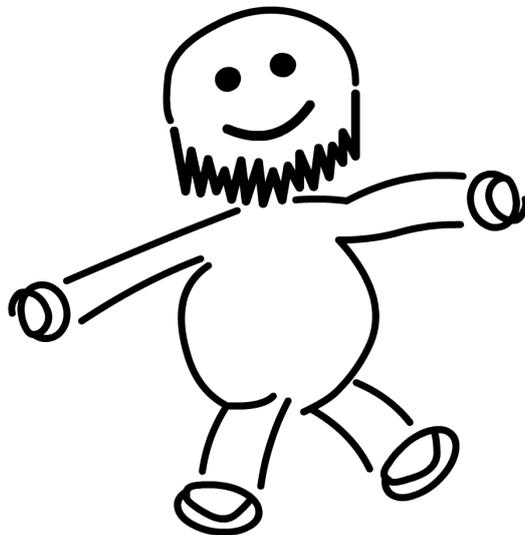


Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene

Versuch 213

Messung der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit mit Ultraschall

Wintersemester 2006 / 2007



Name:	Daniel Scholz
Mitarbeiter:	Hauke Rohmeyer
E-Mail:	physik@mehr-davon.de
Gruppe:	FK 56
Assistent:	Robert Mettin
Durchgeführt am:	23. Januar 2007
Protokoll abgeben:	26. Januar 2007

Vorbereitung: ___ Versuch: ___ Protokoll: ___

Testiert: _____ Note: _____

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Longitudinalwellen	3
2.2	Geschwindigkeiten bei Wellen	4
2.3	Gruppengeschwindigkeit	4
2.4	Die Wellengleichung in kompressiblen Medien	5
2.5	Reflexion und Transmission	7
2.6	Lösung der Wellengleichung für schallweiche Grenzflächen . .	7
3	Fragen zur Versuchsvorbereitung	9
3.1	Frage 1	9
3.2	Frage 2	10
3.3	Frage 3	11
4	Versuchsdurchführung	11
4.1	Messung der Phasengeschwindigkeit	11
4.2	Messung der Gruppengeschwindigkeit	11
5	Auswertung	13
5.1	Berechnung der Phasengeschwindigkeit	13
5.2	Berechnung der Gruppengeschwindigkeit	13
5.3	Schallgeschwindigkeit in Wasser	14
5.4	Vergleich der Messergebnisse mit der Theorie	15
6	Diskussion	16
7	Anhang	18

1 Einleitung

In diesem Versuch werden wir die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit einer Welle exemplarisch am Beispiel von akustischer Wellen in einer Wasserrinne messen.

Um die Phasengeschwindigkeit zu bestimmen, wird im Wesentlichen die Wellenlänge einer stehenden Welle in der Rinne gemessen. Ein ähnliches Vorgehen haben wir bereits in Versuch 233, Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten, untersucht.

Um die Gruppengeschwindigkeit zu bestimmen, messen wir die Laufzeit eines mit einem Signalgenerator erzeugten Wellenpaketes.

2 Theorie

2.1 Longitudinalwellen

Akustische Wellen sind *Longitudinalwellen*. Bei einer Longitudinalwelle, wie auch zum Beispiel einer Druckwelle, schwingen die Atome in Ausbreitungsrichtung der Welle. Es handelt sich um eine Kompressionswelle, bei der durch Druckänderungen Kräfte entstehen, die eine Auslenkung der Atome in Ausbreitungsrichtung verursachen.

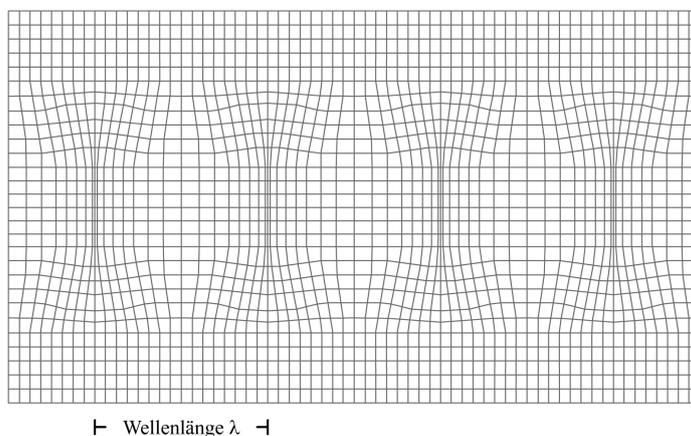


Abbildung 1: Schematische Darstellung einer Longitudinalwelle.

Longitudinalwellen treten sowohl in Festkörpern, wie auch in Gasen und Flüssigkeiten auf. Die einzelnen Moleküle bewegen sich vor und zurück, nur der *Zustand* in der Welle, also zum Beispiel die maximale Dichte, wandert nach rechts. Dieser Effekt der Dichtefluktuationen tritt auch im vorliegenden Versuch auf: Eine akustische Welle wandert als Longitudinalwelle durch eine mit Wasser gefüllte Rinne.

2.2 Geschwindigkeiten bei Wellen

Bei einer sich ausbreitenden Welle unterscheidet man zwei Geschwindigkeiten, die die Welle charakterisieren: die **Phasengeschwindigkeit** und die **Gruppengeschwindigkeit**.

Die Phasengeschwindigkeit c_{ph} gibt an, mit welcher Geschwindigkeit sich die *Phase* einer Welle ausbreitet, mit welcher Geschwindigkeit sich also die Wellenberge bzw. Wellentäler in einer unendlich ausgedehnten harmonischen Welle fortbewegen. Für eine solche Welle gilt

$$a(x, t) = a_0 \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

wobei $\omega t - kx + \varphi_0$ die **Phase** der Welle bezeichnet. Dabei ist ω die Kreisfrequenz, $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl mit der Wellenlänge λ , x der Ort, t die Zeit und a_0 sowie φ_0 sind zwei Konstanten.

Die Größen ω und k sind im Allgemeinen nicht unabhängig voneinander, sondern über eine **Dispersion** $\omega = \omega(k)$ miteinander verknüpft.

Für einen festen Phasenwert gilt für den Ort

$$x = \frac{1}{k} \cdot (\omega t + \text{konst})$$

und für die Phasengeschwindigkeit folgt damit

$$c_{\text{ph}} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\text{bei konstanter Phase}} = \frac{\omega}{k}. \quad (1)$$

2.3 Gruppengeschwindigkeit

Die Gruppengeschwindigkeit bezeichnet dagegen die Geschwindigkeit, mit der sich ein räumlich begrenztes Wellenpaket ausbreitet, also die Geschwindigkeit der Einhüllenden. Die Gruppengeschwindigkeit ist also die Geschwindigkeit, mit der Informationen transportiert werden können.

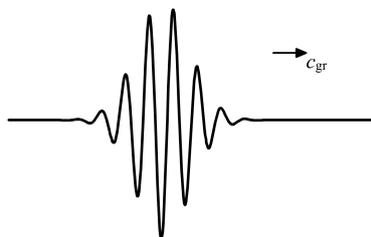


Abbildung 2: Gaußsches Wellenpaket zur Verdeutlichung der Gruppengeschwindigkeit.

Ein solches Wellenpaket ist etwas schwieriger zu untersuchen. Um die Gruppengeschwindigkeit berechnen zu können, muss ein Umweg über die Fourier-Transformation gemacht werden.

Nach längerer Rechnung ergibt sich mit der Dispersion $\omega = \omega(k)$ für die Gruppengeschwindigkeit

$$c_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Mit $\omega = k \cdot c_{\text{ph}}$ und $k = 2\pi/\lambda$ folgt

$$c_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk} = c_{\text{ph}} + k \cdot \frac{dc_{\text{ph}}}{dk} = c_{\text{ph}} - \lambda \cdot \frac{dc_{\text{ph}}}{d\lambda}. \quad (2)$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist damit genau dann verschieden von der Phasengeschwindigkeit, wenn Dispersion vorliegt.

2.4 Die Wellengleichung in kompressiblen Medien

Breitet sich eine Welle in einem kompressiblen Medium aus, so variieren die Zustandsgrößen Druck p , Dichte ϱ und Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von Ort x und Zeit t . Um einen Zusammenhang zwischen diesen Größen herzustellen und damit eine Wellengleichung formulieren zu können, müssen drei Erhaltungssätze herangezogen werden:

- (1) **Massenerhaltung:** In einem Raumelement d^3r befindet sich die Masse ϱd^3r . Diese Masse muss zeitlich erhalten bleiben, es ergibt sich die **Kontinuitätsgleichung**

$$\dot{\varrho} + \text{div}(\varrho v) = 0. \quad (3)$$

Diese Gleichung besagt, dass aus einem Volumenelement gerade soviel Masse *herausfließt*, wie sich die Dichte ändert. Damit bleibt die Masse erhalten.

- (2) **Impulserhaltung:** Der Impuls ϱv in einem Volumenelement ändert sich durch Kräfte auf das Volumenelement und dadurch, dass die Grenzflächen des Raumelements durchströmt werden. Man erhält damit die **Impulserhaltungsgleichung**

$$\frac{d}{dt}(\varrho v) + \text{div} I + \text{grad} p = \vec{0}, \quad (4)$$

dabei ist I der **Impulsstromdichtetensor**, in unserem Falle also eine 3×3 -Matrix.

- (3) **Energiehaltung:** Unter Vernachlässigung von nicht reversiblen Prozessen reduziert sich die Energieerhaltung auf die Adiabatangleichung.

Diese gilt näherungsweise auch für Wasser, wir erhalten daher die Energieerhaltung

$$p = p_0 \cdot \frac{\varrho^\kappa}{\varrho_0}, \quad (5)$$

wobei $\kappa \approx 7$ der Adiabatenexponent von Wasser ist und p_0 sowie ϱ_0 sind Druck sowie Dichte des ungestörten Mediums.

Um aus diesen drei Erhaltungssätzen auf die Wellengleichung schließen zu können, machen wir den Ansatz

$$p = p_0 + p', \quad \varrho = \varrho_0 + \varrho' \quad \text{und} \quad v = v_0 + v'.$$

Diese **Linearisierung** können wir dadurch rechtfertigen, dass wir bei Wellen meist nur kleine Schwankungen dieser Zustandsgrößen um ihre Mittelwerte betrachten. Aus der Kontinuitätsgleichung (3) folgt damit

$$\dot{\varrho}' + \varrho_0 \cdot \operatorname{div} v' = 0,$$

aus der Impulserhaltungsgleichung (4)

$$\varrho_0 \dot{v}' + \operatorname{grad} p' = 0$$

und aus der Energieerhaltung (5)

$$p' = \kappa \cdot \frac{p_0}{\varrho_0} \cdot \varrho' =: c^2 \cdot \varrho'.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt die **Wellengleichung**

$$\ddot{p}' - c^2 \Delta p' = 0, \quad (6)$$

wobei Δ das Laplace-Symbol ist.

Das Geschwindigkeitspotential

Auch das **Geschwindigkeitspotential** $\Phi = \Phi(x, t)$ mit

$$v' = \operatorname{grad} \Phi \quad \text{und} \quad p' = \varrho_0 \dot{\Phi} \quad (7)$$

erfüllt die Wellengleichung, es gilt also

$$\ddot{\Phi} - c^2 \Delta \Phi = 0. \quad (8)$$

Die einfachste Lösung dieser Gleichung ist die ebene Welle in x -Richtung, also

$$\Phi = \Phi_0 \cdot \cos(\omega t - kx)$$

mit $\omega = ck$ und den gleichen Bezeichnungen wie oben.

Weiter definieren wir noch den **Wellenwiderstand**

$$Z := \frac{p'}{v'} = \varrho_0 c,$$

welcher in den folgenden Betrachtungen eine Rolle spielen wird.

2.5 Reflexion und Transmission

Wir betrachten den Übergang einer Welle von einem Medium 1 mit dem Wellenwiderstand $Z_1 = p'_+/v'_+$ in ein Medium 2 mit dem Wellenwiderstand $Z_2 = p'_2/v'_2$. Ein Teil der einlaufenden Welle, nämlich der Anteil p'_-/v'_- , wird reflektiert und ein Teil geht in das Medium 2 über. Die Drücke und die Geschwindigkeiten sind an der Grenzfläche stetig, es ergeben sich die **Randbedingungen**

$$p'_+ + p'_- = p'_2 \quad \text{und} \quad v'_+ - v'_- = v'_2.$$

Nach einigen Umformungen erhalten wir damit den **Reflexionskoeffizienten**

$$R := \frac{p'_-}{p'_+} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \in [-1, 1].$$

Somit sind die Wellenwiderstände der beiden Medien entscheidend für die Reflexion. Man unterscheidet bei akustischen Wellen zwischen drei Grenzfällen:

- (1) **schallhart:** Hier gilt $Z_2 \gg Z_1$. Es folgt $R \approx 1$, die Welle wird fast vollständig ohne Phasensprung reflektiert.
- (2) **schallweich:** Hier gilt $Z_2 \ll Z_1$. Es folgt $R \approx -1$, die Welle wird mit einem Phasensprung von π reflektiert.
- (3) **angepasst:** Hier gilt $Z_1 \approx Z_2$. Es folgt $R \approx 0$, die Welle geht ohne Reflexion von Medium 1 in Medium 2 über.

Damit erhalten wir auch eine Randbedingungen für das Geschwindigkeitspotential Φ an der Grenzfläche: Bei schallweichen Grenzflächen muss nach (7) gerade

$$\text{grad } \Phi = \vec{0}$$

gelten.

2.6 Lösung der Wellengleichung für schallweiche Grenzflächen

Im Versuch wird eine Wasserrinne der Breite B mit der Wasserhöhe H verwendet. Da es sich hierbei um eine schallweiche Grenzfläche handelt, wollen wir die Wellengleichung für schallweiche Grenzflächen berechnen.

Die Welle breitet sich in x -Richtung aus. Aus der Randbedingung

$$\text{grad } \Phi = \vec{0}$$

an den Grenzflächen folgen nach längerer Rechnung aus dem Ansatz

$$\Phi = \Phi_0 \cdot \exp(i\omega t) \cdot \exp(i(\pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z))$$

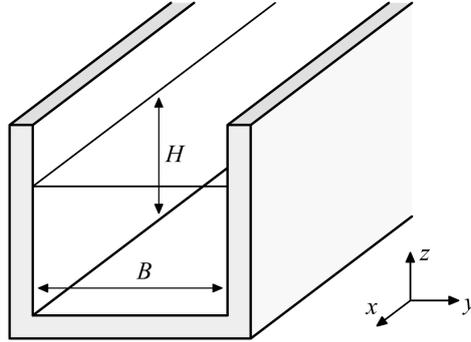


Abbildung 3: Zur Verdeutlichung der Abmessungen in der Wasserrinne.

die Bedingungen

$$k_y = \frac{n_y \pi}{B} \quad \text{und} \quad k_z = \frac{n_z \pi}{H}, \quad (9)$$

dabei gilt $n_y, n_z \in \mathbb{N}$. Somit bestimmen n_y und n_z den **Schwingungszustand** oder den **Schwingungsmodus** in der yz -Ebene. Diese Moden werden mit der Kurzschreibweise (n_y, n_z) angegeben.

Die Wellenzahlen addieren sich über alle Raumrichtungen vektoriell zu k_0 . Damit folgt

$$\begin{aligned} k_2 &= \sqrt{k_0^2 - k_y^2 - k_z^2} \\ &= \sqrt{k_0^2 - \left(\left(\frac{n_y \pi}{B} \right)^2 + \left(k_z = \frac{n_z \pi}{H} \right)^2 \right)} =: k_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_g}{\omega} \right)^2}, \end{aligned}$$

wobei die **Grenzfrequenz** ω_g definiert ist durch

$$\omega_g := \pi c \cdot \sqrt{\frac{n_y^2}{B^2} + \frac{n_z^2}{H^2}}.$$

Für Frequenzen unterhalb dieser Grenzfrequenz ist Φ nicht mehr periodisch in x , sondern klingt exponentiell ab. Falls k_x reell ist, gilt für die Phasengeschwindigkeit, welcher in x -Richtung gemessen wird,

$$c_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_g}{\omega} \right)^2}}. \quad (10)$$

Zur Berechnung der Gruppengeschwindigkeit lösen wir diese Gleichung nach ω auf und differenzieren nach Gleichung (2) nach k_x . Wir erhalten

$$c_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk_x} = \frac{d}{dk_x} \sqrt{c^2 k_x^2 + \omega_g^2} = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_g}{\omega} \right)^2}. \quad (11)$$

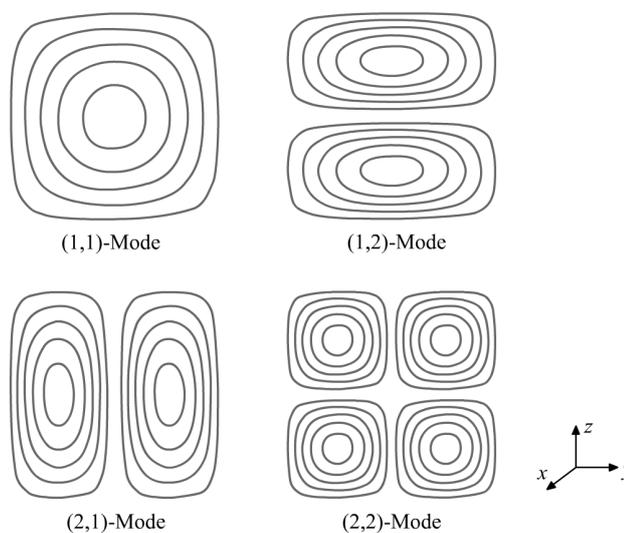


Abbildung 4: Veranschaulichung einiger Moden.

Damit ist das Produkt aus Phasen- und Gruppengeschwindigkeit gerade c^2 :

$$c = \sqrt{c_{\text{ph}} \cdot c_{\text{gr}}} . \quad (12)$$

3 Fragen zur Versuchsvorbereitung

Bevor wir zur Versuchsdurchführung übergehen, sollen an dieser Stelle noch einige Fragen beantwortet werden, die zur Versuchsvorbereitung dienen.

3.1 Frage 1

Warum ist das Messverfahren zur Messung der Phasengeschwindigkeit nur dann sinnvoll, wenn nur eine einzige Mode ausbreitungsfähig ist?

Antwort

Das Verfahren ist nur dann sinnvoll, wenn eine einzige Mode ausbreitungsfähig ist, da die einzelnen (n_y, n_z) -Moden nach Gleichung (10) unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten c_{ph} haben:

$$c_{\text{ph}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_g}{\omega}\right)^2}} \quad \text{mit} \quad \omega_g = \pi c \cdot \sqrt{\frac{n_y^2}{B^2} + \frac{n_z^2}{H^2}} .$$

3.2 Frage 2

In welchem Wasserhöhenbereich kann gemessen werden, damit die Bedingung aus Frage 1 für die (1,1)-Mode erfüllt ist?

Antwort

Damit eine (n_y, n_z) -Mode ausbreitungsfähig ist, muss

$$2\pi f = \omega \geq \omega_g = \omega_g = \pi c \cdot \sqrt{\frac{n_y^2}{B^2} + \frac{n_z^2}{H^2}}$$

gelten. Daraus folgt als Bedingung für die Wasserhöhe H

$$H \geq \frac{n_z c B}{\sqrt{4f^2 B^2 - c^2 n_y^2}}.$$

Mit den im Versuch bei ca. $20^\circ C$ verwendeten Werten

$$c = 1480 \frac{m}{s}, \quad B = 0,13 m \quad \text{und} \quad f = 12,5 kHz$$

folgt

$$\begin{aligned} (1,1)\text{-Mode} &: H \geq 6,68 \text{ cm}, \\ (1,2)\text{-Mode} &: H \geq 13,37 \text{ cm}, \\ (2,1)\text{-Mode} &: H \geq 14,69 \text{ cm}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Eine Messung ist also nur im Intervall

$$6,68 \text{ cm} \leq H \leq 13,37 \text{ cm}$$

sinnvoll.

An dieser Stelle sehen wir auch, dass die **Grenzhöhe** H zur (1,1)-Mode stark von der Frequenz f abhängt. Wählen wir zum Beispiel eine Frequenz von $f = 10 kHz$, so erhalten wir

$$(1,1)\text{-Mode} : H_{10kHz}^{Gr} \geq 9,05 \text{ cm}.$$

Mit sinkender Frequenz ist eine Messung also erst bei größerer Wasserhöhe H sinnvoll. Umgekehrt ergeben sich bei steigender Frequenz auch schon bei niedrigeren Wasserhöhen Störmoden.

Zudem erhalten wir bei steigender Wasserhöhe H auch immer mehr Moden, die sich überlagern können. Je höher der Wasserspiegel, desto größer wird also auch die Moden- und die Grenzhöhendichte. Die Parameter im Versuch sind jedoch so abgestimmt, dass wir genügend Messwerte nur zur (1,1)-Mode aufnehmen können.

3.3 Frage 3

Gibt es eine Wasserhöhe, bei der eine andere als die (1, 1)-Mode als einzige ausbreitungsfähig ist?

Antwort

Es ist mit unserem Versuchsaufbau nicht möglich eine andere als die (1, 1)-Mode zu vermessen, da die untere Grenzfrequenz ω_g mit der Ordnung der Mode wächst. Ist also zum Beispiel die (2, 1)-Mode bei einer bestimmten Frequenz ausbreitungsfähig, so ist es die (1, 1)-Mode erst recht.

Auch unterhalb der Grenzfrequenz für höhere Moden ist (insbesondere in der Nähe des Senders) noch ein gewisser Anteil dieser Moden zu messen. Man bringt das Mikrophon also am günstigsten in einer Druckknotenlinie der nächst höheren Mode an, also genau in der Mitte der Rinne für die Moden (2, 1), (1, 2) und (2, 2). Der Einfluss der Störmoden kann weiter unterdrückt werden, indem man (durch Veränderung des Abstandes von Sender und Reflektor) die Rinne auf Resonanz mit der (1, 1)-Mode abstimmt. Da der Sender selbst einen schallweichen Abschluss der Rinne darstellt, muss das Mikrophon ein wenig vor dem Sender platziert werden, um eine optimale Empfindlichkeit zu erreichen.

4 Versuchsdurchführung

4.1 Messung der Phasengeschwindigkeit

Zunächst soll die Phasengeschwindigkeit der (1, 1)-Moden in einer schallweich ausgekleideten Wasserrinne gemessen werden.

Dazu wird bei der fest vorgegebenen Frequenz $f = 12,5 \text{ kHz}$ eine stehende Schallwelle vor der schallweich reflektierenden Querwand erzeugt und die Wellenlänge λ über den Abstand zweier Druckknoten gemessen. Die Phasengeschwindigkeit ergibt sich dann nach

$$c_{\text{ph}} = f \cdot \lambda.$$

Dabei sind die Antworten der Fragen aus Kapitel 3 zu beachten.

Der schematische Versuchsaufbau ist Abbildung 5 zu entnehmen.

4.2 Messung der Gruppengeschwindigkeit

Zur Messung der Gruppengeschwindigkeit wird das Oszilloskop mit einer Frequenz von 500 Hz getriggert und der Sender mit Gauß-Impulsen mit einer Impulsrate von 50 Hz (und wieder) mit der Grundfrequenz $f = 12,5 \text{ kHz}$ betrieben. Der Reflektor wird so eingestellt, dass die Echos der Impulse

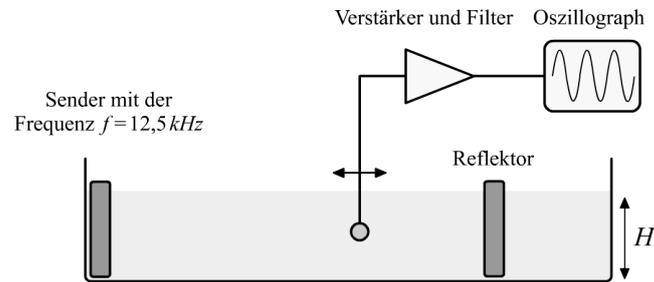


Abbildung 5: Schematische Versuchsaufbau zur Messung der Phasengeschwindigkeit.

genau übereinander liegen. Dabei sollten zwischen zwei Impulsen genau 9 Echos sichtbar sein. Dies entspricht mit dem Primärimpuls des Senders also gerade 10 periodischen Maxima auf dem Oszilloskop.

Der Abstand zwischen Sender und Reflektor entspricht dann gerade der Strecke, die ein Wellenpaket in 1 ms zurücklegt.

Da das Mikrofon dicht vor dem Sender steht, kann das erste Echo eine größere Amplitude haben, als der Primärimpuls, da es teilweise mit seiner Reflektion am Sender selbst interferiert und die Echos trotz des möglichst schallweichen Aufbaus mit der Zeit an Intensität verlieren. Dieser Effekt bewirkt auch, dass die Impulsbreite der Echos größer ist, als die des Primärimpulses.

Der schematische Versuchsaufbau ist Abbildung 6 zu entnehmen.

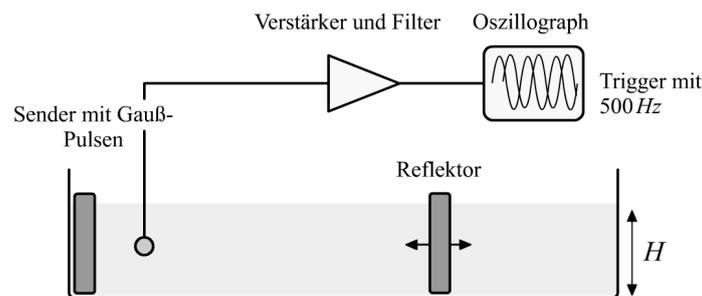


Abbildung 6: Schematische Versuchsaufbau zur Messung der Gruppengeschwindigkeit.

Aus praktischen Gründen ermitteln wir jeweils Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bezüglich einer Wasserhöhe H , bevor wir diese ändern. Begonnen wird bei einer Wasserhöhe von ca. 13 cm . Die Höhe wird in $0,5\text{ cm}$ Schritten verringert.

5 Auswertung

5.1 Berechnung der Phasengeschwindigkeit

Um zunächst die Phasengeschwindigkeit bei unterschiedlichen Wasserhöhen H zu berechnen, nutzen wir die Beziehung

$$c_{\text{ph}} = f \cdot \lambda$$

mit $f = 12,5 \text{ kHz}$. Die Wellenlänge λ ergab sich über den Abstand zweier Druckknoten. Wir haben hier jeweils mehrere Werte aufgenommen und den Mittelwert gebildet. Mit sinkender Wasserhöhe H wurde es immer schwieriger genaue Messwerte aufzunehmen, daher haben wir die Fehler hier größer eingeschätzt. Dieses Phänomen liegt daran, dass wir uns der Grenzhöhe $H_{12,5 \text{ kHz}}^{\text{Gr}} \approx 6,68 \text{ cm}$ angenähert haben.

Unsere Ergebnisse sind Tabelle 1 zu entnehmen.

Wasserhöhe H in cm	λ in cm	c_{ph} in m/s
$7,0 \pm 0,1$	$50,0 \pm 5,0$	$6250,0 \pm 625,0$
$7,5 \pm 0,1$	$32,3 \pm 3,0$	$4037,5 \pm 375,0$
$8,0 \pm 0,1$	$25,2 \pm 2,0$	$3145,8 \pm 250,0$
$8,5 \pm 0,1$	$22,6 \pm 2,0$	$2829,2 \pm 250,0$
$9,0 \pm 0,1$	$20,4 \pm 1,5$	$2550,0 \pm 187,5$
$9,5 \pm 0,1$	$190,7 \pm 1,0$	$2383,3 \pm 125,0$
$10,0 \pm 0,1$	$182,3 \pm 1,0$	$2279,2 \pm 125,0$
$10,5 \pm 0,1$	$17,5 \pm 1,0$	$2187,5 \pm 125,0$
$11,0 \pm 0,1$	$169,3 \pm 1,0$	$2116,7 \pm 125,0$
$11,5 \pm 0,1$	$165,7 \pm 1,0$	$2070,8 \pm 125,0$
$12,0 \pm 0,1$	$16,2 \pm 1,0$	$2025,0 \pm 125,0$
$12,3 \pm 0,1$	$16,0 \pm 1,0$	$2000,0 \pm 125,0$

Tabelle 1: Phasengeschwindigkeit der (1,1)-Moden in Wasser bei einer Frequenz von $f = 12,5 \text{ kHz}$ und unterschiedlichen Wasserhöhen H .

5.2 Berechnung der Gruppengeschwindigkeit

Wie bereits in der Versuchsdurchführung beschrieben, entspricht der Abstand zwischen Sender und Reflektor gerade der Strecke W , die ein Wellenpaket in 1 ms zurücklegt. Wir haben nun zu verschiedenen Wasserhöhen H die Strecke W gemessen und können damit nach

$$c_{\text{gr}} = \frac{W}{1 \text{ ms}} = 1000 \cdot W \frac{1}{s}$$

die Gruppengeschwindigkeit berechnen. Auch hier haben wir aus den unter Abschnitt 5.1 beschriebenen Gründen für sinkende Wasserhöhen H einen

größer Fehler angenommen.

Unsere Ergebnisse sind Tabelle 2 zu entnehmen.

Wasserhöhe H in cm	Weg W in cm	c_{gr} in m/s
$7,0 \pm 0,1$	$36,0 \pm 20,0$	$360,0 \pm 200,0$
$7,5 \pm 0,1$	$56,0 \pm 15,0$	$560,0 \pm 150,0$
$8,0 \pm 0,1$	$71,2 \pm 15,0$	$712,0 \pm 150,0$
$8,5 \pm 0,1$	$81,6 \pm 10,0$	$816,0 \pm 100,0$
$9,0 \pm 0,1$	$87,3 \pm 10,0$	$873,0 \pm 100,0$
$9,5 \pm 0,1$	$92,2 \pm 10,0$	$922,0 \pm 100,0$
$10,0 \pm 0,1$	$97,3 \pm 10,0$	$973,0 \pm 100,0$
$10,5 \pm 0,1$	$101,5 \pm 10,0$	$1015,0 \pm 100,0$
$11,0 \pm 0,1$	$106,0 \pm 5,0$	$1060,0 \pm 50,0$
$11,5 \pm 0,1$	$109,0 \pm 5,0$	$1090,0 \pm 50,0$
$12,0 \pm 0,1$	$109,5 \pm 5,0$	$1095,0 \pm 50,0$
$12,3 \pm 0,1$	$109,6 \pm 5,0$	$1096,0 \pm 50,0$

Tabelle 2: Gruppengeschwindigkeit der $(1,1)$ -Moden in Wasser bei einer Frequenz von $f = 12,5 kHz$ und unterschiedlichen Wasserhöhen H .

5.3 Schallgeschwindigkeit in Wasser

Mit der Phasen- und der Gruppengeschwindigkeit bei gleichen Wasserhöhen H können wir nach Gleichung (12) nun auch die Schallgeschwindigkeit von Wasser (bei $20^\circ C$) berechnen:

$$c = \sqrt{c_{ph} \cdot c_{gr}}.$$

Unsere Ergebnisse liefern die Werte aus Tabelle 3. Der Fehler ergibt sich dabei nach dem Gesetz der Fehlerfortpflanzung durch

$$\sigma_c = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{c_{ph}} \cdot c_{gr}}{2 \cdot \sqrt{c_{ph} \cdot c_{gr}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{c_{gr}} \cdot c_{ph}}{2 \cdot \sqrt{c_{ph} \cdot c_{gr}}}\right)^2}.$$

Der gewichtete Mittelwert dieser Werte liegt bei

$$c = 1492,7 \pm 23,2 \frac{m}{s}.$$

Da die Schallgeschwindigkeit in Wasser stark von der Temperatur abhängt¹, mussten wir die Temperatur kontrollieren, um einen Vergleich zum Literaturwert heranziehen zu können.

¹ Dies haben wir bereits in Versuch 233, Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten, untersucht.

Höhe H in cm	c_{ph} in m/s	c_{gr} in m/s	c in m/s
$7,0 \pm 0,1$	$6250,0 \pm 625,0$	$360,0 \pm 200,0$	$1500,0 \pm 423,4$
$7,5 \pm 0,1$	$4037,5 \pm 375,0$	$560,0 \pm 150,0$	$1503,7 \pm 213,3$
$8,0 \pm 0,1$	$3145,8 \pm 250,0$	$712,0 \pm 150,0$	$1496,6 \pm 168,5$
$8,5 \pm 0,1$	$2829,2 \pm 250,0$	$816,0 \pm 100,0$	$1519,4 \pm 114,8$
$9,0 \pm 0,1$	$2550,0 \pm 187,5$	$873,0 \pm 100,0$	$1492,0 \pm 101,5$
$9,5 \pm 0,1$	$2383,3 \pm 125,0$	$922,0 \pm 100,0$	$1482,4 \pm 89,3$
$10,0 \pm 0,1$	$2279,2 \pm 125,0$	$973,0 \pm 100,0$	$1489,2 \pm 86,7$
$10,5 \pm 0,1$	$2187,5 \pm 125,0$	$1015,0 \pm 100,0$	$1490,1 \pm 84,9$
$11,0 \pm 0,1$	$2116,7 \pm 125,0$	$1060,0 \pm 50,0$	$1497,9 \pm 56,6$
$11,5 \pm 0,1$	$2070,8 \pm 125,0$	$1090,0 \pm 50,0$	$1502,4 \pm 57,0$
$12,0 \pm 0,1$	$2025,0 \pm 125,0$	$1095,0 \pm 50,0$	$1489,1 \pm 57,2$
$12,3 \pm 0,1$	$2000,0 \pm 125,0$	$1096,0 \pm 50,0$	$1480,5 \pm 57,3$

Tabelle 3: Gemessene Schallgeschwindigkeit in Wasser zu den unterschiedlichen Wasserhöhen H .

Wir haben die Temperatur während des Versuches dreimal gemessen, sie lag zwischen $19,8^\circ C$ und $20,2^\circ C$, daher können wir den aus der Literaturmappe und Theoriebesprechung bekannten Literaturwert $c_{Lit} = 1486 m/s$ verwenden.

Unser Ergebnis weicht damit gerade einmal $0,45\%$ vom Literaturwert ab und liegt somit im Fehlerbalken.

5.4 Vergleich der Messergebnisse mit der Theorie

Mit den in der Theorie unter Abschnitt 2.6 vorgestellten Ergebnissen erhalten wir den erwarteten Verlauf der Phasengeschwindigkeit in Abhängigkeit der Wasserhöhe H nach

$$c_{ph}(H) = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_g(H)}{\omega}\right)^2}} \quad \text{mit} \quad \omega_g(H) = \pi c \cdot \sqrt{\frac{n_y^2}{B^2} + \frac{n_z^2}{H^2}}.$$

Dabei gilt $\omega = 2\pi f$ und $n_y = n_z = 1$. Verwendet wurde eine Frequenz von $f = 12,5 kHz$ sowie die Breite $B = 13 cm$. Als Schallgeschwindigkeit nutzen wir den Literaturwert $c = c_{Lit} = 1486 m/s$. Da unser Ergebnis nach dem vorherigen Abschnitt diesem Wert sehr nahe kommt, verzichten wir auf dessen Darstellung.

Analog erhalten wir für die Gruppengeschwindigkeit den erwarteten Verlauf

$$c_{ph}(H) = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_g(H)}{\omega}\right)^2} \quad \text{mit} \quad \omega_g(H) = \pi c \cdot \sqrt{\frac{n_y^2}{B^2} + \frac{n_z^2}{H^2}}.$$

Die erwarteten Kurven zusammen mit unseren Messergebnissen inklusive Fehlerbalken sind in Abbildung 7 dargestellt.

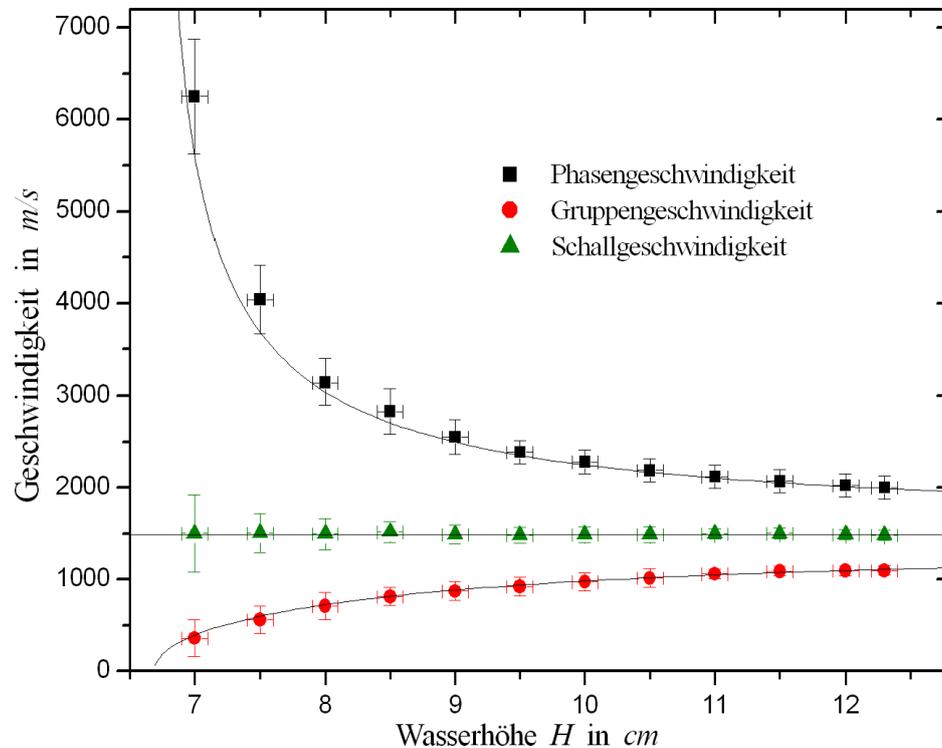


Abbildung 7: Vergleich von Theorie und Messung.

6 Diskussion

Zunächst wollen wir festhalten, dass wir mit den Ergebnissen unserer Messungen sehr zufrieden sind. Wir haben bereits diskutiert, dass die Messungen bei sinkender Wasserhöhe immer ungenauer wurden, trotzdem liegen die theoretischen Werte nach Abbildung 7 alle im Fehlerbalken unserer Messungen.

Überraschend gut sind auch die Ergebnisse der Schallgeschwindigkeit in Wasser. Auch gerade bei niedrigen Wasserständen haben wir hier noch gute Messungen erzielt.

Trotzdem bleiben einige systematische Fehler natürlich nicht aus. Diese sind zum Beispiel:

- (1) Weder der Reflektor noch die Auskleidung der Rinne sind als völlig schallweich anzusehen.

- (2) Die Anpassung der Rinne wurde dadurch erheblich erschwert, dass sich beim Verschieben des Reflektors Oberflächenwellen auf dem Wasser gebildet haben, die ein genaues Erkennen der Resonanz erschwerten.
- (3) Der Reflektor hat die Rinne nicht völlig dicht abgeschlossen.

Dagegen können wir die Temperatur als Fehlerquelle ausschließen: Eine wesentliche Veränderung der Temperatur während der Messungen fand nicht statt: Wir haben die Wassertemperatur mehrmals gemessen, sie lag konstant bei ca. 20°C .

Zu unseren erfreulichen Messergebnissen hat vermutlich auch die gute Betreuung durch den Assistenten beigetragen. Zur Phasen- und Gruppengeschwindigkeit wurde je eine Testmessung aufgenommen und mit dem Assistenten analysiert. Auch haben viele hilfreiche Bemerkungen zur Theorie zum Verständnis beigetragen, sodass wir dieses Wissen im Versuch einbringen konnten.

Die Theorie zum Versuch ist hingegen recht umfangreich und kompliziert. Daher musste hier stark auf die ausführliche Literaturliste zurückgegriffen werden.

Auf Grund wiederholter Missverständnisse weisen wir darauf hin, dass die eigenen Kommentare nur für die Praktikanten bzw. für den Autor des Protokolls gedacht sind und vom korrigierenden Assistenten nach Möglichkeit überlesen werden sollten!

Eigene Kommentare

[Ja die Theorie braucht man leider für den Versuch, aber ohne abschreiben ging da mal net viel. Auswertung natürlich sehr wünschenswert, nicht zu viel Arbeit dank guter Vorbereitung. Auch hilfreiche und nette Betreuung durch den Assistenten, nur hatte dieser leider zwei Gruppen parallel zu versorgen, sodass wir öfters länger warten mussten – und die anderen auch.]_{Daniel}

[Die Theorie war im Vorfeld etwas abschreckend, doch der Versuch war sehr gut.]_{Hauke}

7 Anhang

Unsere Messergebnisse mit geänderter Skalierung zur Verdeutlichung der Fehlerbalken:

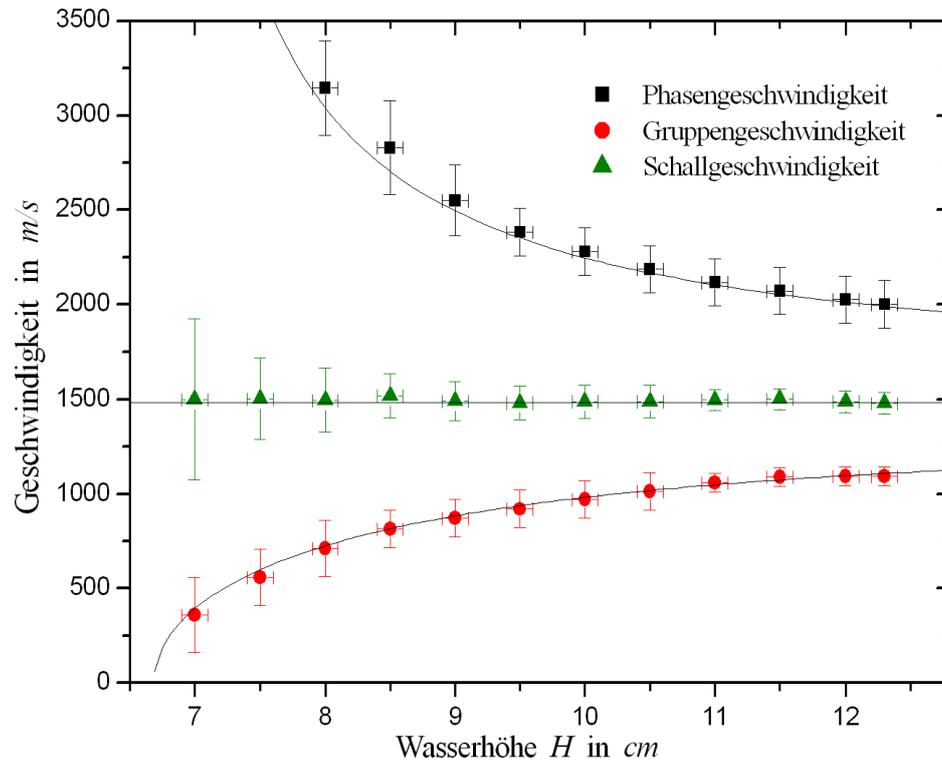


Abbildung 8: Vergleich von Theorie und Messung, geänderte Skalierung.