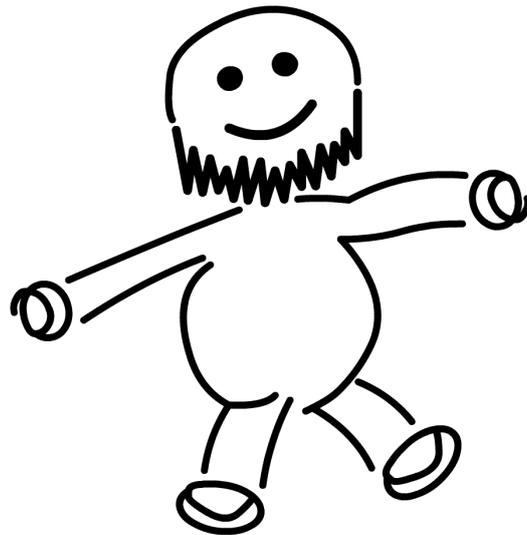


Physikalisches Praktikum für das Hauptfach Physik

Versuch 23

Das Prismen- und Gitterspektrometer

Wintersemester 2005 / 2006



Name:	Daniel Scholz
Mitarbeiter:	Hauke Rohmeyer
E-Mail:	physik@mehr-davon.de
Gruppe:	B9
Assistent:	André Holz
Durchgeführt am:	10. Februar 2006
Protokoll abgeben:	14. Februar 2006
Protokoll verbessert:	—

Testiert: _____

1 Einleitung

Bei der Spektrographie wird Licht in seine Wellenlängen aufgeteilt und die Intensität bzw. Existenz einzelner Wellenlängen gemessen. Durch die Analyse des Spektrums kann man zum Beispiel den Aufbau eines leuchtenden Gases feststellen.

Bei diesem Versuch werden zwei Methoden der Spektrographie insbesondere nach ihrem Auflösungsvermögen verglichen. Eine Quecksilberdampfampe, deren Spektrum klar unterscheidbare Linien hat, wird hierbei als Lichtquelle verwendet.

2 Theorie

2.1 Kohärentes Licht und Huygensches Prinzip

Nach dem *Huygenschen Prinzip* ist jeder Punkt einer sich ausbreitenden Wellenfront Quelle einer Kugelwelle, einer so genannten Elementarwelle. Die Wellenfront breitet sich durch Überlagerung all dieser Elementarwellen aus.

Beide Spektrographen verlangen die Arbeit mit *kohärentem Licht*, d.h. einzelne Lichtwellen dürfen keine Phasenverschiebung zueinander haben. Hierfür wird das Licht durch einen [infinitesimal] kleinen Spalt gebündelt. Der Spalt ist dann nach dem Huygenschen Prinzip Quelle einer Elementarwelle, die natürlich keine Phasendifferenz zu sich selber haben kann. Durch eine zweite Linse entsteht ein paralleles Strahlbündel mit kohärentem Licht.

2.2 Auflösungsvermögen von Spektrometern

Um das Auflösungsvermögen eines Spektrometers zu definieren, betrachtet man den Ablenkungswinkel γ in Abhängigkeit der Wellenlänge λ und definiert die Winkeldispersion D durch

$$D = \frac{d\gamma}{d\lambda}. \quad (1)$$

Um das Bild nun scharf zu bekommen, macht man den in das Spektrometer eintretenden Strahl möglichst schmal. Dabei tritt allerdings der Effekt eines Beugungsmusters auf. Für einen Lichtstrahl der Wellenlänge λ ist der Winkelabstand $\Delta\alpha$ zwischen dem nullten Beugungsmaximum und dem ersten Beugungsminimum nach (16) und (17) [siehe unten] gegeben durch

$$\Delta\alpha = \frac{\lambda}{N \cdot d} \quad \Leftrightarrow \quad N \cdot d \cdot \Delta\alpha = \lambda. \quad (2)$$

Im Falle eines Prismas ist d hier die Breite des Spaltes und $N = 1$. Im Falle des Gitters ist d die Gitterkonstante und N die Anzahl der beleuchteten

Gitteröffnungen. Ein weiterer Lichtstrahl mit Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda$ wird nun um den Winkel $\Delta\gamma$ anders gebrochen, als der erste. Mit $D = d\gamma/d\lambda$ kann man $\Delta\gamma$ nähern durch

$$\Delta\gamma = D \cdot \Delta\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta\gamma}{D} = \Delta\lambda. \quad (3)$$

Ist $\gamma(\lambda)$ linear, so ist diese Näherung sogar exakt. Nach dem Rayleigh-Kriterium können zwei Linien eines Interferenzmusters noch aufgelöst werden, wenn das nullte Beugungsmaximum der einen Wellenlänge in das erste Beugungsminimum der anderen fällt. Es muss also gelten:

$$\Delta\gamma \geq \Delta\alpha.$$

Das Auflösungsvermögen A ist durch den Extremfall $\Delta\gamma = \Delta\alpha$ und

$$A := \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

definiert. Es gilt also nach (2) und (3)

$$A = \frac{d \cdot \Delta\alpha}{\Delta\gamma/D} = N \cdot d \cdot D. \quad (4)$$

2.3 Prismenspektrometer

Brechungsgesetz nach Snellius

Die Geschwindigkeit des Lichtes ist abhängig von dem Medium in dem es sich ausbreitet. In dieser Tatsache liegt der Grund dafür, dass Licht an der Grenzfläche zwischen zwei Materialien gebrochen wird. Der Brechungsindex n eines Materials ist definiert durch

$$n := \frac{c_0}{c}, \quad (5)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit in dem Material und c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Im Allgemeinen ist c [und damit auch n] von der Wellenlänge λ abhängig.

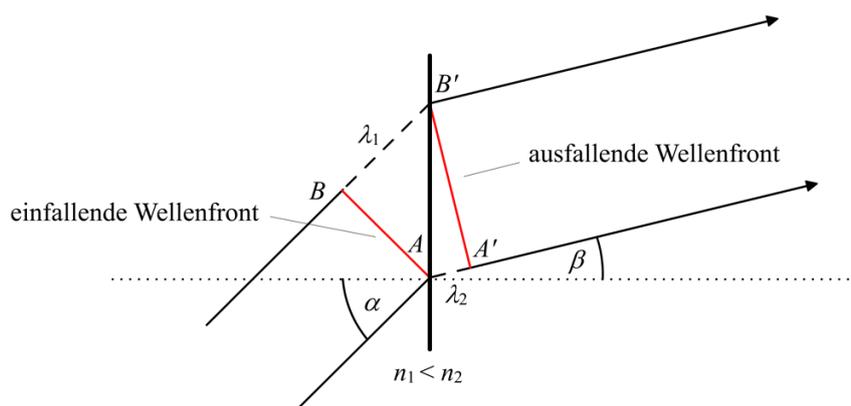


Abbildung 1: Brechungsgesetz nach Snellius.

Um das **Snelliussche Brechungsgesetz** herzuleiten, betrachten wir den Grenzübergang von einem Material mit geringerem Brechungsindex n_1 in ein Material mit höherem Brechungsindex n_2 [es gilt also $n_1 < n_2$, siehe auch Abbildung 1]. Der Lichtstrahl habe die Wellenlänge λ_1 im ersten Medium und λ_2 im zweiten. Er trifft mit Winkel α auf die Grenzfläche. Desweiteren sei T die Periodendauer der Lichtwelle. Es gilt also nach Gleichung (5)

$$\lambda_i = \frac{c_0}{n_i} \cdot T \quad \text{für } i = 1, 2. \quad (6)$$

Wir betrachten einen Zeitpunkt t_0 , zu welchem ein Punkt der Wellenfront des Lichtstrahls gerade auf die Grenzfläche am Punkt A trifft. Und einen weiteren Punkt B , welcher in Ausbreitungsrichtung den Abstand λ_1 zur Grenzfläche hat. Nach der Zeit T hat sich B nach B' bewegt und es gilt $|B - B'| = \lambda_1$. A kann sich aber nur bis zu einem Punkt A' bewegen, bei welchem $|A - A'| = \lambda_2$ gilt. Die Wellenfront liegt nun zwischen A' und B' und hat den Winkel β zur Grenzfläche. Aus Abbildung 1 geht hervor, dass

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot |A - B'| = \lambda_1$$

und

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot |A - B'| = \lambda_2$$

gilt. Daraus folgt mit (6)

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}. \quad (7)$$

Dies ist das Brechungsgesetz nach Snellius. Im Normalfall hängt der Brechungsindex eines Materials von der Wellenlänge λ ab. Daher schreiben wir auch $n = n(\lambda)$. Verschiedene Wellenlängen werden also verschieden stark gebrochen.

Fraunhofersche Formel

Ein Prisma ist ein Körper mit der Grundfläche eines gleichschenkligen Dreiecks. Der Winkel ε zwischen den gleichlangen Seiten nennt sich brechender Winkel. Die ihm gegenüber liegende Kante nennt sich Basis.

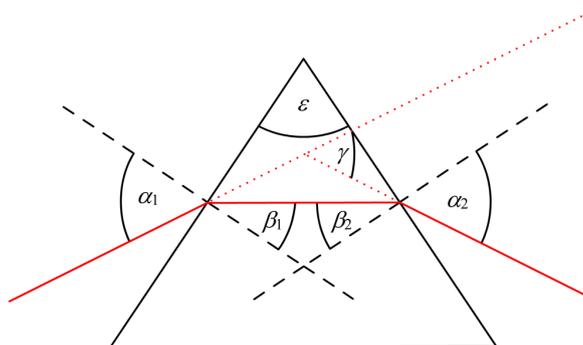


Abbildung 2: Strahlengang durch ein Prisma.

Abbildung 2 zeigt den Strahlengang durch ein Prisma und definiert die Winkel α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , ε und γ . Es gilt

$$\pi = \varepsilon + \frac{\pi}{2} - \beta_1 + \frac{\pi}{2} - \beta_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \beta_1 + \beta_2. \quad (8)$$

Damit folgt für den Gesamtablenkungswinkel γ

$$\gamma = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon. \quad (9)$$

Soll γ minimal sein, muss also gelten

$$0 = \frac{d\gamma}{d\alpha_1} = 1 + \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = -1. \quad (10)$$

Außerdem gilt immer wegen (8)

$$\beta_1 = \varepsilon - \beta_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\beta_1}{d\beta_2} = -1. \quad (11)$$

Im Allgemeinen gilt wegen (7) für $i = 1, 2$

$$\sin(\alpha_i) = n_p \sin(\beta_i) \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha_i) d\alpha_i = n_p \cos(\beta_i) d\beta_i,$$

wobei n_p der Brechungsindex des Prismas ist und vorausgesetzt wurde, dass der Brechungsindex von Luft durch $n_{\text{Luft}} \approx 1$ angenähert werden kann. Division ergibt mit (10) und (11)

$$\frac{\cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_2)} \cdot \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = \frac{\cos(\beta_1)}{\cos(\beta_2)} \cdot \frac{d\beta_1}{d\beta_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_2)} = \frac{\cos(\beta_1)}{\cos(\beta_2)}.$$

Mit (7) erhält man

$$\frac{1 - \sin^2(\alpha_1)}{1 - \sin^2(\alpha_2)} = \frac{\cos^2(\alpha_1)}{\cos^2(\alpha_2)} = \frac{\cos^2(\beta_1)}{\cos^2(\beta_2)} = \frac{1 - \sin^2(\beta_1)}{1 - \sin^2(\beta_2)} = \frac{n_p^2 - \sin^2(\alpha_1)}{n_p^2 - \sin^2(\alpha_2)}.$$

Für $n_p \neq 1$ ist diese Gleichung nur für $\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha$ erfüllt. Damit gilt natürlich auch $\beta_1 = \beta_2 =: \beta$. Das bedeutet, dass das Prisma symmetrisch durchleuchtet wird. Für diesen einfach Fall folgt mit (8)

$$\sin\left(\frac{\gamma + \varepsilon}{2}\right) = \sin(\alpha) = n_p \cdot \sin(\beta) = n_p \cdot \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Also gilt die Fraunhofersche Formel

$$n_p = \frac{\sin\left(\frac{\gamma + \varepsilon}{2}\right)}{\sin(\varepsilon/2)}. \quad (12)$$

Dispersion und Auflösungsvermögen

Man nennt $dn/d\lambda$ die **Dispersion** des Materials. Gilt $dn/d\lambda > 0$, so wird die Dispersion **normal** genannt. Gilt $dn/d\lambda < 0$ bezeichnet man sie als **anormal**. Natürlich ist jetzt auch der Brechungswinkel γ für verschiedene Wellenlängen λ verschieden. Es gilt nach (12) und (1)

$$\begin{aligned} D &= \frac{d\gamma}{d\lambda} = \frac{d\gamma}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = \left(\frac{dn}{d\gamma}\right)^{-1} \frac{dn}{d\lambda} \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{\cos\left(\frac{\gamma + \varepsilon}{2}\right)}{\sin(\varepsilon/2)}\right)^{-1} \frac{dn}{d\lambda} = 2 \frac{\sin(\varepsilon/2)}{\cos\left(\frac{\gamma + \varepsilon}{2}\right)} \frac{dn}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (13)$$

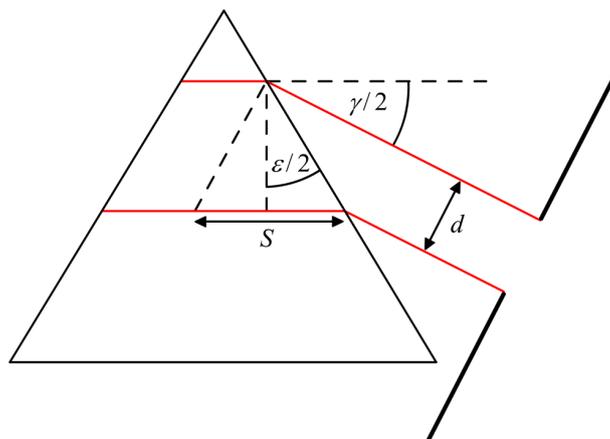


Abbildung 3: Effektive Basislänge.

Abbildung 3 definiert die effektive Basislänge S eines Strahlengangs der Breite d durch ein Prisma. Für den Winkel ϕ zwischen $\varepsilon/2$ und $\gamma/2$ gilt

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon + \gamma}{2}.$$

Für die Länge l der vom Licht erfassten Prismakante gilt also

$$l = \frac{d}{\cos(\pi/2 - \phi)} = \frac{d}{\cos\left(\frac{\varepsilon + \gamma}{2}\right)}.$$

Mit l ergibt sich für S

$$\frac{S}{2} = \sin(\varepsilon/2) \cdot l = \sin(\varepsilon/2) \cdot \frac{d}{\cos\left(\frac{\varepsilon + \gamma}{2}\right)}$$

und somit

$$S = 2 \cdot d \cdot \frac{\sin(\varepsilon/2)}{\cos\left(\frac{\varepsilon + \gamma}{2}\right)}.$$

Mit (13) ergibt sich nach (4) für das Auflösungsvermögen A_{Prisma} des Prismas

$$A_{\text{Prisma}} = D \cdot d = S \frac{dn}{d\lambda}. \quad (14)$$

3 Gitterspektrometer

3.1 Beugung

Schickt man kohärentes Licht auf ein Gitter mit Gitterkonstante d [der Abstand zwischen zwei Öffnungen], so geht von jeder [vereinfacht infinitesimal kleinen] Gitteröffnung nach dem Huygensches Prinzip eine Kugelwelle aus. Diese Kugelwellen interferieren miteinander und erzeugen ein Beugungsmuster. Damit die Interferenz positiv ist, muss der Gangunterschied zweier aus benachbarten Lücken kommenden Lichtstrahlen ein Vielfaches der Wellenlänge λ sein [siehe auch Abbildung (4)].

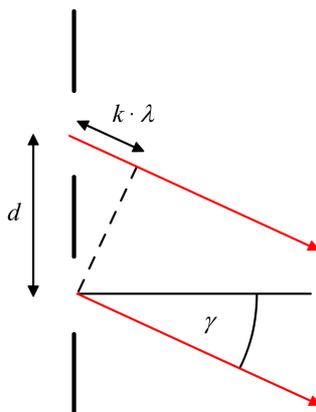


Abbildung 4: Beugung am Gitter.

Die Winkel, unter denen konstruktive Interferenz stattfindet werden **Hauptmaxima** genannt. Für den Winkel γ_k des k-ten Hauptmaximums gilt also

$$\sin(\gamma_k) \cdot d = k \cdot \lambda. \quad (15)$$

Wir betrachten nun den Fall, dass der Gangunterschied λ/N ist, wobei N die Anzahl der beleuchteten Gitteröffnungen ist. Nummerieren wir die Gitteröffnungen von einer Seite zur anderen aufsteigend mit $1 \dots N$. Für jede Öffnung $k \leq N/2$ gibt es nun eine Öffnung $k + N/2$. Zwischen diesen Öffnungen ist der Gangunterschied

$$\frac{N}{2} \cdot \frac{\lambda}{N} = \frac{\lambda}{2}.$$

Die beiden Öffnungen löschen sich also destruktiv aus. Damit interferieren alle Kugelwellen destruktiv. Diese Winkel werden **Hauptminima** genannt. Es gilt für den Winkel β_k des k-ten Hauptminimums

$$\sin(\beta_k) \cdot d = \frac{k \cdot \lambda}{N}. \quad (16)$$

Wenn man einen Einzelspalt der Breite d betrachtet, kann man ihn mit einem Gitter mit zwei Öffnungen [die beiden Hälften des Spaltes] vergleichen. Die Gitterkonstante ist dann $d/2$. Die Anzahl N der Öffnungen ist 2. Somit gilt mit der Näherung $\sin(\gamma) \approx \gamma$ für den Winkel γ des ersten Beugungsminimums

$$\gamma \cdot \frac{d}{2} = \frac{\lambda}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \cdot d = \lambda. \quad (17)$$

Diese Beziehung wurde weiter oben benutzt.

Auflösungsvermögen

Nach (1) und (15) gilt mit der Näherung $\sin(\gamma) \approx \gamma$ für die Winkeldispersion D_k des k-ten Hauptmaximums

$$D_k = \frac{d}{d\lambda} \frac{k}{d} \cdot \lambda = \frac{k}{d}.$$

Damit gilt bei Betrachtung des k-ten Hauptmaximums für das Auflösungsvermögen des Gitters

$$A_{\text{Gitter},k} = D_k \cdot N \cdot d = N \cdot k. \quad (18)$$

4 Durchführung

4.1 Prismenspektrometer

Mit der Kondensorlinse, einem Beleuchtungsspalt und einer zweiten Linse wird das Licht der Hg-Dampfampe parallel auf eine dritte Linse gerichtet,

welche den Beleuchtungsspalt scharf auf das Okular abbildet. Das Okular wird auf den durchgehenden Strahl eingestellt. Dann werden alle Abstände auf der optischen Achse notiert. Nacheinander wird jedes der drei verwendeten Prismen [Kronglas, leichtes Flintglas, schweres Flintglas] in den Strahlengang gebracht, wobei folgende Schritte durchgeführt werden:

- (1) Der Ablenkwinkel einer der gelben Linien wird bestimmt.
- (2) Mit dem Feintrieb wird die Winkeldifferenz zur grünen Linie bestimmt.
- (3) Der Abstand zwischen Okular und der dritten Linse wird notiert.
- (4) Ein zweiter Spalt wird zwischen die zweite Linse und das Prisma gebracht und der einfallende Strahl wird verkleinert, bis die beiden gelben Linien des Spektrums nicht mehr voneinander zu trennen sind.
- (5) Der zweite Spalt wird bei geradem Strahlengang an die Stelle des ersten gebracht und ein Rotfilter wird eingesetzt. Nun wird die Breite der roten Linie mit dem Feintrieb über das Okular bestimmt.

Die Prismen sind alle gleichseitig mit einer Basislänge von 6 cm .

4.2 Gitterspektrometer

Der Aufbau entspricht dem des Prismenspektrometers, wobei statt der Prismen ein Glasgitter [Breite $b = 1,5\text{ cm}$] verwendet wird. Die folgenden Messungen werden jeweils für die erste, vierte und achte Ordnung durchgeführt:

- (1) Die Ablenkungswinkel der gelben, grünen und violetten Doppellinie werden bestimmt.
- (2) Die Winkeldifferenz zwischen den gelben Linien und zwischen einer gelben und der grünen werden bestimmt.
- (3) Vor das Gitter werden verschiedene Spalte mit fester Breite gesetzt. Diejenige Spaltbreite wird notiert, bei der die gelben Linien nicht mehr voneinander zu trennen sind.

5 Auswertung

5.1 Das Prismenspektrometer

Strahlengänge

Abbildung 5 zeigt die Strahlengänge im Versuch.

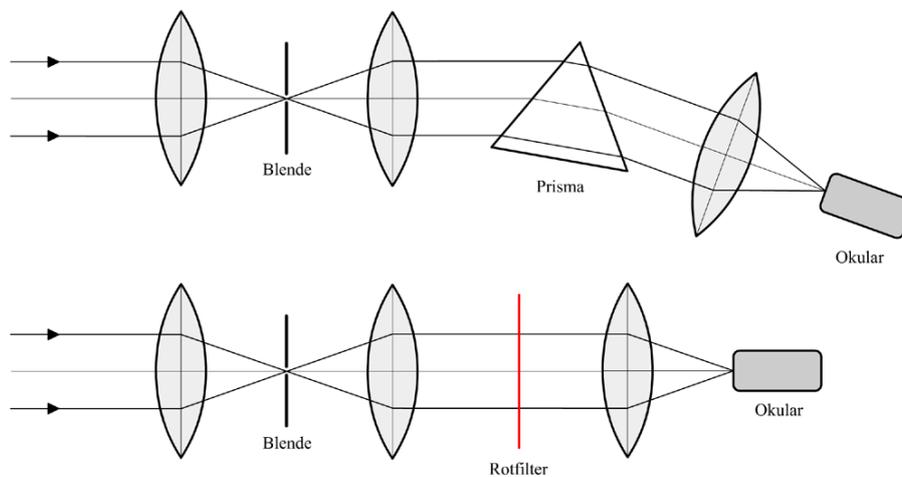


Abbildung 5: Strahlengang.

Der obere Teil stellt den Verlauf für die Messung mit dem Prisma dar, der untere Teil zeigt den Strahlengang bei der Bestimmung der Spaltbreite.

Wellenlängen der Emissionslinien von Quecksilber

In Tabelle 1 ordnen wir den [für unsere Auswertung relevanten] Wellenlängen der Emissionslinien von Quecksilber Indizes zu, so dass wir im Folgenden auf diese referenzieren können.

Wellenlänge	Farbe
$\lambda_1 = 579,07 \text{ nm}$	gelb
$\lambda_2 = 576,96 \text{ nm}$	gelb
$\lambda_3 = 546,07 \text{ nm}$	grün
$\lambda_4 = 407,78 \text{ nm}$	violett

Tabelle 1: Beobachtete Emissionslinien von Quecksilber.

Ablenkwinkel

Ohne das Prisma im Strahlengang haben wir den Drehtisch in Nullage gedreht und den Spalt mit dem Feintrieb im Fadencross des Okulars zentriert. Somit müssen wir die Ablenkwinkel der gelben Linie φ_1 nicht um ihre Nullposition korrigieren. Da der Nonius eine Skala von $0,1^\circ$ hat, gehen wir von einem Ablesefehler von $\sigma_{\varphi_1} = 0,05^\circ$ aus.

Durch einfache Geometrieüberlegungen ergibt sich der Unterschied des Ablenkungswinkel $\Delta\varphi_{1,3}$ zwischen der gelben und der grünen Linie durch

$$\Delta\varphi_{1,3} = \arctan\left(\frac{|F_0 - F_1|}{d}\right),$$

wobei F_0 und F_1 die Nullposition und die eingestellte Position des Feintriebs sind und d der Abstand zwischen dem Okular und Linse 3. Wir nehmen an, dass $\sigma_d = 5\text{ mm}$ gilt. Den Fehler des Feintriebes vernachlässigen wir. Der Fehler des Unterschieds des Ablenkungswinkels berechnet sich dann durch das Gesetz der Fehlerfortpflanzung mit

$$\sigma_{\Delta\varphi_{1,3}} = \sqrt{\sigma_d^2 \left(\frac{\partial\Delta\varphi_{1,3}}{\partial d}\right)^2} = \frac{\sigma_d \cdot |F_0 - F_1|}{d^2 \left(1 + \frac{|F_0 - F_1|^2}{d^2}\right)}.$$

Somit gilt nach der Fehlerfortpflanzung $\sigma_{\varphi_3} = \sigma_{\varphi_1} + \sigma_{\Delta\varphi_{1,3}}$. Tabelle 2 zeigt die berechneten Ablenkungswinkel.

	φ_1 [°]	σ_{φ_1} [°]	$\Delta\varphi_{1,3}$ [°]	φ_3 [°]	σ_{φ_3} [°]
Kronglas	38,90	0,05	0,13	39,03	0,06
leichtes Flintglas	48,50	0,05	0,31	48,81	0,06
schweres Flintglas	60,00	0,05	0,44	60,44	0,06

Tabelle 2: Ablenkungswinkel der Prismenspektrometer.

Winkelabstand der gelben Linien

Wir nehmen an, dass die Winkeldispersion konstant ist. Dann gilt

$$\frac{\Delta\varphi_{1,2}}{\Delta\lambda_{1,2}} = \text{const.} = \frac{\Delta\varphi_{1,3}}{\Delta\lambda_{1,3}}.$$

Daraus folgt

$$\Delta\varphi_{1,2} = \frac{\Delta\varphi_{1,3}}{\Delta\lambda_{1,3}} \Delta\lambda_{1,2} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3} \Delta\varphi_{1,3}.$$

Der zugehörige Fehler ergibt sich mit der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{\Delta\varphi_{1,2}} = \sigma_{\varphi_{1,3}} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3},$$

dabei haben wir die Wellenlängen der Emissionslinien als exakt angenommen. In Tabelle 3 stellen wir unsere Ergebnisse dar.

	Kronglas	leichtes Flintglas	schweres Flintglas
$\Delta\varphi_{1,2}$ [°]	$0,008 \pm 0,001$	$0,020 \pm 0,001$	$0,027 \pm 0,001$

Tabelle 3: Winkelabstand der gelben Emissionslinien.

Winkeldispersion der Prismen

Mit der Winkeldifferenz $\Delta\varphi_{1,3}$ berechnen wir die Winkeldispersion der drei Prismen. Es gilt

$$D = \frac{\Delta\varphi_{1,3}}{\Delta\lambda_{1,3}}.$$

Durch die Angaben des Herstellers¹ über die Winkeldispersion $\Delta\varepsilon = \varepsilon_F - \varepsilon_C$, wobei ε_F der Austrittswinkel einer Welle mit $\lambda = 480 \text{ nm}$ und ε_C derjenige für eine Welle mit $\lambda = 643,8 \text{ nm}$ ist, können wir Vergleichswerte berechnen. In Tabelle 4 stellen wir die berechneten Werte der Winkeldispersion zusammen. Dabei bezeichnen die mit H. gekennzeichneten Spalten die Herstellerangaben. Hinter den herkömmlichen Namen der Prismen sind die Materialbezeichnungen des Herstellers vermerkt.

	D [$\frac{rad}{m}$]	H. $\Delta\varepsilon$	H. D [$\frac{rad}{m}$]
Kronglas [N-BK7]	68786 ± 1055	$0^\circ 42' 51''$	76096
leichtes Flintglas [N-F2]	165451 ± 2455	$1^\circ 51' 51''$	180873
schweres Flintglas [N-SF10]	230264 ± 3253	$3^\circ 00' 05''$	380096

Tabelle 4: Winkeldispersionen der Prismenspektrometer.

Dispersion der Prismen

Stellt man (13) nach $dn/d\lambda$ um, so erhält man einen direkten Zusammenhang zwischen der Dispersion und der Winkeldispersion. Es gilt

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{D \cos((\varphi + \varepsilon)/2)}{2 \sin(\varepsilon/2)}.$$

Dabei ist $\varepsilon = 60^\circ$ der brechende Winkel des Prismas und φ der Gesamtblenkungswinkel. Die berechneten Werte stellen wir in Tabelle 5 zusammen.

¹ http://www.linos-katalog.de/pdf/de05/04_094-097_d05.pdf, aufgerufen am 12.02.2006.

	$D \left[\frac{\text{rad}}{m} \right]$	$\varphi_1 [^\circ]$	$\frac{dn}{d\lambda} [mm^{-1}]$	H. $\frac{dn}{d\lambda} [mm^{-1}]$
Kronglas	68786	38,9	44718 ± 686	49471
leichtes Flintglas	165451	48,5	96665 ± 1434	117587
schweres Flintglas	230264	60	115132 ± 1626	190048

Tabelle 5: Dispersionen der Prismenspektrometer.

Auflösungsvermögen

Um das Auflösungsvermögen der Prismenspektrometer bestimmen zu können, müssen wir zunächst die Breite desjenigen Spaltes berechnen, bei dem die beiden gelben Linien gerade noch voneinander unterscheidbar waren. Die Vergrößerung V unseres System ergibt sich durch

$$V = \frac{\text{Bildweite}}{\text{Gegenstandsweite}} = \frac{f_3 - f_{\text{Okular}}}{f_2}.$$

Da wir die Brennweite des Okulars nicht kennen, setzen wir $d := f_3 - f_{\text{Okular}}$, wobei d der Abstand zwischen Linse 3 und dem Okular ist. Da weiterhin der von uns verwendete Spalt nicht richtig funktionierte, haben wir nur einen Wert für das schwere Flintglas erhalten. Der Fehler der Vergrößerung ergibt sich durch

$$\sigma_V = \frac{\sigma_d}{f_2}.$$

Wir nehmen f_2 als exakt an und schätzen $\sigma_d = 5 \text{ mm}$. Damit erhalten wir $V = 35,4 \text{ cm} / 35 \text{ cm} \approx 1,012 \pm 0,02$. Wir maßen eine Breite von $B' = 0,89 \text{ mm}$, somit ergibt sich die wahre Spaltbreite B zu

$$B = V \cdot B' = 0,90 \pm 0,02 \text{ mm}.$$

Wieder ergibt sich der Fehler durch die Fehlerfortpflanzung, wobei wir $\sigma_{B'}$ vernachlässigen.

Die theoretische Auflösung $A_{\text{theor.}}$ berechnet sich nach (14) mit

$$A_{\text{theor.}} = S \frac{dn}{d\lambda} = 2 \cdot B \cdot \frac{\sin(\varepsilon/2)}{\cos\left(\frac{\varepsilon+\varphi}{2}\right)} \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|.$$

Dabei ist $\varepsilon = 60^\circ$ der brechende Winkel des Prismas und φ der Gesamtablenkungswinkel. Der zugehörige Fehler berechnet sich nach der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{A_{\text{theor.}}} = \sqrt{\sigma_B^2 \left(\frac{\partial A}{\partial B} \right) + \sigma_{\text{Disp.}}^2 \left(\frac{\partial A}{\partial \text{Disp.}} \right) + \sigma_\varphi^2 \left(\frac{\partial A}{\partial \varphi} \right)}.$$

Wir erhalten ein theoretisches Auflösungsvermögen von

$$A_{\text{theor.}} = 207,3 \pm 4,6.$$

Das tatsächliche Auflösungsvermögen, d.h. das Auflösungsvermögen, welches das Prismenspektrometer mindestens hat, berechnet sich durch

$$A_{\text{mind.}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Dies bedeutet, dass Licht mit der Wellenlänge λ gerade noch von Licht der Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda$ zu unterscheiden ist. Wir haben die beiden gelben Linien voneinander unterscheiden können, und somit gilt

$$A_{\text{mind.}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = 274,5.$$

Wir bemerken, dass das theoretische Auflösungsvermögen kleiner ist, als das tatsächliche. Dies sollte nicht der Fall sein. Darum berechnen wir das theoretische Auflösungsvermögen noch einmal mit den Herstellerangaben der Dispersion und erhalten

$$A_{\text{H. theor.}} = 342,2.$$

Dieser Wert erscheint uns realistischer.

Maximal erreichbares Auflösungsvermögen

Wir hatten die theoretische Auflösung durch

$$A_{\text{theor.}} = S \frac{dn}{d\lambda}$$

berechnet. Nehmen wir nun an, dass die gesamte geometrische Basislänge von $S = 6 \text{ cm}$ ausgeleuchtet wird, so erhalten wir die maximalen Auflösungsvermögen des Prismenspektrometers. Die kleinste noch trennbare Wellenlängendifferenz, die im Bereich des gelben Lichts noch aufgelöst werden kann, ergibt sich dann durch

$$\Delta\lambda_{\text{min.}} = \frac{\lambda_1}{A_{\text{max.}}}$$

Die folgende Tabelle zeigt unsere Ergebnisse.

	Kronglas	leichtes Flintglas	schweres Flintglas
$A_{\text{max.}}$	4127	9927	13816
$\Delta\lambda_{\text{min.}} [nm]$	0,14031	0,05833	0,04191

5.2 Das Gitterspektrometer

Ablenkwinkel

Analog zu 5.1 berechnen wir die Ablenkungswinkel. Wir konnten die gelben Emissionslinien in der 1. Ordnung nicht unterscheiden und geben somit keinen Wert für ihre Winkeldifferenz an. Wir stellen unsere Ergebnisse in Tabelle 6 dar. Der Fehler ist jeweils $0,05^\circ$.

Ordnung	$\varphi_1 [^\circ]$	$\varphi_3 [^\circ]$	$\varphi_4 [^\circ]$	$\varphi_{1,2} [^\circ]$	$\varphi_{1,3} [^\circ]$
1	3,3	3,15	2,3	-	0,15
4	13,4	12,6	10	0,1	0,8
8	31,35	29,45	28,65	0,15	1,9

Tabelle 6: Ablenkwinkel beim Gitterspektrometer.

Gitterkonstante

Es gilt²

$$\sin \varphi_{\max.} = \frac{k\lambda}{a},$$

dabei ist $\sin \varphi_{\max.}$ der Ablenkwinkel, unter welchem ein Beugungsmaximum zur Wellenlänge λ in der k -ten Ordnung auftritt, und a die Gitterkonstante. Somit folgt

$$a = \frac{k\lambda}{\sin \varphi_{\max.}}$$

Für den Fehler gilt

$$\sigma_a = \sigma_{\varphi_{\max.}} \left(\frac{\partial a}{\partial \varphi_{\max.}} \right) = \sigma_{\varphi_{\max.}} \frac{\lambda k \cos(\sigma_{\varphi_{\max.}})}{\sin(\sigma_{\varphi_{\max.}})^2}.$$

Bei der Berechnung der Gitterkonstante aus den Winkeldifferenzen der gelben und grünen Linien gilt analog

$$a = \frac{k\Delta\lambda}{\sin \Delta\varphi_{\max.}}. \quad (19)$$

Auch der Fehler berechnet sich auf gleiche Art und Weise wie bei den totalen Ablenkungswinkeln. Unsere berechneten Werte stellen wir in Tabelle 7 zusammen. Alle Angaben sind in μm . Aus Gründen, die wir weiter unten

² Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 171.

	1. Ordnung	4. Ordnung	8. Ordnung
φ_1	$10,04 \pm 0,12$	$9,98 \pm 0,04$	$8,89 \pm 0,01$
φ_3	$9,94 \pm 0,16$	$10,01 \pm 0,04$	$8,89 \pm 0,01$
φ_4	$10,16 \pm 0,22$	$9,39 \pm 0,05$	$6,8 \pm 0,01$
$\varphi_{1,2}$	-	$4,84 \pm 2,42$	$6,45 \pm 2,15$
$\varphi_{1,3}$	$12,2 \pm 4,2$	$9,15 \pm 0,59$	$7,71 \pm 0,21$

Tabelle 7: Gitterkonstante in μm .

erläutern werden, benutzen wir nur die Werte aus der 1. und 4. Ordnung, um den gewichteten Mittelwert der Gitterkonstante zu berechnen. Wir erhalten

$$a = 9,86 \pm 0,03 \mu m.$$

Wellenlängendifferenz der gelben Emissionslinien

Stellen wir (19) nach $\Delta\lambda$ um, so können wir bei gegebener Gitterkonstante den Wellenlängenabstand zwischen den beiden gelben Emissionslinien berechnen. Es gilt

$$\Delta\lambda_{1,2} = \frac{a \sin(\Delta\varphi_{1,2})}{k},$$

mit den gleichen Bezeichnungen wie oben. Der Fehler ergibt sich durch

$$\sigma_{\Delta\lambda_{1,2}} = \sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sin(\Delta\varphi_{1,2})}{k}\right)^2 + \sigma_{\Delta\varphi_{1,2}}^2 \left(\frac{a \cos(\Delta\varphi_{1,2})}{k}\right)^2}.$$

Wir erhalten in der 4. Ordnung eine Wellenlängendifferenz von

$$\Delta\lambda_{1,2}^{(4)} = 4,3 \pm 2,2 nm$$

und in der 8. Ordnung

$$\Delta\lambda_{1,2}^{(8)} = 3,2 \pm 1,1 nm.$$

Der Literaturwert³ liegt bei $2,1 nm$ und somit in unserem Fehlerbalken.

Da wir grade schon so gut dabei sind, sonst nichts zu tun haben und diese

³ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 173.

Auswertung auch sonst nicht zu lange dauert, berechnen wir abweichend vom Praktikumsprotokoll auch noch die Wellenlängendifferenz zwischen der gelben und der grünen Emissionslinie. Wir erhalten in der 4. Ordnung eine Wellenlängendifferenz von

$$\Delta\lambda_{1,3}^{(4)} = 34,4 \pm 2,2 \text{ nm}$$

und in der 8. Ordnung

$$\Delta\lambda_{1,3}^{(8)} = 40,8 \pm 1,1 \text{ nm}.$$

Der Literaturwert⁴ liegt bei 33 nm und somit leider nur bei der Messung in der 4. Ordnung in unserem Fehlerbalken.

Auflösungsvermögen

Das tatsächliche Auflösungsvermögen, d.h. das Auflösungsvermögen, welches das Gitterspektrometer mindestens hat, berechnet sich analog zu dem tatsächlichen Auflösungsvermögen des Prismenspektrometers. Es gilt

$$A_{\text{mind.}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = 274,5.$$

Das theoretische Auflösungsvermögen in der k -ten Ordnung wird nach (18) durch

$$A_{\text{theor.}} = N \cdot k$$

berechnet. Dabei ist N die Anzahl der beleuchteten Spalte. Es gilt $N = B/a$, wobei a die Gitterkonstante und B die Breite der Spaltblende ist, bei welcher die beiden gelben Emissionslinien gerade noch zu unterscheiden waren. Somit folgt

$$A_{\text{theor.}} = N \cdot k = \frac{kB}{a}.$$

Der zugehörige Fehler berechnet sich durch

$$\sigma_{A_{\text{theor.}}} = \frac{\sigma_a B k}{a^2}.$$

Wir erhalten in der 4. Ordnung

$$A_{\text{theor.}}^{(4)} = 304 \pm 1$$

und in der 8. Ordnung

$$A_{\text{theor.}}^{(8)} = 609 \pm 2.$$

⁴ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 173.

Das theoretische Auflösungsvermögen ist wie erwartet größer als das tatsächliche. Das maximal erreichbare Auflösungsvermögen in der 1. Ordnung ergibt sich, wenn das gesamte Gitter der Breite $B = 1,5 \text{ cm}$ ausgeleuchtet wird. Es ergibt sich

$$A_{\text{max.}} = 1521.$$

Wellenlänge der violetten Emissionslinie

Die Wellenlänge der violetten Emissionslinie erhalten wir durch

$$\lambda_4 = \frac{a \sin(\varphi_4)}{k},$$

mit denselben Bezeichnungen wie oben. Der Fehler ergibt sich durch

$$\sigma_{\lambda_4} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a \sin(\varphi_4)}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\varphi_4} a \cos(\varphi_4)}{k}\right)^2}.$$

In Tabelle 8 stellen wir unsere Ergebnisse zusammen. Der Literaturwert⁵

Ordnung	1.	2.	3.
$\lambda_4 [nm]$	396 ± 10	428 ± 3	591 ± 2

Tabelle 8: Wellenlänge der violetten Emissionslinie.

liegt bei $407,78 \text{ nm}$. Somit liegt unser Wert der 1. Ordnung im gewünschten Bereich, der Wert der 4. Ordnung noch in akzeptablem Abstand. Der Wert der 3. Ordnung liegt jedoch völlig daneben und wir erkennen durch „Rückwärtsrechnen“, dass wir wohl nicht die 8. sondern eher die 11. Ordnung ausgemessen haben. Deswegen haben wir auch weiter oben bei der Berechnung der Gitterkonstante die Werte für die 8. Ordnung außer Acht gelassen.

6 Diskussion

Allgemeine Anmerkungen

Die berechneten Werte sind alle mehr oder weniger zufriedenstellend. Die meisten Schwierigkeiten lagen bei der Justierung des Versuchsaufbaus. Die

⁵ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 173.

so verlorene Zeit hat ganz offensichtlich unsere Motivation für genaue Messungen verringert. Doch das Praktikumsskript⁶ weist insbesondere bei diesem Versuch massive Lücken bei der Versuchsdurchführung auf, was die zu messenden Größen betrifft. Auch Literaturwerte vermisst man schmerzlich. Immer auf Vorgängerprotokolle angewiesen zu sein, kann auch seine Tücken haben. Natürlich hat man in der Forschung auch keine Literaturwerte zur Verfügung, doch ich denke, dass man bei einem Versuch, bei dem alle Ergebnisse aufeinander aufbauen, ruhig solch eine Stütze geben kann.

Auflösungsvermögen

Die theoretischen Auflösungsvermögen von Prismen- und Gitterspektrometer stimmen ungefähr überein. Das Auflösungsvermögen in den höheren Ordnungen des Gitterspektrometers ist jedoch sehr viel höher. Die maximalen erreichbaren Werte für das Auflösungsvermögen sind im Experiment nicht erreichbar. Die Intensität der Emissionslinien ist dafür viel zu schwach. Das tatsächliche Auflösungsvermögen sagt viel mehr über den Versuchsaufbau aus, da wir oft schon Schwierigkeiten hatten die beiden gelben Linien zu unterscheiden.

Eigene Kommentare

[Auswertung erinnert an Messung großer Widerstände: Viel, viel Rumgerechne, wobei der Sinn nur teilweise erkannt wurde. Durch ständiges Nachjustieren hat auch der Versuch ansich null Spaß gemacht.]_{Daniel}

[Der Versuch war nach der Justierung des Strahlengangs fix durchgeführt. Die Auswertung hat viel zu lange gedauert. Der didaktische Sinn der Auswertung blieb mir auch unbekannt. Es war viel zu viel rumgerechne. Man hätte die Auswertung wirklich auf einige interessante Punkte kürzen können, um somit die Motivation der Praktikanten hochzuhalten. So finde ich es zum Beispiel völlig übertrieben die Gitterkonstante nicht anzugeben, zumal man diese Angaben vom Hersteller beziehen kann. Viel spannender wäre es bei gegebener Gitterkonstante lediglich die Wellenlängen der Emissionslinien auszurechnen. Ist dies nicht der eigentliche Sinn eines Spektrometers?]_{Hauke}

⁶ Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 168-174.