu sagen, dass wir in dieser Messung sicherlich nicht das Erdmagnetfeld gemessen haben. Die Kompassnadel zeigte definitiv nicht nach Norden. So haben wir wohl eher das Magnetfeld des Stromkastens in Überlagerung mit dem Erdmagnetfeld oder Ähnliches gemessen.

Das Magnetfeld der Erde wird mit dem Magnetfeld einer Spule überlagert. Dadurch wird das Erdmagnetfeld abgeschwächt und somit das Drehmoment, welches man aufbringen muss, um den Stabmagneten aus der Nord-Süd Ausrichtung um 90° zu drehen, geringer. Das Magnetfeld der Spule wird durch den Spulenstrom verursacht. Nun trägt man den Strom gegen den benötigten Drehwinkel auf. Um den Drehwinkel zu bestimmen, mittelt man die beiden Drehwinkel ϕ_l und ϕ_r:

$$\phi = \frac{\phi_l + \phi_r}{2}.$$

Ist der benötigte Drehwinkel $\phi = 90°$, so wurde das Erdmagnetfeld komplett überlagert, das heißt dass das resultierende Magnetfeld am Ort des Magnetometers verschwindet. Mit einer linearen Regression kann man diesen Wert bestimmen. Berechnet man nun das erzeugte Magnetfeld der Spule am Ort des Magnetometers, so hat man ein Äquivalent für das Erdmagnetfeld am Ort des Magnetometers.

Leider haben wir unsere Spule falsch gepolt, und so haben wir das Magnetfeld der „Erde“ verstärkt und nicht geschwächt. Man kann allerdings im Grunde die gleiche Überlegung durchführen: Durch lineare Regression können wir den Punkt ermittel, wo wir bei richtiger Polung das „Erdmagnetfeld“ überlagert hätten. Natürlich wird unser Ergebnis dadurch sehr ungenau.

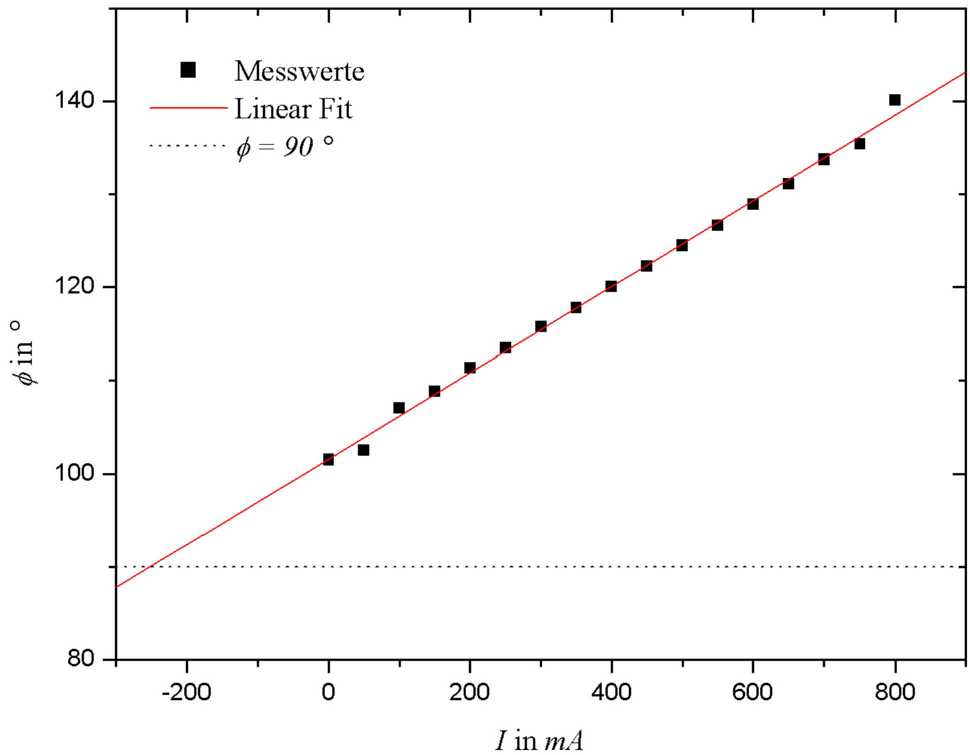


Abbildung 9: Überlagerung von „Erd-“ und Spulenmagnetfeld.

Am Schnittpunkt der Regressionsgeraden mit $\phi = 90°$ gilt

$$90° = m \cdot x + b \qquad \Rightarrow \qquad I_S = x = \frac{90 - b}{m}.$$

Für den Fehler gilt

$$\sigma_{I_S} = \sqrt{\sigma_m^2 \left(\frac{90 - b}{m^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{m}\right)^2}.$$

Wir erhielten $m = 0,04617 \pm 0,00069\,^\circ/mA$ und $b = 101,60294 \pm 0,32022\,^\circ$. Somit erhalten wir einen Spulenstrom von $I_S = -251,3 \pm 7,9\,mA$. Mit Gleichung (2) können wir nun das Magnetfeld der Spule am Ort des Magnetometers ausrechnen, welches dem Magnetfeld der „Erde" am Ort des Magnetometers entspricht. Mit den Spulendaten $N = 6690$, $\rho = 0,0475\,m$, $L = 0,403\,m$ und dem Abstand $R = 0,75\,m$ zwischen Spulenmittelpunkt und Magnetometer erhalten wir somit

$$B_H \;=\; 6,6 \cdot 10^{-6}\;T\,.$$

Die Spulendaten nehmen wir als exakt an, den Fehler für R vernachlässigen wir. Somit ergibt sich der Fehler zu

$$\sigma_{B_H} \;=\; \sigma_{I_S}\,\frac{B}{I_S} \;=\; 0,3 \cdot 10^{-6}\;T\,.$$

Unser theoretisch errechneter Wert lag bei $18,9 \cdot 10^{-6}\;T$. Wir sind mit unserem Wert sehr zufrieden. Da wir unsere Spule nicht einmal in Nord-Süd Richtung ausgerichtet haben, ist es ein Wunder, dass unser Wert sogar in der richtigen Größenordnung liegt.

5 Diskussion

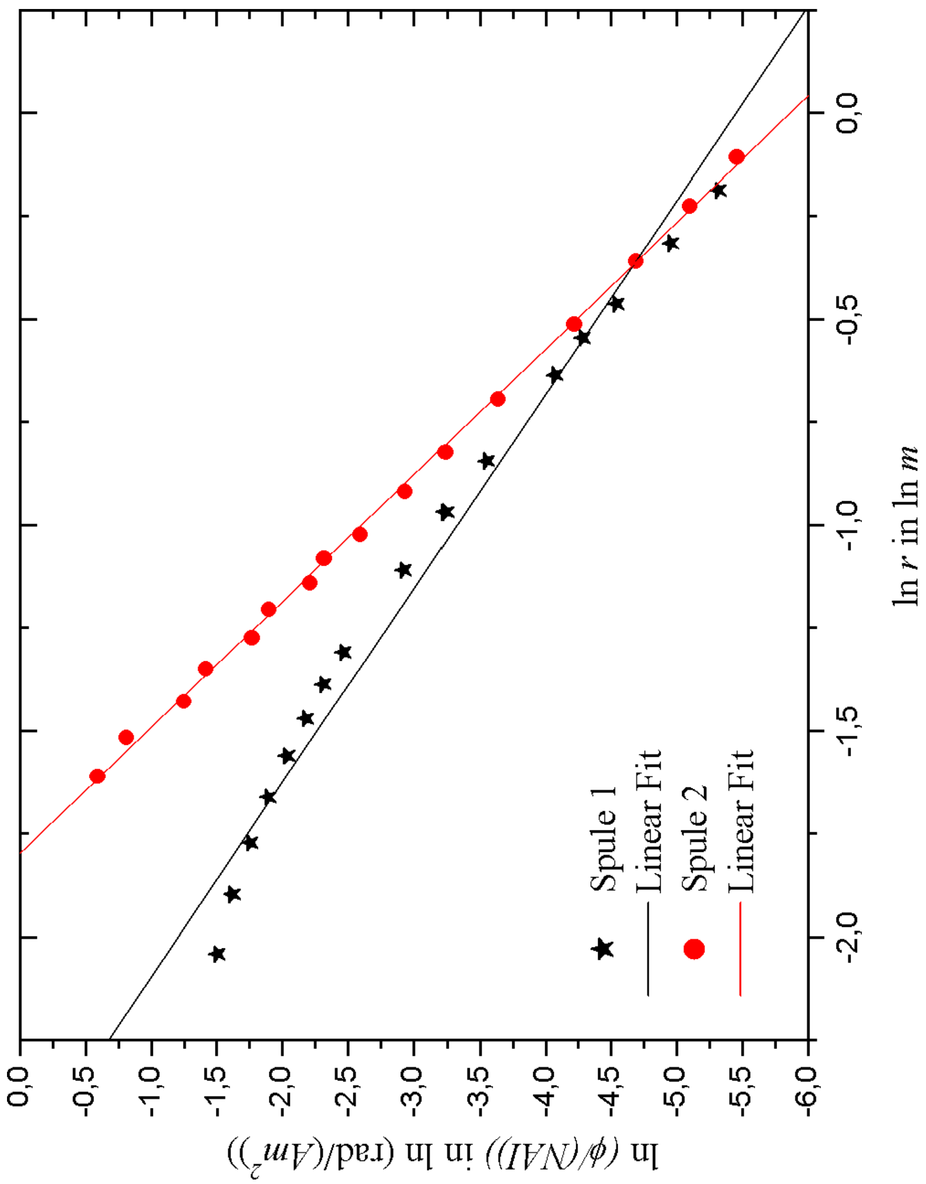
5.1 Eignene Kommentare

[Toll, 'n Magnetometer. Toll, 'n Magnetfeld von 'na Spule ausmessen. Und das tolle Erdmagnetfeld: wir nehmen an, Norden ist im Osten. Blödsinn, das mal 'n Versuch, der rausgenommen werden kann, dafür lieber Messung großer Widerstände auf zwei Versuche aufteilen...]$_{\text{Daniel}}$

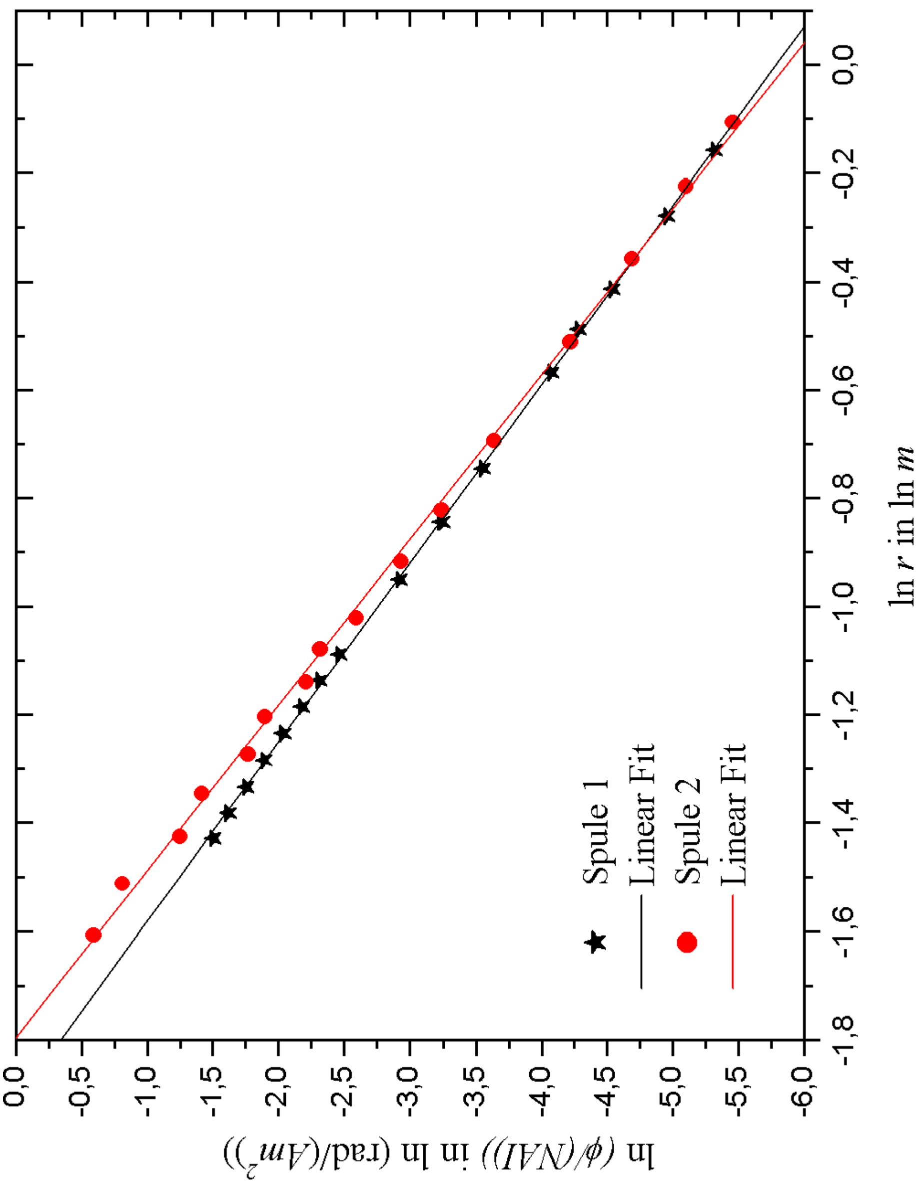
[Gut. Nachdenken sollte man vor den Versuchen schon. Aber bei einer so wirren Praktikumsanleitung kann man ja schon froh sein, wenn man überhaupt ungefähr versteht, was man zu tun hat. Ich finde es sehr ärgerlich, dass wir die Spule falsch gepolt haben. Auch wenn Herr Schaaf der Meinung ist, dass der Lerneffekt verloren geht, wenn er solche Sachen ins Skript übernimmt, finde ich, dass er es ruhig tun darf. Natürlich haben wir so auch ein bisschen was gelernt, aber die Freude über ein gutes Ergebnis blieb heute leider aus.]$_{\text{Hauke}}$

6 Anhang

6.1 Abbildung 7 - Spulenmittelpunkt - Magnetometer



6.2 Abbildung 8 - Spulenende - Magnetometer



6.3 Abbildung 9 - Überlagerung von „Erd-“ und Spulenmagnetfeld