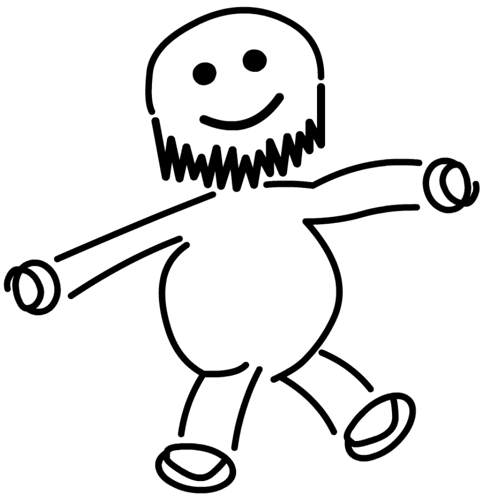
Spieltheorie



Daniel Scholz im Winter 2006 / 2007

Überarbeitete Version vom 12. September 2007.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Einleitung und Beispiele

In der Spieltheorie werden Konkurrenzsituationen untersucht, wobei in der Regel alle Beteiligten auf das Geschehen einwirken. Das Resultat des Einzelnen hängt dabei in der Regel von den Entscheidungen aller Spieler ab. Entscheidungen werden in der Regel in Unkenntnis der Einscheidungen der Mitspieler getroffen.

Neben Gegnern in klassischen Spielen gehören auch konkurrierende Unternehmen in der Wirtschaft oder *Gegner* in militärischen oder politischen Situationen zu Beispielen der Spieltheorie.

Es gibt also viele Anwendungsgebiete: Wirtschaft sowie Militär und Politik, aber auch Modelle in der Biologie oder Soziologie.

Das grundlegende Ziel in der Spieltheorie besteht somit immer darin eine Strategie zu Bestimmen, die *günstige* Ergebnisse herbeiführt.

Zunächst wollen wir aber einige einfache Beispiele vorführen.

Beispiel 1.1.1 (Gefangenendilemma)

Zwei Angeklagte, unsere Spieler S_1 und S_2, stehen vor Gericht, beide haben dieselben Straftaten begannen. Beide Spieler haben zwei Strategien zur Auswahl: schweigen oder gestehen. Eine Absprache zwischen den Angeklagten ist nicht möglich. Tabelle 1.1 zeigt die möglichen *Auszahlungen* an die Spieler, $(-9, -1)$ heißt dabei, dass Spieler S_1 für 9 Jahre und Spieler S_2 für 1 Jahr ins Gefängnis muss.

Ohne Absprache ist für beide die beste Strategie zu gestehen, obwohl es am günstigsten wäre, wenn beide schweigen würden.

(S_1, S_2)	gestehen	schweigen
gestehen	$(-7, -7)$	$(-1, -9)$
schweigen	$(-9, -1)$	$(-3, -3)$

Tabelle 1.1: Auszahlungsmöglichkeiten zum Gefangenendilemma.

Beispiel 1.1.2 (Counotsches Duopol)

Zwei Anbieter, unsere Spieler S_1 und S_2, stellen ein homogenes Produkt her. Der Preis reguliert sich durch die Angebotsmenge. Jeder Anbieter entscheidet sich unabhängig voneinander und ohne Kenntnis der Angebotsmenge des Mitspielers welche Menge er auf den Markt bringen will.

Dabei muss jeweils eine Kapazitätsschranke l_i beachtet werden und jeder Spieler i wählt eine Angebotsmenge s_i mit $0 \leq s_i \leq l_i$. Die Produktionskosten seien $k_i(s_i)$ zu gegebenen Funktionen k_i. Zu einer weiteren Funktion p ist der Preis für jedes Produkt $p(s_1 + s_2)$.

Die Auszahlungen an die Spieler sind damit

$$\begin{aligned}
\pi_1(s_1, s_2) &= s_1 \cdot p(s_1 + s_2) - k_1(s_1), \\
\pi_2(s_1, s_2) &= s_2 \cdot p(s_1 + s_2) - k_2(s_2).
\end{aligned}$$

Dieses Modell lässt sich auch zu einer optimalen Strategie beider Anbieter lösen.

Beispiel 1.1.3 (Nim-Spiel)

Nun betrachten wir ein klassisches Spiel mit zwei Spielern S_1 und S_2. Es liegen $n = 6$ Hölzer vor den Spielern und jeder nimmt abwechselnd ein oder zwei Hölzer weg. Spieler S_1 beginnt das Spiel und der Spieler, der dabei das letzte Holz wegnimmt, gewinnt.

Dieses Spiel können wir durch den ***Spielbaum*** aus Abbildung 1.1 veranschaulichen.

Das Nim-Spiel ist spieltheoretisch deswegen so interessant, weil immer ein Spieler das Spiel gewinnen kann. Unabhängig von den Zügen des Spielers S_1 gewinnt im Beispiel mit $n = 6$ immer Spieler S_2, wenn dieser keine Fehler macht.

1.2 Spiele in extensiver Form

Zunächst führen wir einige Begriffe zur Charakterisierung von Spielen ein.

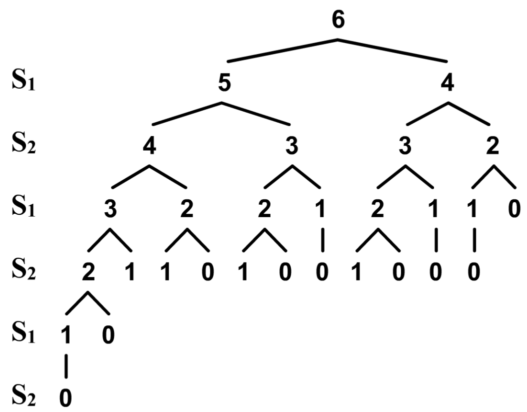


Abbildung 1.1: Spielbaum zum Nim-Spiel.

Grundlegende Begriffe

Ein Spiel besteht immer aus den folgenden Komponenten:

(1) Den Spielern,

(2) der Strategiemengen,

(3) den Zufallszügen,

(4) den Informationsmengen der Spieler und aus

(5) den Auszahlungen.

Beispiele

(1) Schach: Wir haben 2 Spieler, eine sehr große aber endliche Strategiemenge, keine Zufallszüge und vollständige Informationen.

(2) Roulette: Wir haben n Spieler, eine endliche Strategiemenge, Zufallszüge und vollständige Informationen.

(3) Wirtschaft (siehe Counotsches Duopol): Wir haben n Spieler mit unendliche vielen Strategien, kein Zufall und keine Informationen.

(4) Verkehrsmodell: Wir haben unendlich viele Spieler mit einer endlichen Strategiemenge, teilweise Zufall und keine Informationen.

Ein Spiel in extensiver Form ist durch einen Spielbaum (siehe Abbildung 1.1) repräsentiert. Jeder Knoten stellt einen Spielzustand dar und die Spieler bewegen sich mittels Zügen durch den Baum. Den Blättern des Baumes sind Auszahlungen zugeordnet.

Bevor wir eine exakte Definition einführen, untersuchen wir ein weiteres Beispiel.

Beispiel 1.2.1 (Matching Pennies)

Wir haben zwei Spieler S_1 und S_2, jeder wählt in Unkenntnis über die Wahl des anderen Spielers Kopf K oder Zahl Z. Spieler S_1 gewinnt, wenn verschieden gewählt wurde, andernfalls gewinnt Spieler S_2.

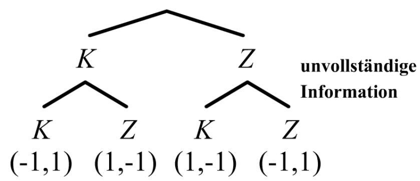


Abbildung 1.2: Spielbaum zu Matching Pennies.

Das besondere hierbei ist, dass im Baum unvollständige Informationen vorliegen.

Definition 1.2.2

Ein n-Personen ***Spiel in extensiver Form*** ist gegeben durch:

(1) Einen ***Spielbaum*** $\Gamma = (V, E)$ mit Startknoten A und Knotenmenge V sowie Kantenmenge E.

(2) Eine Auszahlungsfunktion $p(v) = (p_1(v), \ldots, p_n(v))$ definiert für jedes Blatt $v \in V$. Dabei entspricht p_i die Auszahlung des Spielers i.

(3) Eine Partitionierung der nicht Blätter $v \in V$ in eine $n+1$ Spielermenge $S_0, \ldots, S_n$. Hierbei steht der Spieler S_0 für den Zufall.

(4) Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die ausgehenden Kanten für alle $v \in S_0$.

(5) Eine Aufteilung jeder Menge S_i in disjunkte Informationsmengen S_i^j, so dass:

  (a) Alle Knoten in einer Informationsmenge dieselbe Menge der ausgehenden Kanten haben.

(b) Kein Pfad beginnend in A zwei oder mehr Knoten aus einer Informationsmenge enthält.

(6) Eine Indizierung für jede Informationsmenge S_i^j der direkten Nachfolger durch die Indexmenge I_i^j.

Die Informationsmenge S_i^j repräsentiert also für Spieler i die Spielzustände, die er nicht unterscheiden kann.

Beispiel 1.2.3

In Abbildung 1.3 sind zwei Spielbäume zu sehen. Im linken Spielbaum ist der Zug von Spieler 1 geheim und im rechten Spielbaum ist der Zug von Spieler 1 und Spieler 0 (dem Zufall) geheim. Grau unterlegt sind jeweils die Informationsmengen von Spieler 2. Dieser kann an Knoten aus einer Menge nicht sagen an welchem Knoten er sich gerade befindet.

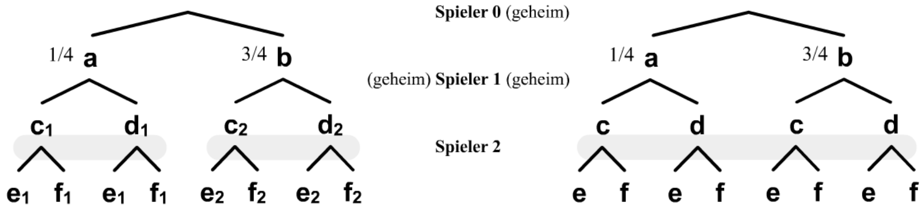


Abbildung 1.3: Verdeutlichung von Informationsmengen (grau unterlegt).

Defintion 1.2.4

In einem Spielbaum Γ hat ein Spieler I ***perfekte Information***, wenn für alle j gerade $|S_i^j| = 1$ gilt.

Bei jedem Zug kann Spieler i also genau sagen an welchem Knoten er sich befindet.

1.3 Strategien und Normalform

Defintion 1.3.1

Eine ***Strategie*** σ_i des Spielers i ordnet jeder seiner Informationsmengen S_i^j eine der ausgehenden Knoten zu.

Wir bezeichnen $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ als den ***Strategievektor***. Die ***Strategiemenge*** des Spielers i wird mit Σ_i bezeichnet und $\Sigma = \prod_i^n \Sigma_i$ ist die Menge aller Strategievektoren.

Nach einmaliger Wahl einer Strategie durch jeden Spieler ist das Spiel beendet. Die Idee der Strategie ist für komplexe Spiele wie Schach nicht praktisch durchführbar, sie ist aber für die theoretische Anschauung hilfreich.

Nach Wahl einer Strategie $\sigma_i \in \Sigma_i$ des Spielers i bestimmen nur noch die Zufallszüge das Ergebnis. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen liefern denn Erwartungswert der Auszahlungen

$$\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \;=\; (\pi_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \ldots, \pi_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))$$

als gewichteten Durchschnitt der Auszahlungen an den Blättern, welche durch $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ erreicht werden.

Beispiel 1.3.2

In Abbildung 1.4 wird ein Spielbaum mit den Auszahlungen $p_2(v)$ für Spieler 2 durch x, y, z bzw. r, s, t veranschaulicht.

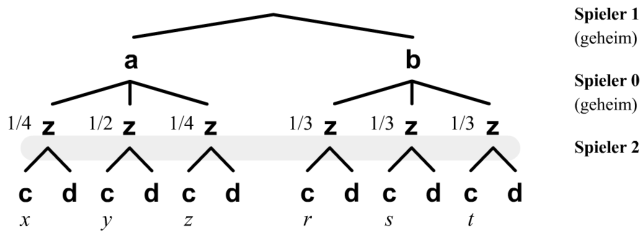


Abbildung 1.4: Auszahlungen als Erwartungswert.

Spieler 1 wähle zunächst die Strategie $\sigma_1 = (a)$. Wählt Spieler 2 die Strategie $\sigma_2 = (c)$, so haben wir den Strategievektor $\sigma = (a, c)$ und Spieler 2 erhält eine Auszahlung von

$$\pi_2(a, c) \;=\; \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z.$$

Für $\sigma_1 = (b)$ und dem Strategievektor $\sigma = (b, c)$ erhalten wir analog

$$\pi_2(b, c) \;=\; \frac{1}{3}r + \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}t.$$

Defintion 1.3.3

Die ***Normalform*** eines Spiels Γ wird gegeben durch einen n-Tensor, welcher für alle Werte von $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die Auszahlung $\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ tabelliert.

Für zwei Spieler ist der 2-Tensor also einfach eine Matrix, für mehr Spieler erhalten wir ein höherdimensionales Gebilde.

Beispiel 1.3.4

Die Normalform für das Matching Pennies Spiel aus Beispiel 1.2.1 ist

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Kopf} & \text{Zahl} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Kopf} \\ \text{Zahl} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Beispiel 1.3.5 (Integer Game)

Beim Integer Game wird zufällig und geheim mit Gleichverteilung eine Zahl z aus $\{1,2,3,4\}$ gewählt. Spieler 1 wählt ein x und Spieler 2 wählt ein y aus $\{1,2,3,4\}$. Die Auszahlung wird definiert durch

$$(|y-z| - |x-z|,\, |x-z| - |y-z|),$$

beide Spieler versuchen also möglichst Nahe an z zu sein.

Wählt Spieler 1 zum Beispiel die 1 und Spieler 2 die 3, so erhalten wir eine Auszahlung zum Strategievektor $\sigma = (1,3)$ von

$$\pi(1,3) \;=\; \frac{1}{4} \cdot \sum_{z=1}^{4} (|3-z| - |1-z|,\, |1-z| - |3-z|) \;=\; (-0.5,\, 0.5).$$

Die gesammte Normalform ist also eine 4×4-Matrix:

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (-0.5,0.5) & (-0.5,0.5) & (0,0) \\ (0.5,-0.5) & (0,0) & (0,0) & (0.5,-0.5) \\ (0.5,-0.5) & (0,0) & (0,0) & (0.5,-0.5) \\ (0,0) & (-0.5,0.5) & (-0.5,0.5) & (0,0) \end{pmatrix}.$$

Defintion 1.3.6

Ein Spiel Γ heißt endlich, wenn der zugehörige Spielbaum endlich viele Knoten enthält.

Defintion 1.3.7

Ein Strategievektor

$$(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$$

heißt genau dann ***Gleichgewicht*** in Γ, wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ und für alle $\sigma_i \in \Sigma_i$

$$\pi_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n^*) \ \leq \ \pi_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$$

gilt.

Bei Maximierung der Auszahlungen ist eine Situation im Gleichgewicht, in der sich kein Spieler verbessern kann, solange die Mitspieler bei ihrer Strategie bleiben.

Beispiel 1.3.8

Ein Spiel mit der Normalform

$$\begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{pmatrix}.$$

hat zwei Gleichgewichte bei den Strategievektoren mit den von Null verschiedenen Auszahlungen.

Das Matching Pennies Spiel besitzt kein Gleichgewicht.

Im Folgenden wollen wir nun zeigen, dass bei perfekten Informationen aller Spieler immer ein Gleichgewicht existiert.

Defintion 1.3.9

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Spielbaum und $X \in V$ ein Knoten.

Mit Γ_X bezeichnen wir den Teilbaum, der die Wurzel X hat. Mit Γ/X bezeichnen wir den Teilbaum, der die übrigen Knoten und X enthält.

Defintion 1.3.10

Ein Spiel Γ ist an $X \in V$ ***zerlegbar***, wenn für jede Informationsmenge S_i^j

$$S_i^j \cap V(\Gamma_X) \ = \ \emptyset \qquad \text{und} \qquad S_i^j \cap (V(\Gamma/X) - \{X\}) \ = \ \emptyset$$

gilt. Dabei bezeichnet $V(\Gamma_X)$ die Knotenmenge von Γ_X und so weiter.

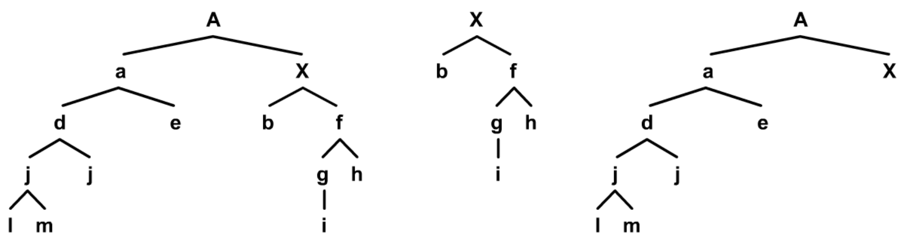


Abbildung 1.5: Ein Spielbaum Γ (links) mit Γ_X (mitte) und Γ/X (rechts).

Ist ein Γ zerlegbar, so heißt Γ/X das ***Quotientenspiel*** und Γ_X das ***Teilspiel***.

Wir können ein Spiel Γ also genau dann an X zerlegen, wenn wir dabei keine Informationsmenge *teilen* müssen.

Ist eine Spiel Γ an X zerlegbar, dann können auch die Strategien zerlegt werden, da ihr Definitionsbereich die Informationsmengen der Spieler sind und die Informationsmengen nicht zerteilt werden.

Wir zerlegen $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ in

$$\sigma_{|\Gamma/X} \;=\; (\sigma_{1|\Gamma/X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma/X})$$

durch Beschränkung von σ auf die Informationsmenge in Γ/X und in

$$\sigma_{|\Gamma_X} \;=\; (\sigma_{1|\Gamma_X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma_X})$$

durch Beschränkung von σ auf die Informationsmenge in Γ_X.

Für ein festes $\sigma_{|\Gamma_X}$ ist die Auszahlung an Blatt X des Quotientenspiels Γ_X gegeben durch

$$p(X) \;=\; \pi_{\Gamma_X}(\sigma_{1|\Gamma_X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma_X}).$$

Umgekehrt können Strategien $\sigma_{|\Gamma_X}$ und $\sigma_{|\Gamma/X}$ auch zu einer Strategie σ zusammengefasst werden.

Lemma 1.3.11

Sei Γ zerlegbar an X. Betrachte X als Blatt von Γ/X und ordne für ein festes $\sigma \in \Sigma$ dem Blatt X die Auszahlung

$$\pi_{\Gamma_X}(\sigma_{1|\Gamma_X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma_X})$$

zu. Dann gilt

$$\pi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \;=\; \pi_{\Gamma/X}(\sigma_{1|\Gamma/X}, \ldots, \sigma_{n|\Gamma/X}).$$

Lemma 1.3.12

Sei Γ zerlegbar an X und sei $\sigma \in \Sigma$ so gewählt, dass σ_{Γ_X} ein Gleichgewicht für Γ_X und dass $\sigma_{\Gamma/X}$ ein Gleichgewicht für Γ/X ist.

Dann ist auch die aus σ_{Γ_X} und $\sigma_{\Gamma/X}$ zusammengesetzt Strategie σ ein Gleichgewicht für Γ.

Aus den vorherigen beiden Ergebnissen erhalten wir nun die Hauptaussage dieses Abschnittes:

Satz 1.3.13

Jedes endliche n-Personen Spiel mit perfekter Information besitzt ein Gleichgewicht.

Beweis

Sei L die *Länge* von Γ, also die Anzahl der Kanten im längsten Pfad von Γ. L ist endlich, da das Spiel endlich ist. Wir führen nun eine vollständige Induktion über L durch.

Für $L = 1$ zieht nur ein Spieler. Dieser wählt seine beste Strategie und das Spiel ist im Gleichgewicht.

Wir nehmen an, dass Spiel hat auch für $L = m$ eine Strategie, so dass das Spiel im Gleichgewicht ist.

Nun wollen wir zeigen, dass die Behauptung auch für $L = (m + 1)$ gilt. Da Γ perfekte Information hat, können wir Γ beliebig zerlegen. Die Teilspiele haben eine Länge $L' < m$. Nach Induktionsannahme haben die Teilspiele Gleichgewichte. Nach Lemma 1.3.12 können wir nun auch ein Gleichgewicht für das gesamte Spiel Γ bilden. $\square$

1.4 Aufgaben

Aufgabe 1.4.1

Betrachte das Nim-Spiel aus Beispiel 1.1.3 mit zwei Spielern S_1 und S_2 für $n > 0$ Hölzchen. Die Spieler ziehen in jedem Zug abwechselnd $x \in \{1, 2, \ldots, p\}$ Hölzer, wobei $1 \leq p \leq n$ gilt. Spieler S_1 beginnt und es hat derjenige Spieler gewonnen, der das letzt Hölzchen nimmt.

Das spieltheoretisch besondere am Nim-Spiel ist, dass vor Beginn des Spiels feststeht, welcher Spieler gewinnt (wenn dieser Spieler keine Fehler macht). Gib für das (n, p)-Spiel eine Regel an, wer der Gewinner sein wird.

Zeichne den Spielbaum für $n = 8$ und $p = 3$ und überprüfe die gefundene Regel am Baum.

Lösung

Die Regel, nach der der Gewinner vor Beginn des Spiels feststeht, ist die folgende:

Ist n durch $p + 1$ teilbar, so gewinnt Spieler S_2, in allen anderen Fällen gewinnt Spieler S_1 (wenn dieser keine Fehler macht).

Begründung: Ist n durch $p+1$ teilbar, so muss Spieler S_2 immer die Differenz von $p + 1$ und den von S_1 genommenen Hölzer ziehen. Gilt zum Beispiel $p = 3$ und beginnt S_1 mit einem Hölzchen, so muss Spieler S_2 drei Hölzchen nehmen. Nach jeder Runde wurden dann genau $p+1$ Hölzchen entfernt und es wird immer Spieler S_2 gewinnen.

Ist n nun nicht durch $p+1$ teilbar, so muss Spieler S_1 in seinem ersten Zug so viele Hölzchen wegnehmen, wie die Rest bei der Division von n durch $p + 1$ ergibt. Damit sind wir nun im vorherigen Fall (die Anzahl der Resthölzer ist nun durch $p + 1$ teilbar) und da nun Spieler S_2 am Zug ist, kann immer S_1 auf die Züge von S_2 reagieren, sodass in jeder Runde (die S_2 beginnt) genau $p + 1$ Hölzchen entfernt werden. Spieler S_1 wird nun sicher gewinnen.

Der Spielbaum zum Spiel mit $n = 8$ und $p = 3$ wurde in Abbildung 1.6 veranschaulicht.

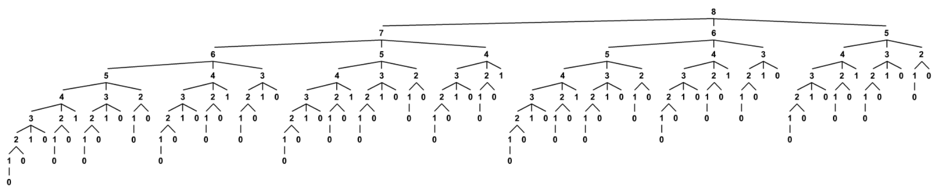


Abbildung 1.6: Spielbaum für das $(8, 3)$-Nim-Spiel.

Die Spielermenge S_1 besteht dabei aus allen Knoten, die keine Blätter sind und die in einer ungeraden Zeile zu finden sind. Die Spielermenge S_2 sind alle übrigen Knoten (die keine Blätter sind). Die Spielermenge S_0 ist die leere Menge, da wir keinen Zufall im Spiel haben.

Da $n = 8$ durch $p + 1 = 4$ teilbar ist, wird immer Spieler S_2 gewinnen, dies ist am Spielbaum auch sofort einsichtig.

Aufgabe 1.4.2

Wir betrachten das folgende Spiel in Normalform:

$$\begin{array}{c} \\ \text{Falke} \\ \text{Taube} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Falke} & \text{Taube} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \left(\frac{V-D}{2}, \frac{V-D}{2}\right) & (V,0) \\ (0,V) & \left(\frac{V+W}{2}, \frac{V+W}{2}\right) \end{pmatrix} \end{array}.$$

In diesem Spiel sind die Begriffe *Falke* und *Taube* Sinnbilder für aggressive oder friedliche Strategien in einer Konfliktsituation. Das Ziel ist es, ein wertvolles Gut zu erbeuten. Wählen beide Spieler die Falkenstrategie, so kämpfen sie um das Gut, wählen beide die Taubenstrategie, teilen sie das Gut zu gleichen Teilen auf. Wählen beide Spieler unterschiedliche Strategien, so wird das Gut dem aggressiven Spieler überlassen. Die Auszahlung erfolgt dabei folgendermaßen:

(1) V ist der Gewinn bei alleiniger Besitzname des Gutes.

(2) $D/2$ ist der Verlust beider Spieler, der im Zuge eines Kampfes entsteht.

(3) $W/2$ ist der Gewinn beider Spieler, wenn das Gut friedlich erbeutet wird.

Gib für alle vier Spielsituationen Bedingungen an V, W und D an, so dass die jeweilige Spielsituation im Gleichgewicht ist.

Lösung

Eine typische Aufgabe, bei der die Beschreibung des Spiels sehr viel länger ist als die Lösung. Wir haben nur die Normalform zu betrachten und erhalten:

(1) Die Spielsituation zum Strategievektor (Falke, Falke) ist genau dann im Gleichgewicht, wenn

$$\frac{V-D}{2} \geq 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{V-D}{2} \geq 0$$

gilt, wenn also $V \geq D$ gilt.

(2) Die Spielsituation zum Strategievektor (Taube, Taube) ist genau dann im Gleichgewicht, wenn

$$\frac{V+W}{2} \geq V \qquad \text{und} \qquad \frac{V+W}{2} \geq V$$

gilt, wenn also $W \geq V$ gilt.

(3) Die Spielsituation zu den beiden Strategievektoren (Falke, Taube) und (Taube, Falke) ist genau dann im Gleichgewicht, wenn

$$0 \;\geq\; \frac{V-D}{2} \qquad \text{und} \qquad V \;\geq\; \frac{V+W}{2}$$

gilt, wenn also $D \geq V$ und $V \geq W$ gilt.

2 Zwei Personen Nullsummenspiele

2.1 Definition von Zwei Personen Nullsummenspielen

Defintion 2.1.1

Ein Spiel Γ heißt ***Nullsummenspiel***, wenn für jedes Blatt $v \in V$ für der Auszahlung $p(v) = (p_1(v), \ldots, p_n(v))$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(v) \;=\; 0$$

gilt. Alles was die Spieler verlieren, muss von anderen Spielern gewonnen werden.

Verallgemeinert sind Nullsummenspiele ***Konstantsummenspiele***, für die an jedem Blatt die Summe über den Auszahlungen einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}$ annimmt.

Da für zwei Spieler und für zwei beliebige Blätter $v, v' \in V$ gilt, dass aus $p_1(v) \leq p_1(v')$ immer $p_2(v) \geq p_2(v')$ folgt, heißen Zwei Personen Nullsummenspiele auch ***stark kämpferisch***. Absprachen sind hier sinnlos.

Defintion 2.1.2

Im Zwei Personen Nullsummenspiel sei

$$p(v) \;=\; p_1(v) \;=\; -\,p_2(v)$$

die Auszahlung am Blatt v. Für ein festes $\sigma \in \Sigma$ bezeichnen wir mit

$$\pi(\sigma) \;=\; \pi_1(\sigma) \;=\; -\,\pi_2(\sigma)$$

den Erwartungswert im Spiel.

Achtung!

Wir betrachten für Zwei Personen Nullsummenspiele also immer nur *eine* Auszahlungsfunktion $p(v)$ und nicht mehr die beiden Aussahlungsfunktionen $p_1(v)$ und $p_2(v)$. Dies sollte in diesem Kapitel stets beachtet werden.

Satz 2.1.3

Wir betrachten ein Zwei Personen Nullsummenspiel, für das (σ_1, σ_2) und (τ_1, τ_2) zwei Gleichgewichte sind.

Dann gilt:

(1) (σ_1, τ_2) und (τ_1, σ_2) sind ebenfalls Gleichgewichte.

(2) Für die Auszahlungen gilt

$$\pi(\sigma_1, \sigma_2) \;=\; \pi(\tau_1, \tau_2) \;=\; \pi(\tau_1, \sigma_2) \;=\; \pi(\sigma_1, \tau_2).$$

2.2 Spielmatrix und Sattelpunkte

Defintion 2.2.1

Wir betrachten ein Zwei Personen Nullsummenspiel mit

$$\Sigma_1 \;=\; \{\sigma_1^1, \ldots, \sigma_1^m\} \qquad \text{und} \qquad \Sigma_2 \;=\; \{\sigma_2^1, \ldots, \sigma_2^n\}.$$

Dann heißt $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ mit

$$a_{ij} \;=\; \pi(\sigma_1^i, \sigma_2^j) \;=\; \pi_1(\sigma_1^i, \sigma_2^j) \;=\; -\,\pi_2(\sigma_1^i, \sigma_2^j)$$

die ***Spielmatrix***. Üblicherweise heißt Spieler 1 der ***Zeilenspieler*** und Spieler 2 der ***Spaltenspieler***.

Beispiel 2.2.2

Die Spielmatrix für das Matching Pennies Spiel aus Beispiel 1.2.1 ist

$$A \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und für das Integer Game aus Beispiel 1.3.5 ist

$$A \;=\; \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Definition eines Gleichgewichtes finden wir ein Gleichgewicht

$$(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \; = \; (\sigma_1^i, \sigma_2^j)$$

in der Spielmatrix A genau dann, wenn a_{ij} sowohl größter Eintrag in der Spalte j als auch kleinster Eintrag in der Zeile i ist:

Definition 2.2.3

Sei Γ ein Zwei Personen Nullsummenspiel mit Spielmatrix $A = (a_{ij})$.

Ein Element a_{ij} heißt ***Sattelpunkt***, wenn

$$a_{ij} \; = \max_{l=1,\ldots,m} a_{lj} \qquad \text{und} \qquad a_{ij} \; = \min_{k=1,\ldots,n} a_{ik}$$

gilt.

Beispiel 2.2.4

Die Spielmatrix

$$A \; = \; \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat einen Sattelpunkt bei a_{22} und

$$A \; = \; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

hat gar keinen Sattelpunkt.

Lemma 2.2.5

Sei Γ ein Zwei Personen Nullsummenspiel mit Spielmatrix $A = (a_{ij})$.

Dann ist das Strategietupel (σ_1^i, σ_2^j) genau dann ein Gleichgewicht, wenn a_{ij} ein Sattelpunkt ist.

Beweis

Für alle $p \neq i$ gilt

$$\pi_1(\sigma_1^p, \sigma_2^j) \; = \; a_{pj} \; \leq \max_{l=1,\ldots,m} a_{lj} \; = \; a_{ij} \; = \; \pi_1(\sigma_1^i, \sigma_2^j).$$

Analog gilt für alle $q \neq j$

$$\begin{aligned}\pi_2(\sigma_1^i, \sigma_2^q) &= -\pi_1(\sigma_1^i, \sigma_2^q) = -a_{iq} \\ &= -\min_{k=1,\dots,n} a_{ik} = -a_{ij} = -\pi_1(\sigma_1^i, \sigma_2^j) = \pi_2(\sigma_1^i, \sigma_2^j),\end{aligned}$$

somit ist (σ_1^i, σ_2^j) ein Gleichgewicht, wenn a_{ij} ein Sattelpunkt ist. □

2.3 Gemischte Strategien

Unter der Annahme, dass Spieler 2 die Spalte j wählt, sucht Spieler 1 die Zeile i, die die Auszahlung a_{ij} maximiert. Andersherum sucht Spieler 2 die Spalte j, so dass die Auszahlung $-a_{ij}$ maximiert wird, wenn angenommen wird, dass Spieler 1 die Zeile i wählt. Ist a_{ij} ein Sattelpunkt, so ist die Situation stabil.

Ist kein Sattelpunkt vorhanden, werden sich die Spieler nicht auf nur eine Strategie festlegen. Spieler 1 nimmt an, dass der Zug von Spieler 2 nicht vorhersehbar ist, dass Spieler 2 aber weiß welchen Zug Spieler 1 macht. Somit kann sich Spieler 1 seinen Mindestgewinn berechnen. Spieler 2 kann sich analog seinen maximalen Verlust überlegen.

Diese Situation wird nun formalisiert:

Definition 2.3.1

Sei Γ ein Zwei Personen Nullsummenspiel mit Spielmatrix $A = (a_{ij})$.

Dann ist

$$v_I' := \max_{i=1,\dots,m} \min_{j=1,\dots,n} a_{ij}$$

der ***untere Wert*** von Γ und

$$v_{II}' := \min_{j=1,\dots,n} \max_{i=1,\dots,m} a_{ij}$$

der ***obere Wert*** von Γ.

v_I' ist das Maximum über den Minima jeder Zeile und beschreibt den maximalen Gewinn von Spieler 1. v_{II}' ist das Minimum über den Maxima jeder Spalte und beschreibt den maximalen Verlust von Spieler 2.

Egal wie Spieler 2 sich verhält, Spieler 1 kann dafür sorgen, dass seine Auszahlung nicht unter v_I' fällt. Analog kann Spieler 2 dafür sorgen, dass er nie mehr als v_{II}' verliert.

Beispiel 2.3.2

Für die Spielmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

gilt

$$v'_I = \max\{1,2\} = 2 \qquad \text{und} \qquad v'_{II} = \min\{3,4\} = 3.$$

Lemma 2.3.3

Es gilt $v'_I \leq v'_{II}$.

Beweis

Sei a_{pq} ein Element der Spielmatrix A, dass v'_I bestimmt, also $v'_I = a_{pq}$. Dann gilt nach Definition $a_{pq} \leq a_{pj}$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Sei weiter a_{st} ein Element der Spielmatrix A, dass v'_{II} bestimmt, also $v'_{II} = a_{st}$. Dann gilt nach Definition $a_{st} \geq a_{it}$ für alle $i = 1, \ldots, m$.

Zusammen folgt

$$v'_I = a_{pq} \leq a_{pt} \leq a_{st} = v'_{II},$$

wie behauptet. □

Folgerung 2.3.4

Existiert kein Gleichgewicht in einem Zwei Personen Nullsummenspiel, so gilt $v'_{II} - v'_I > 0$.

In einem Spiel ohne Gleichgewichte könnte Spieler 1 mehr als v'_I gewinnen, nämlich bis zu v'_{II}. Er möchte zudem in seiner Strategiewahl nicht durchschaubar sein, dazu werden Strategien gemischt.

Definition 2.3.5

Wir nennen ein $x \in \mathbb{R}^n$ einen ***stochastischen Vektor***, wenn $x_k \geq 0$ für $k = 1, \ldots, n$ und

$$x_1 + \ldots + x_k = 1$$

gilt.

Definition 2.3.6

Für Spieler 1 wird eine ***gemischte Strategie*** gegeben durch einen stochastischen Vektor $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Dabei ist x_i die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Spieler 1 die Strategie σ_1^i wählt. Mit X bezeichnen wir die Menge der gemischten Strategien von Spieler 1.

Für Spieler 2 wird eine ***gemischte Strategie*** gegeben durch einen stochastischen Vektor $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Dabei ist y_j die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Spieler 2 die Strategie σ_2^j wählt. Mit Y bezeichnen wir die Menge der gemischten Strategien von Spieler 2.

Das durch X und Y bestimmte Spiel heißt die ***gemischte Erweiterung*** von Γ.

Lemma 2.3.7

Sei Γ ein Zwei Personen Nullsummenspiel mit Spielmatrix $A = (a_{ij})$ und gemischten Strategien $x \in X$ sowie $y \in Y$. Dabei seien x und y so gewählt, dass x_i sowie x_j für alle $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ stochastisch unabhängig sind.

Dann ist die ***erwartete Auszahlung*** des Spiels gegeben durch

$$A(x, y) \ := \ x^T A y \ = \ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j .$$

Beispiel 2.3.8

Für die Spielmatrix

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und die gemischten Strategien

$$x \ = \ (1/2, 1/2) \qquad \text{sowie} \qquad y \ = \ (1/4, 3/4)$$

erhalten wir die erwartete Auszahlung

$$(1/2 \ \ 1/2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot (1/4, 3/4) \ = \ 5/2.$$

Aus Sicht von Spieler 1 wählt dieser eine gemischt Strategie $x \in X$. Das schlimmste, was ihm damit passieren kann, ist die Auszahlung

$$v(x) \ = \ \min_{y \in Y} x^T A y.$$

Dieses Minimum ist für ein festes x eine *reine* Strategie. Dies folgt aus dem Hauptsatz der linearen Optimierung: Wir betrachten den Kostenvektor $c = x^T A$ und die Menge y stellt ein Polyeder dar. Die optimale Lösung dieses linearen Programms befindet sich dann an einer Ecke von Y, also an einer reinen Strategie.

Definition 2.3.9

Sei $A_{\cdot j}$ die j-te Spalte einer Spielmatrix A zum Zwei Personen Nullsummenspiel Γ.

Der ***erwartete untere Wert*** von Γ, wenn Spieler 1 die gemischte Strategie $x \in X$ wählt, ist

$$v(x) \;=\; \min_{j=1,\ldots,n} x^T A_{\cdot j}.$$

Spieler 1 wird x so wählen, dass $v(x)$ maximiert wird. Der Wert des Spiels Γ für Spieler 1 wird damit gegeben durch

$$v_I \;=\; \max_{x\in X} v(x) \;=\; \max_{x\in X} \min_{j=1,\ldots,n} x^T A_{\cdot j}.$$

Die Strategie x, für die wir den Wert v_I erhalten, heißt ***Maximin Strategie***.

Sei $A_{i\cdot}$ die i-te Zeiler einer Spielmatrix A zum Zwei Personen Nullsummenspiel Γ.

Der ***erwartete obere Wert*** von Γ, wenn Spieler 2 die gemischte Strategie $y \in Y$ wählt, ist

$$v(y) \;=\; \max_{i=1,\ldots,m} A_{i\cdot}^T y.$$

Spieler 2 wird y so wählen, dass $v(y)$ minimiert wird. Der Wert des Spiels Γ für Spieler 2 wird damit gegeben durch

$$v_{II} \;=\; \min_{y\in Y} v(y) \;=\; \min_{y\in Y} \max_{i=1,\ldots,m} A_{i\cdot}^T y.$$

Die Strategie y, für die wir den Wert v_{II} erhalten, heißt ***Minimax Strategie***.

Proposition 2.3.10

Gegeben seien $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$ sowie eine Funktion

$$F : X \times Y \to \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\min_{x\in X} \max_{y\in Y} F(x,y) \;\leq\; \max_{y\in Y} \min_{x\in X} F(x,y).$$

Lemma 2.3.11

Sei Γ ein Zwei Personen Nullsummenspiel. Dann gilt

$$v_I \;\leq\; v_{II}.$$

Dies folgt direkt aus der vorherigen Proposition sowie den Definitionen von v_I und v_{II}.

Im Gegensatz zu den reinen Strategien können wir für gemischte Strategien sogar die Gleichheit von v_I und v_{II} zeigen. Dies ist auch die zentrale Aussage dieses Abschnitts:

Satz 2.3.12 (Minimax Satz)

Für ein Zwei Personen Nullsummenspiel gilt

$$v_I \;=\; v_{II}.$$

Für gemischte Strategien sind also unterer und oberer Wert gleich.

Neben einem etwas länglichen ursprünglichen Beweis lässt sich der Minimax Satz auch mit Hilfe der linearen Optimierung beweisen. Dies zeigen wir in Abschnitt 2.5 ab Seite 30.

Definition 2.3.13

Sei Γ ein Zwei Personen Nullsummenspiel mit Spielmatrix $A = (a_{ij})$ und sei weiter $\mathbf{1}^k = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^k$.

Dann nennen wir

$$v \;:=\; v_I \;=\; v_{II}$$

den ***Wert*** von Γ.

Weiter nennen wir die gemischte Strategie x ***optimal*** für Spieler 1, wenn

$$x^T A \;\geq\; v\mathbf{1}_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \;\geq\; v \quad \text{für} \;\; j = 1, \ldots, m$$

gilt. Analog ist eine gemischte Strategie y optimal für Spieler 2, wenn

$$Ay \;\leq\; v\mathbf{1}_m \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \;\leq\; v \quad \text{für} \;\; i = 1, \ldots, n$$

gilt. Sind x und y zwei optimale Strategien, dann heißt (x, y) eine ***Lösung*** des Spiels Γ.

Eine gemischte Strategie x ist also dann optimal für Spieler 1, wenn es gegen jede reine Strategie von Spieler 2 eine Auszahlung größer oder gleich v liefert.

Sind x und y jeweils optimale Strategien von Spieler 1 und Spieler 2, dann gilt

$$\begin{aligned} x^T(Ay) \;&\leq\; x^T v\mathbf{1}_m \;=\; vx^T\mathbf{1}_m \;=\; v\cdot\sum_{i=1}^{m} x_i \;=\; v, \\ (x^TA)y \;&\geq\; v\mathbf{1}_n^T y \;=\; vy^T\mathbf{1}_n \;=\; v\cdot\sum_{j=1}^{n} y_i \;=\; v. \end{aligned}$$

Daher stammt der Begriff der Lösung.

2.4 Berechnung optimaler Strategien

Das rationale Ziel in einem Zwei Personen Nullsummenspiel ist die Berechnung der Lösung des Spiels bzw. die Berechnung der optimalen Strategien x und y. Dazu gibt es in einigen Spezialfällen effektive Methoden.

Methode 1 (Spiele mit Sattelpunkt)

Sei a_{ij} ein Sattelpunkt in einem Zwei Personen Nullsummenspiel mit Spielmatrix $A = (a_{ij})$. Setze

$$x \;=\; e_i \qquad \text{und} \qquad y \;=\; e_j.$$

Dann folgt, dass (x, y) ein Gleichgewicht ist. Somit ist (x, y) eine Lösung und $v = a_{ij}$ der Wert des Spiels.

Methode 2 (Spiele mit Dominanz)

Diese Methode dient zum Streichen *unnötiger* Zeilen und Spalten.

Definition

Sei Γ ein Zwei Personen Nullsummenspiel mit Spielmatrix $A = (a_{ij})$.

Wir sagen die Zeile i ***dominiert*** die Zeile k, wenn

$$a_{ij} \geq a_{kj} \qquad \text{für} \qquad j = 1, \ldots, n$$

gilt mit echtem größer in mindestens einer Variablen. Die Spalte j ***dominiert*** die Spalte l, wenn

$$a_{ij} \leq a_{il} \qquad \text{für} \qquad i = 1, \ldots, m$$

gilt mit echtem kleiner in mindestens einer Variablen.

Lemma

Dominierte Zeilen bzw. Spalten können aus der Spielmatrix gelöscht werden, ohne den Wert des Spiels zu verändern.

Weiter ist ein Gleichgewicht im reduzierten Spiel auch ein Gleichgewicht im Originalspiel.

Die Umkehrung der zweiten Aussage stimmt leider nicht, hier lassen sich Gegenbeispiele finden.

Beispiel

Gegeben sei das Originalspiel Γ mit der Spielmatrix

$$A^0 = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hier dominiert zum Beispiel Spalte 2 die Spalte 4, wir können also Spalte 4 löschen und erhalten

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nun dominiert Zeile 3 die Zeile 1 (dies war vorher noch nicht der Fall). Wir erhalten

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nun dominiert noch Spalte 2 die Spalte 3:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben das Spiel also auf eine 2×2-Spielmatrix reduzieren können. Die Reihenfolge, in der wir bei der Löschung der Zeilen bzw. Spalte vorgegangen sind, spielte dabei keine Rolle.

Methode 3 (Spiele mit 2×2-Spielmatrizen)

Sei Γ ein Zwei Personen Nullsummenspiel mit 2×2-Spielmatrix $A = (a_{ij})$. Wir setzen voraus, dass A regulär ist. Für singuläre A können nach Methode 2 eine dominierende Zeile oder Spalte finden und erhalten dann einen Sattelpunkt.

Hat umgekehrt die Spielmatrix A keinen Sattelpunkt, so folgt, dass die optimalen Strategien $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ nur echt positive Einträge haben. Das Spiel kann dann mit folgendem geschlossenen Ausdruck berechnet werden:

Satz

Sei A eine reguläre 2×2-Spielmatrix. Die optimalen Strategien sowie der Wert v des Spiels werden dann gegeben durch

$$x \;=\; \frac{\mathbf{1}^T A^{-1}}{\mathbf{1}^T A^{-1} \mathbf{1}}, \qquad y \;=\; \frac{A^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T A^{-1} \mathbf{1}} \qquad \text{und} \qquad v \;=\; \frac{1}{\mathbf{1}^T A^{-1} \mathbf{1}}.$$

Dabei ist $\mathbf{1} = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

Dieser Satz ergibt sich aus der folgenden Rechnung: Für eine Lösung (x, y) gilt

$$a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 \;=\; v.$$

Umgeformt erhalten wir

$$y_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_2) \;+\; y_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2) \;=\; v.$$

Da x optimal ist, folgt

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \;\geq\; v \qquad \text{und} \qquad a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \;\geq\; v.$$

Mit $y_1 + y_2 = 1$ und $y_1, y_2 > 0$ ergibt sich

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \;=\; v \qquad \text{und} \qquad a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \;=\; v.$$

Die bedeutet gerade $x^T A = v\mathbf{1}^T$, also $x^T = v\mathbf{1}^T A^{-1}$. Weiter folgt

$$v\mathbf{1}^T A^{-1}\mathbf{1} \;=\; x^T\mathbf{1} \;=\; x_1 + x_2 \;=\; 1,$$

somit folgt direkt

$$v \;=\; \frac{1}{\mathbf{1}^T A^{-1}\mathbf{1}}.$$

Die optimalen Strategien x und y sind nun leicht zu folgern.

Methode 4 (Spiele mit $2 \times n$- bzw. $m \times 2$-Spielmatrizen)

Wir betrachten hier nur Spiele mit einer $2 \times n$-Spielmatrix. Die Fälle zu einer $m \times 2$-Spielmatrix können analog behandelt werden.

Sei Γ ein Zwei Personen Nullsummenspiel mit einer $2 \times n$-Spielmatrix $A = (a_{ij})$. Das Problem $\max_{x \in X} v(x)$ von Spieler 1 kann dann umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \max_{x \in X} v(x) &= \max_{x \in X} \min_{j=1,\ldots,n} x^T A_{\cdot j} \\ &= \max_{x \in X} \min_{j=1,\ldots,n} \{a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2\} \\ &= \max_{0 \le x_2 \le 1} \min_{j=1,\ldots,n} \{(a_{2j} - a_{1j})x_2 + a_{1j}\}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $x_1 + x_2 = 1$ gilt. Somit ist $v(x)$ das Minimum von n linearen Funktion der Variable x_2.

Beispiel

Wir betrachten das Spiel zur Spielmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 8 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die stückweise lineare Funktion $v(x)$ wurde in Abbildung 2.1 skizziert. Die optimale Strategie für Spieler 1 ist damit $x_2 = 2/7$ und $x_1 = 5/7$. Weiter erhalten wir sofort $v = 17/7$.

Das Maximum von $v(x)$ kann bei dieser Methode mit Mitteln der Optimierung bestimmt werden.

Zur Berechnung einer optimalen Strategie für Spieler 2 betrachten wir nur die *aktiven* Strategien von Spieler 1, also die Strategien, durch die x bzw. x_2 bestimmt wurde. Wir bilden dazu die Submatrix $\tilde{A}$ von A, welche nur die beiden aktiven Spalten enthält und wenden die Methode 3 zu Spielen mit 2×2-Spielmatrizen an.

Beispiel

Um das vorherige Beispiel fortzusetzen erhalten wir

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \tilde{A}^{-1} = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\tilde{y} = \frac{(6/17,\, 2/17)}{17/7} = (5/7,\, 2/7),$$

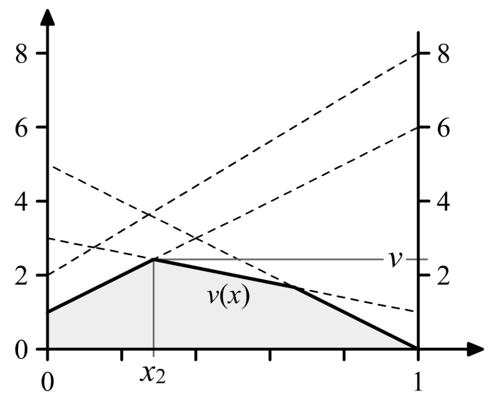


Abbildung 2.1: Die Funktion $v(x)$ zum Beispiel einer 2×4-Matrix.

also $y = (0,\, 5/7,\, 2/7,\, 0)$.

Gibt es mehr als zwei aktive Strategien, so können zwei Strategien gewählt werden und wir erhalten eine optimale Lösung. Für zwei andere aktive Strategien würden wir eine weitere optimale Lösung erhalten.

Außerdem können Spalten durch konvexe Linearkombinationen von den anderen aktiven Zeilen dominiert werden. Dadurch können wir immer auf zwei aktive Strategien reduzieren.

Methode 5 (Spiele mit symmetrischen Spielmatrizen)

Definition

Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt ***schiefsymmetrisch***, wenn

$$a_{ij} \;=\; -\,a_{ji} \qquad \text{für} \quad 1 \leq i, i \leq n$$

gilt. Daraus folgt sofort $a_{ii} = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ sowie

$$A \;=\; -\,A^T.$$

Ein Zwei Personen Nullsummenspiel heißt ***symmetrisch***, wenn die zugehörige Spielmatrix A schiefsymmetrisch ist.

Beispiel (Stein-Schere-Papier)

Die Spielmatrix zum bekannten Stein-Schere-Papier-Spiel lautet

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Stein} & \text{Schere} & \text{Papier} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Stein} \\ \text{Schere} \\ \text{Papier} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} =: A.$$

Damit ist A schiefsymmetrisch.

Der folgende Satz rechtfertigt, dass auch derartige Spiele recht einfach gelöst werden können:

Satz

Für jedes symmetrische Spiel gilt

$$v = 0.$$

Weiter ist x genau dann eine optimale Strategie für Spieler 1, wenn x eine optimale Strategie für Spieler 2 ist.

2.5 Zwei Personen Nullsummenspiele und lineare Optimierung

Zum Ende dieses Kapitel wollen wir noch zeigen, dass jedes Zwei Personen Nullsummenspiele mit Mitteln der linearen Optimierung gelöst werden kann.

Sei $y \in Y$ gegeben. Dann hatten wir für Spieler 2

$$v(y) = \max_{i=1,\dots,m} A_{i\cdot} y.$$

Damit folgt

$$v_{II} = \min_{y \in Y} v(y) = \min_{y \in Y} \max_{i=1,\dots,m} A_{i\cdot} y.$$

Wir bezeichnen nun

$$z := \max_{i=1,\dots,m} A_{i\cdot} y$$

und schreiben damit das folgende lineare Programm $(LP1)$ auf:

$$\begin{array}{rcll} \min z & & \text{unter den Nebenbedingungen} & \\ A_{i\cdot} \cdot y & \leq & z \qquad \text{für alle} & i = 1, \dots, m \\ y_1 + \dots + y_n & = & 1 & \\ y_j & \geq & 0 \qquad \text{für alle} & j = 1, \dots, n \\ z & \lesseqgtr & 0. & \end{array}$$

Diese Problem formen wir um zu $(LP2)$:

$$\begin{array}{rcll} \min z & & \text{unter den Nebenbedingungen} & \\ -A \cdot y + z \cdot \mathbf{1}_m & \geq & 0_m & \\ y_1 + \dots + y_n & = & 1 & \\ y_j & \geq & 0 \qquad \text{für alle} & j = 1, \dots, n \\ z & \lesseqgtr & 0. & \end{array}$$

v_{II} kann also als Zielfunktionswert der optimalen Lösung von $(LP2)$ bzw. $(LP1)$ angesehen werden.

Nun betrachten wir das zu $(LP2)$ duale Problem $(LD2)$:

$$\begin{array}{rcll} \max s & & \text{unter den Nebenbedingungen} & \\ -A^T \cdot x + s \cdot \mathbf{1}_m & \leq & 0_n & \\ x_1 + \dots + x_m & = & 1 & \\ x_i & \geq & 0 \qquad \text{für alle} & i = 1, \dots, m \\ s & \lesseqgtr & 0. & \end{array}$$

Auch diese Problem können wir zu $(LD1)$ umformen:

$$\begin{array}{rcll} \max s & & \text{unter den Nebenbedingungen} & \\ x^T \cdot A_{\cdot j} & \geq & s \qquad \text{für alle} & j = 1, \dots, n \\ x_1 + \dots + x_m & = & 1 & \\ x_i & \geq & 0 \qquad \text{für alle} & i = 1, \dots, m \\ s & \lesseqgtr & 0. & \end{array}$$

Anders gesehen ergibt sich

$$\max_{x \in X} s \;=\; \max_{x \in X} \min_{j=1,\dots,m} x^T A_{\cdot j} \;=\; v_I.$$

v_I ist damit der Zielfunktionswert der optimalen Lösung von $(LD1)$ bzw. $(LD2)$.

Aus der schwachen Dualität folgt damit

$$v_I \;\leq\; v_{II}$$

und aus der starken Dualität

$$v_I = v_{II}.$$

Ein Beispiel zu diesem Abschnitt ist Aufgabe 2.6.11 zu entnehmen.

2.6 Aufgaben

Aufgabe 2.6.1

In der Kaffeeküche einer Firma stellt ein Händler Kuchen zur Verfügung. Zur Bezahlung richtet er eine *Kasse des Vertrauens* ein. Jeder Mitarbeiter, der sich einen Kuchen nimmt, ist aufgefordert, einen festgelegten Betrag zu bezahlen, wobei niemand die Bezahlung kontrolliert. Am Ende des Tages entleert der Händler die Kasse. Der Händler kalkuliert bereits die Unehrlichkeit der Mitarbeiter in den Preis ein. Nach seiner Kalkulation macht er Gewinn, wenn mindestens die Hälfte der verbrauchten Kuchen bezahlt wurde. In diesem Fall wird er am nächsten Tag wieder Kuchen anbieten, andernfalls wird er das Geschäft einstellen.

Wir nehmen an, dass jeder Mitarbeiter genau einen Kuchen nimmt und den Betrag entweder vollständig oder gar nicht bezahlt. Ein *ehrlicher* Mitarbeiter ist verärgert, wenn das Kuchengeschäft eingestellt wird, es ist ihm gleichgültig, wenn das Geschäft fortgesetzt wird. Ein *unehrlicher* Mitarbeiter ist erfreut, wenn das Geschäft weitergeführt wird, es ist ihm gleichgültig, sollte das Geschäft eingestellt werden.

Wir nehmen an, die Firma besteht aus drei Mitarbeitern. Modelliere das Spiel und bestimme die Normalform. Untersuche das Spiel auf Gleichgewichte.

Lösung

Die Situation kann durch ein Spiel in extensiver Form modelliert werden, siehe Abbildung 2.2.

Dabei wählen alle drei Spieler ihre Strategie geheim. Ist ein Spieler durch die Fortsetzung des Kuchengeschäftes erfreut, entspricht dies der Auszahlung 1. Ist ein Spieler verärgert, so entspricht dies einer Auszahlung von -1. Bei Gleichgültigkeit über das Kuchengeschäft erhält der entsprechende Spieler eine Auszahlung von 0.

Die Normalform des Spiels ist eine $2 \times 2 \times 2$-*Matrix* bzw. Tensor. Wie üblich

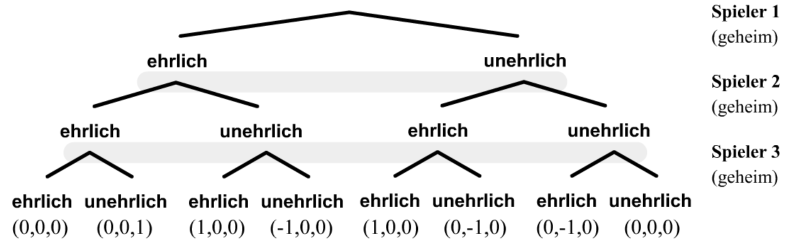


Abbildung 2.2: Spielbaum zum *Vertrauensspiel.*

ist Spieler 1 der Zeilen- und Spieler 2 der Spaltenspieler:

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \text{\scriptsize Spieler 2} & \text{\scriptsize Spieler 2} \\ \text{ehrlich} & \text{unehrlich} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{\scriptsize Spieler 1}\ \text{ehrlich} \\ \text{\scriptsize Spieler 1}\ \text{unehrlich} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0,0) & (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0}) \\ (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}) & (0,0,-1) \end{pmatrix}_{\substack{\text{Spieler 3} \\ \text{ehrlich}}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \text{\scriptsize Spieler 2} & \text{\scriptsize Spieler 2} \\ \text{ehrlich} & \text{unehrlich} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{\scriptsize Spieler 1}\ \text{ehrlich} \\ \text{\scriptsize Spieler 1}\ \text{unehrlich} \end{array} & \begin{pmatrix} (\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1}) & (-1,0,0) \\ (0,-1,0) & (\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}) \end{pmatrix}_{\substack{\text{Spieler 3} \\ \text{unehrlich}}} \end{array}$$

In diesem Spiel gibt es vier Gleichgewichte: Wenn genau zwei Mitarbeiter ehrlich sind oder wenn alle drei Spieler den Kuchen klauen, dann liegen Gleichgewichte vor. Dies entspricht den bereits in der Normalform hervorgehobenen Einträgen.

Aufgabe 2.6.2

Bestimme alle Sattelpunkte des Zwei Personen Nullsummenspiel, das durch die folgende Spielmatrix beschrieben wird:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Ein Matrixeintrag a_{ij} ist ein Sattelpunkt, wenn a_{ij} sowohl größter Eintrag in der Spalte j als auch kleinster Eintrag in der Zeile i ist.

Somit ist nur a_{53} ein Sattelpunkt.

Ein Programm zur Bestimmung von Sattelpunkten ist im Anhang unter 5.1 ab Seite 73 zu finden.

Aufgabe 2.6.3

Betrachte das Nim-Spiel aus Beispiel 1.1.3 mit $n = 4$ Hölzern und zwei Spielern. Jeder Spieler nimmt abwechselnd ein oder zwei Hölzer weg. Wer das letzte Holz wegnimmt gewinnt.

Gib die Spielmatrix zu diesem Zwei Personen Nullsummenspiel an.

Lösung

Zunächst ist der Spielbaum in Abbildung 2.3 veranschaulicht.

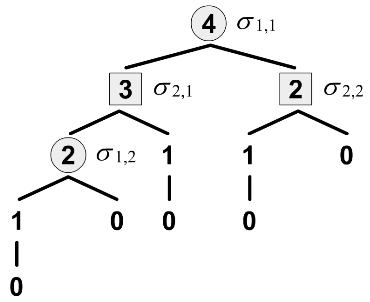


Abbildung 2.3: Spielbaum zum Nim-Spiel.

Es gibt nur zwei Knoten, an denen sich Spieler 1 entscheiden muss (graue Kreise) und auch nur zwei Knoten, an denen sich Spieler 2 entscheiden muss (graue Vierecke). Mit

$$\sigma_1 \;=\; (\sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}) \;=\; (1, 2)$$

bezeichnen wir dabei zum Beispiel die Strategie von Spieler 1 beim ersten Knoten $\sigma_{1,1} = 1$ Hölzchen zu nehmen und bei seiner zweiten Entscheidung $\sigma_{1,2} = 2$ Hölzchen zu entfernen.

Damit erhalten wir die folgende Spielmatrix:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{array} \\
\begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}.$$

Wählt Spieler 1 die Strategie $(1,2)$, so wird er sicher gewinnen.

Trotzdem hat die gegebene Spielmatrix einen Sattelpunkt und damit gibt es ein Gleichgewicht, wie es aufgrund der perfekten Information nach Satz 1.3.13 ja auch sein muss.

Aufgabe 2.6.4

Zwei Spieler wählen gleichzeitig eine natürliche Zahl. Stimmen die gewählten Zahlen überein, so erhält kein Spieler etwas vom anderen. Hat ein Spieler eine um 1 größere Zahl gewählt als sein Mitspieler, so erhält er von jenem zwei Geldeinheiten, ansonst erhält der Spieler, der die niedrigere Zahl gewählt hat, eine Geldeinheit von seinem Gegner.

Gib die Spielmatrix des Spiels an und untersuche Sattelpunkte bzw. den unteren und oberen Wert v'_I und v'_{II} des Spiels.

Lösung

Die Spielmatrix des beschriebenen Zwei Personen Nullsummenspiels ist die nicht endliche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

v'_I ist das Maximum über den Minima jeder Zeile und v'_{II} ist das Minimum über den Maxima jeder Spalte. Da jede Zeile eine -2 und jede Spalte eine 2 enthält, folgt

$$v'_I = \max\{-2\} = -2 \qquad \text{und} \qquad v'_{II} = \min\{2\} = 2.$$

Gleichgewichte gibt es also nicht.

Aufgabe 2.6.5

Betrachte ein Zwei Personen Nullsummenspiel mit der Spielmatrix $A = (a_{ij})$. Weiter seien $e_i \in \mathbb{R}^m$ und $e_j \in \mathbb{R}^n$ die Einheitsvektoren.

Zeige, dass der Matrixeintrag a_{ij} genau dann ein Sattelpunkt ist, wenn der Strategievektor σ zu den gemischten Erweiterungen e_i sowie e_j ein Gleichgewicht in der gemischten Erweiterung des Spiels ist.

Lösung

Sei zunächst σ ein Gleichgewicht in der gemischten Erweiterung des Spiels zu den gemischten Erweiterungen e_i und e_j. Da diese gemischten Erweiterungen die Einheitsvektoren sind, wählt Spieler 1 immer die Strategie σ_1^i und Spieler 2 immer die Strategie σ_2^j. Danach ist $\sigma = (\sigma_1^i, \sigma_2^j)$ ein Gleichgewicht und nach Lemma 2.2.5 muss a_{ij} ein Sattelpunkt sein.

Nun sei a_{ij} ein Sattelpunkt, es gilt also

$$a_{ij} \;=\; \max_{l=1,\dots,m} a_{lj} \;=\; \min_{k=1,\dots,n} a_{ik}.$$

Sei weiter (x, y) ein beliebiger Strategievektor. Dann gilt

$$x^T Ae_j \;=\; \sum_{l=1}^{m} x_l a_{lj} \;\leq\; \sum_{l=1}^{m} x_l a_{ij} \;\leq\; e_i^T Ae_j,$$

da x ein stochastischer Vektor ist. Analogt folgt

$$e_i^T Ay \;\geq\; e_i^T Ae_j,$$

beide Spieler können sich demnach nicht verbessern, es liegt also ein Gleichgewicht vor.

Aufgabe 2.6.6

Reduziere die Anzahl der Spalten und Zeilen in der Spielmatrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

durch Nutzen der vorhandenen Dominanz.

Lösung

Wir setzen $A^0 = A$. In dieser Situation dominiert Zeile 5 die Zeile 6 sowie Zeile 2 die Zeile 1. Wir erhalten

$$A^1 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun dominiert Spalte 6 die Spalte 5 sowie Spalte 1 die Spalte 2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In der reduzierten Spielmatrix A^2 ist keine weitere Dominanz zu erkennen.

Je nachdem in welcher Reihenfolge wir die Zeilen bzw. Spalten löschen: Es bleiben entweder zwei Zeilen mit identischen Einträgen übrig oder wir erhalten eine 3×3-Matrix. Im vorgeführten Beispiel haben wir zwar die einfachste, jedoch nicht die günstigste Reihenfolge gewählt.

Aufgabe 2.6.7

Bereche für die folgenden Spiele jeweils die optimalen Strategien und den Wert des Spiels:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Für dies Aufgabe können wir Abschnitt 2.4 heranziehen.

Die Matrix A ist singulär, wir finden also einen Sattelpunkt. Dies ist $a_{21} = 2$ und somit sind die optimalen (gemischten) Strategien $x_A = (0, 1)$ sowie $y_A = (1, 0)$ und der Wert das Spiels ist $v_A = 2$.

Die Matrix B ist zwar regulär, trotzdem finden wir einen Sattelpunkt. Dies ist $b_{21} = 3$ und somit sind die optimalen Strategien $x_B = (0, 1)$ sowie $y_B = (1, 0)$ und der Wert das Spiels ist $v_B = 3$.

Die Matrix C ist regulär und besitzt keinen Sattelpunkt. Nach

$$x_C = \frac{\mathbf{1}^T C^{-1}}{\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}}, \quad y_C = \frac{C^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}} \quad \text{und} \quad v_C = \frac{1}{\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}}$$

erhalten wir mit

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -4/26 & 5/26 \\ 5/26 & -3/26 \end{pmatrix}$$

für das Spiel zur Spielmatrix C

$$x_C = (1/3,\, 2/3), \quad y_C = (1/3,\, 2/3) \quad \text{und} \quad v_C = 26/3.$$

Aufgabe 2.6.8

Eine Firma F produziert ein Gerät, dessen Lebensdauer von einem Transistor abhängt. Wird das Gerät innerhalb der Garantiezeit defekt, muss es auf Kosten der Firma repariert werden. Die Reparaturkosten betragen 36 Geldeinheiten.

Der Lieferant der Transistoren bietet drei Typen an:

(1) Der erste Typ kostet 4 Geldeinheiten pro Stück und der Lieferant übernimmt keine Garantie.

(2) Der zweite Typ kostet 24 Geldeinheiten pro Stück und der Lieferant übernimmt die vollen Reparaturkosten im Falle eines Defekts.

(3) Der dritte Typ kostet 40 Geldeinheiten pro Stück und der Lieferant übernimmt die vollen Reparaturkosten im Falle eines Defekts und zahlt zudem 40 Geldeinheiten Entschädigung an die Firma F.

Beschreibe die Situation als Zwei Personen Nullsummenspiel: Spieler 1 ist die Firma F und Spieler 2 die Natur, die über einen Defekt innerhalb der Garantiezeit entscheidet. Dabei soll die Natur nicht als Zufallsspieler aufgefasst werden.

Bestimme die optimalen Strategien sowie den Wert des Spiels mittels der Methode für 2×2-Matrizen. Reduziere dazu zunächst die Spielmatrix. Dabei kann ausgenutzt werden, dass eine Spalte bzw. Zeile auch durch eine konvexe Linearkombination zweier oder mehrerer Zeilen bzw. Spalten dominiert werden kann.

Lösung

Spieler 1 (die Firma F) hat folgenden drei Strategien: Sie kauft die Transistoren vom Typ 1, 2 und 3. Die Natur hat zwei Strategien: Der jeweilige Transistor bleibt heile oder er geht innerhalb der Garantiezeit kaputt. Da Spieler 1 die Anschaffungskosten sowie je nach Typ die Reparaturkosten tragen muss, erhalten wir die folgende Spielmatrix:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{heile} & \text{kaputt} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Typ 1} \\ \text{Typ 2} \\ \text{Typ 3} \end{array} & \begin{pmatrix} -4 & -40 \\ -24 & -24 \\ -40 & 0 \end{pmatrix} \end{array} =: A.$$

Wir bezeichnen mit $A_{i\cdot}$ die i-te Zeile der Matrix A. Dann gilt

$$\frac{1}{2}A_{1\cdot} + \frac{1}{2}A_{3\cdot} = (-22, -20).$$

Dies zeigt, dass diese Linearkombination die zweite Zeile $A_{2\cdot}$ dominiert. Wir erhalten damit

$$A^1 = \begin{pmatrix} -4 & -40 \\ -40 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist regulär und besitzt keinen Sattelpunkt. Nach

$$x = \frac{\mathbf{1}^T A^{-1}}{\mathbf{1}^T A^{-1}\mathbf{1}}, \qquad y = \frac{A^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T A^{-1}\mathbf{1}} \qquad \text{und} \qquad v = \frac{1}{\mathbf{1}^T A^{-1}\mathbf{1}}$$

erhalten wir mit

$$\left(A^1\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/40 \\ -1/40 & 1/400 \end{pmatrix}$$

die folgenden optimalen Strategien x und y sowie den folgenden Wert v des Spiels:

$$x = \left(\frac{10}{19}, 0, \frac{9}{19}\right), \qquad y = \left(\frac{10}{19}, \frac{9}{19}\right) \qquad \text{und} \qquad v = -\frac{400}{19}.$$

Aufgabe 2.6.9

Betrachte ein Zwei Personen Nullsummenspiel. Es sei $X^* \subset X$ die Menge der optimalen gemischten Strategien für Spieler 1.

Zeige, dass X^* konvex ist. Gib weiter ein nicht triviales Beispiel an, bei dem X^* aus mehr als einem Punkt besteht.

Lösung

Nach Definition ist ein $x \in X$ optimal für ein Zwei Personen Nullsummenspiel mit der Spielmatrix A, wenn

$$x^T A \geq v\mathbf{1}_n$$

gilt, dabei ist v der Wert des Spiels.

Wir haben also zu zeigen, dass für $x, \overline{x} \in X^*$ auch

$$t \cdot x + (1-t) \cdot \overline{x} \in X^* \qquad \text{ist für alle} \qquad t \in [0,1].$$

Nun gilt direkt auf Grund der Optimalität von x und $\overline{x}$

$$\begin{aligned} \left(t \cdot x + (1-t)^T \cdot \overline{x}\right) \cdot A &= t \cdot x^T A + (1-t) \cdot \overline{x}^T A \\ &\geq t \cdot v\mathbf{1}_n + (1-t) \cdot v\mathbf{1}_n \\ &= (t + 1 - t) \cdot v\mathbf{1}_n = v\mathbf{1}_n, \end{aligned}$$

somit ist auch $t \cdot x + (1-t) \cdot \overline{x}$ optimal.

Wir betrachten das Spiel zur Spielmatrix

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Hier sind a_{11} und a_{21} zwei Sattelpunkte, der Wert des Spiels ist also $v = 2$. In dieser Situation ist jedes $x \in X$ optimal für Spieler 1, denn

$$(x_1, 1 - x_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \;=\; 2 \;\geq\; 2 \quad \text{und} \quad (x_1, 1 - x_2) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \;\geq\; 5 \;\geq\; 2.$$

Es gilt also $X^* = X$.

Aufgabe 2.6.10

Berechne zur der Spielmatrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 3 \\ 0 & 9 \\ 5 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

die optimalen Strategien beider Spieler sowie den Wert des Spiels mit der Methode 4 über $m \times 2$-Spielmatrizen.

Lösung

Die stückweise lineare Funktion $v(y)$ wurde in Abbildung 2.4 skizziert. Zur Berechnung von y_2 müssen wir damit das Gleichungssystem

$$-2y_2 + 7 \;=\; 5y_2 + 3$$

lösen. Wir erhalten $y_2 = 4/7$ und $y_1 = 3/7$, also $y = (3/7,\, 4/7)$. Weiter ergibt sich sofort $v = 41/7$.

Zur Berechnung einer optimalen gemischten Strategie für Spieler 1 betrachten wir die Submatrix

$$\tilde{A} \;=\; \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \tilde{A}^{-1} \;=\; \frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

aus den aktiven Stategien 1 und 5 von Spieler 2 und wenden Methode 3 zu Spielen mit 2×2-Spielmatrizen an. Damit folgt

$$\tilde{x} \;=\; \frac{\mathbf{1}^T A^{-1}}{\mathbf{1}^T A^{-1} \mathbf{1}} \;=\; (5/7,\, 2/7),$$

also $x = (5/7,\, 0,\, 0,\, 0,\, 2/7)$.

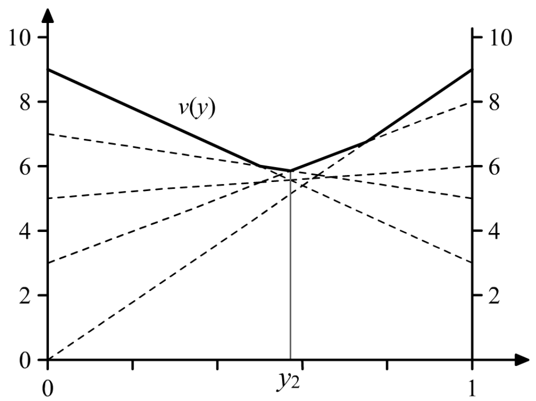


Abbildung 2.4: Die Funktion $v(y)$ zum Beispiel einer 5×2-Matrix.

Aufgabe 2.6.11

Betrachte das Zwei Personen Nullsummenspiel zur Spielmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 30 & 25 & 50 & 27 & 30 \\ 40 & 20 & 25 & 40 & 20 & 35 & 25 \\ 10 & 35 & 25 & 50 & 10 & 15 & 35 \\ 40 & 15 & 20 & 12 & 27 & 30 & 10 \\ 30 & 30 & 27 & 20 & 60 & 22 & 15 \\ 15 & 40 & 25 & 30 & 45 & 25 & 20 \end{pmatrix}.$$

Gib das lineare Optimierungsproblem von Spieler 1 ausführlich an und berechne optimale gemischte Strategien der Spieler mit Hilfe einer beliebigen Software zum Lösen von linearen Programmen.

Lösung

Wir betrachten beide Spieler gesondert und beginnen mit Spieler 2:

Spieler 2

Nach Abschnitt 2.5 haben wir das Problem

$$\begin{array}{rcll} \min z & & & \text{unter den Nebenbedingungen} \\ -A \cdot y + z \cdot \mathbf{1}_m & \geq & 0_m & \\ y_1 + \ldots + y_n & = & 1 & \\ y_j & \geq & 0 & \text{für alle} \quad j = 1, \ldots, n \\ z & \lesseqgtr & 0 & \end{array}$$

zu lösen. Mit der gegebenen Matrix A erhalten wir das folgende lineare Programm:

$$\min \quad (0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,1)^T \cdot (y_1,\,y_2,\,y_3,\,y_4,\,y_5,\,y_6,\,y_7,\,v)\,, \qquad \text{so dass}$$

$$\begin{pmatrix} -20 & -40 & -30 & -25 & -50 & -27 & -30 & 1 \\ -40 & -20 & -25 & -40 & -20 & -35 & -25 & 1 \\ -10 & -35 & -25 & -50 & -10 & -15 & -35 & 1 \\ -40 & -15 & -20 & -12 & -27 & -30 & -10 & 1 \\ -30 & -30 & -27 & -20 & -60 & -22 & -15 & 1 \\ -15 & -40 & -25 & -30 & -45 & -25 & -20 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ v \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ v \end{pmatrix} = 1$$

$$y_1,\,y_2,\,y_3,\,y_4,\,y_5,\,y_6,\,y_7,\,v \geq 0.$$

Da die Matrix A nur positive Einträge hat, wird der Wert des Spiels auch sicher größer als 0 sein, daher können wir hier $v \geq 0$ an Stelle von $v \lesseqgtr 0$ setzen.

Dieses lineare Programm können wir mit einer beliebigen Software lösen. Unter der Verwendung von *Mathematica* erhalten wir die folgende Lösung:

$$y = \left(\frac{1}{5},\,0,\,\frac{1}{5},\,0,\,0,\,0,\,\frac{3}{5}\right) \qquad \text{und} \qquad v = 28.$$

Spieler 1

Für Spieler 1 haben wir das Programm

$$\begin{aligned} \max s & \qquad \text{unter den Nebenbedingungen} \\ -A^T \cdot x + s \cdot \mathbf{1}_m &\leq 0_n \\ x_1 + \ldots + x_m &= 1 \\ x_i &\geq 0 \qquad \text{für alle} \quad i = 1, \ldots, m \\ s &\lesseqgtr 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Wir erhalten dazu das folgende lineare Problem:

$$\max \quad (0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,1)^T \cdot (x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4,\,x_5,\,x_6,\,v)\,, \qquad \text{so dass}$$

$$\begin{pmatrix} -20 & -40 & -10 & -40 & -30 & -15 & 1 \\ -40 & -20 & -35 & -15 & -30 & -40 & 1 \\ -30 & -25 & -25 & -20 & -27 & -25 & 1 \\ -25 & -40 & -50 & -12 & -20 & -30 & 1 \\ -50 & -20 & -10 & -27 & -60 & -45 & 1 \\ -27 & -35 & -15 & -30 & -22 & -25 & 1 \\ -30 & -25 & -35 & -10 & -15 & -20 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ v \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ v \end{pmatrix} = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, v \geq 0.$$

Wieder unter der Verwendung von *Mathematica* erhalten wir die folgende Lösung:

$$x = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0, 0, 0\right) \qquad \text{und} \qquad v = 28.$$

Wie aus der Theorie zu erwarten war, erhalten wir den gleich Zielfunktionswert $v = 28$.

Der Quellcode zu dieser Aufgabe ist im Anhang unter 5.1 ab Seite 73 zu finden.

3 Zwei Personen Allgemeinsummenspiele

In diesem Kapitel wollen wir nun allgemeine Zwei Personen Spiele betrachten. Dazu können wir die Auszahlungen nicht mehr nur durch eine Matrix darstellen, wir brauchen nun für jeden Spieler eine Auszahlungsmatrix, daher nennen wir ***Zwei Personen Allgemeinsummenspielen*** auch ***Bimatrix Spiele***.

In Kapitel 1 haben wir bereits einige Beispiele von ***Zwei Personen Allgemeinsummenspielen*** kennen gelernt. Die Zwei Personen Nullsummenspiele aus Kapitel 2 waren dabei nur ein Spezialfall.

3.1 Grundlegende Definitionen

Definition 3.1.1

Ein ***Bimatrix Spiel*** $\Gamma = (A, B)$ wird gegeben durch zwei Matrizen

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \qquad \text{und} \qquad B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}.$$

Dabei ist a_{ij} die Auszahlung von Spieler 1 und b_{ij} diejenige von Spieler 2, wenn Spieler 1 die Strategie i und Spieler 2 die Strategie j wählt.

Eine alternative Darstellung einer Bimatrix Spiels wäre eine Matrix in Form der Normalform:

$$(A, B) = ((a_{ij}), (b_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}.$$

Definition 3.1.2

Ein Spiel heißt ***nicht kooperativ***, wenn jede Form der Absprache verboten ist. Sind Absprachen erlaubt, heißt das Spiel ***kooperativ***.

Wir wollen uns im Folgenden mit nicht kooperativen Spielen beschäftigen.

Beispiel 3.1.3 (Kampf der Geschlechter)

Ein Mann und eine Frau müssen sich für ein Abendprogramm entscheiden. Die Frau zieht einen Theaterbesuch (T), der Mann ein Fußballspiel (F) vor.

Dieses Bimatrix Spiel beschreiben wir durch die folgenden Matrizen, wobei A die Auszahlungen der Frau als Zeilenspieler und B die Auszahlungen des Mannes als Spaltenspieler wiedergibt:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

In der alternativen Darstellung erhalten wir

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (4,\, 1) & (0,\, 0) \\ (-1,\, -1) & (1,\, 4) \end{pmatrix}.$$

In dieser Form ist leicht zu sehen, dass (T, T) und (F, F) zwei Gleichgewichte mit reinen Strategien darstellen.

Das Beispiel zeigt aber auch, dass hier Gleichgewichte mit reinen Strategien auf Dauer für einen Spieler nicht zufrieden stellend sein müssen, dies war bei Zwei Personen Nullsummenspiele nicht der Fall. Weiterhin existieren natürlich auch Spiele ohne Gleichgewichte in reinen Strategien, wie es zum Beispiel im Bimatrix Spiel zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$$

der Fall ist. Wir betrachten daher auch hier gemischte Strategien.

Definition 3.1.4

Ein Paar gemischter Strategien (x^*, y^*) ist ein ***Gleichgewicht*** im Bimatrix Spiel $\Gamma(A, B)$, wenn für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$

$$x^T A y^* \leq (x^*)^T A y^* \qquad \text{sowie} \qquad (x^*)^T B y \leq (x^*)^T B y^*$$

gilt. Die gemischten Strategien x^* bzw. y^* heißen in diesem Falle weiterhin ***optimal***.

Satz 3.1.5

Jedes Bimatrix Spiel $\Gamma = (A, B)$ besitzt mindestens ein Gleichgewicht.

Beweis

In Beweisen dieser Art kann oft der Fixpunktsatz angewandt werden, daher wollen wir diese Idee nun verdeutlichen:

Für beliebige $x \in X$ und $y \in Y$ definieren wir

$$c_i \;=\; \max\{A_{i\cdot}y - x^T Ay,\, 0\} \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m$$

sowie analog

$$d_i \;=\; \max\{x^T B_{\cdot j} - x^T By,\, 0\} \qquad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Spieler 1 betrachtet also jeweils nur die Auszahlung zu einer Zeile, Spieler 2 analog zu einer Spalte. Weiter sei

$$x'_i \;=\; \frac{x_i + c_i}{1 + \sum_{k=1}^{m} c_k} \qquad \text{und} \qquad y'_i \;=\; \frac{y_i + d_i}{1 + \sum_{k=1}^{n} d_k},$$

damit sind auch $x' = (x'_1, \ldots, x'_m)$ sowie $y' = (y'_1, \ldots, y'_n)$ gemischte Strategien.

Nun lässt sich zeigen, dass (x, y) genau dann ein Gleichgewicht ist, wenn $(x, y) = (x', y')$ gilt. Dies wollen wir aber nicht zeigen.

Bleibt also noch zu zeigen, dass es überhaupt einen Fixpunkt gibt. Dazu verwenden wir den Fixpunktsatz von Brouwers:

Die Abbildung T bilde zwei beliebige gemischte Strategien (x, y) auf (x', y') ab. Damit ist T eine Selbstabbildung und stetig auf der kompakten Menge $X \times Y$. Somit gibt es mindestens einen Fixpunkt und damit wurde der Satz nach der vorherigen (hier nicht gezeigten) Behauptung bewiesen. □

Es gibt Algorithmen, mit denen Gleichgewichte in Bimatrix Spielen berechnet werden können, so zum Beispiel der Algorithmus von Lenke und Howson (1964). Allerdings sind diese Algorithmen sehr aufwendig und liefern nicht notwendigerweise alle Gleichgewichte.

Wir werden daher nur den Spezialfall von 2×2-Bimatrix Spielen betrachten:

3.2 Lösungsverfahren für 2×2 Bimatrix Spiele

Bevor wir ein Lösungsverfahren zum Finden von Gleichgewichten in 2×2 Bimatrix Spielen an Hand eines Beispiels diskutieren können, benötigen wir noch wenige allgemeine Grundlagen.

Definition 3.2.1

Gegeben sei ein $y \in Y$. Eine Strategie $\hat{x} \in X$ heißt ***beste Antwort*** von Spieler 1 bezüglich y, wenn

$$\hat{x}^T Ay \ \geq \ x^T Ay \qquad \text{für alle} \quad x \in X$$

gilt. Analog definieren wir eine Strategie $\hat{y} \in Y$ als beste Antwort von Spieler 2 auf eine gegebene Strategie $x \in X$.

Nach dieser Definition erhalten wir sofort die folgenden Aussagen:

Lemma 3.2.2

Für alle $y \in Y$ existiert eine beste Antwort $\hat{x} \in X$ von Spieler 1 bezüglich y und umgekehrt.

Weiterhin müssen wir nur die reinen Strategien betrachten, um eine beste Antwort zu finden.

Weiter folgt aus der Definition von besten Antworten sofort der nächste Satz:

Satz 3.2.3

Ein Paar gemischter Strategien (x, y) ist genau dann ein Gleichgewicht, wenn x beste Antwort von Spieler 1 bezüglich y und y beste Antwort von Spieler 2 bezüglich x ist.

Wie bereits angesprochen reicht es also aus reine Strategien zu untersuchen, um eine beste Antwort zu finden, es gilt also für Spieler 1

$$\max_{x \in X} x^T Ay \ = \ \max_{i=1,\ldots,n} A_{i\cdot} y.$$

Im 2×2 Bimatrix Spiel folgt damit

$$\max_{i=1,2} \{a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2\} \ = \ \max_{i=1,2} \{(a_{i1} - a_{i2})y_1 + a_{i2}\}.$$

Beste Antworten werden somit durch das Maximum zweier linearer Funktionen gefunden. Für Spieler 2 ergibt sich analog

$$\max_{j=1,2} \{b_{1j}x_1 + b_{2j}x_2\} \ = \ \max_{j=1,2} \{(b_{1j} - b_{2j})x_1 + b_{2j}\}.$$

Dies wollen wir nun am Beispiel verdeutlichen:

Beispiel 3.2.4 (Kampf der Geschlechter)

Wir untersuchen wieder das Bimatrix Spiel zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Für Spieler 1 untersuchen wir als beste Antwort auf ein $y = (y_1, y_2) \in Y$

$$\max\{4y_1,\ -2y_1 + 1\},$$

siehe Abbildung 3.1 links.

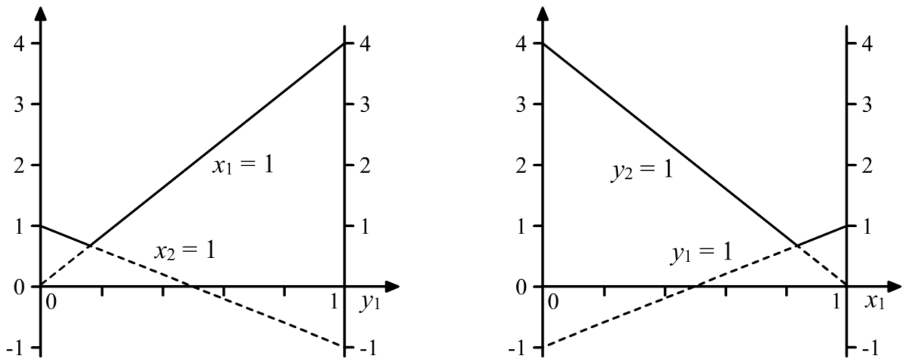


Abbildung 3.1: Zur Berechnung der besten Antwort im Beispiel.

Der Schnittpunkt liegt hier bei $y_1 = 1/6$. Die beste Antwort von Spieler 1 ist somit

$$\left\{ \begin{array}{lll} x = (0,1) & \text{für} & y_1 < 1/6 \\ x \in X & \text{für} & y_1 = 1/6 \\ x = (1,0) & \text{für} & y_1 > 1/6 \end{array} \right. .$$

Für Spieler 2 gilt es analog

$$\max\{2x_1 - 1,\ -4x_1 + 4\}$$

zu untersuchen, siehe Abbildung 3.1 rechts. Der Schnittpunkt hier liegt bei $x_1 = 5/6$. Die beste Antwort von Spieler 2 ist damit

$$\left\{ \begin{array}{lll} y = (0,1) & \text{für} & x_1 < 5/6 \\ y \in Y & \text{für} & x_1 = 5/6 \\ y = (1,0) & \text{für} & x_1 > 5/6 \end{array} \right. .$$

Diese Ergebnisse tragen wir nun in Abbildung 3.2 zusammen.

Nach Satz 3.2.3 erhalten wir an allen drei Schnittpunkten aus dieser Abbildung ein Gleichgewicht. Diese sind

$$\begin{array}{llll} x^1 = (0,1) & \text{und} & y^1 = (0,1), \\ x^2 = (1,0) & \text{und} & y^2 = (1,0), \\ x^3 = (5/6,1/6) & \text{und} & y^3 = (1/6,5/6). \end{array}$$

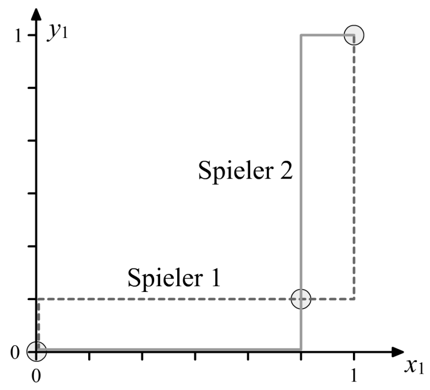


Abbildung 3.2: Beste Antworten Abbildung.

Bei den ersten beiden Gleichgewichten erhält jeweils ein Spieler eine Auszahlung von 4, der andere eine Auszahlung von 1. Für das dritte Gleichgewicht erhalten beide Spieler die Auszahlung

$$(x^3)^T A y^3 \ = \ (x^3)^T B y^3 \ = \ \frac{2}{3},$$

was somit sogar kleiner als 1 ist.

Wir wollen im Folgenden zwei alternative Definitionen von Gleichgewichten in Bimatrix Spielen kennen lernen.

3.3 Perfekte Gleichgewichte

Die bisherige Definition eines Gleichgewichtes in Bimatrix Spielen (welche auf *Nash* zurückgeht), beinhaltet auch mehrere Nachteile:

(1) Die Gleichgewichte können unvorteilhaft sein. Dies können wir am Beispiel des Gefangenendilemmas aus Beispiel 1.1.1 erkennen.

(2) Ein Gleichgewicht kann auf Dauer instabil sein. Dies haben wir bereits an Hand von Beispiel 3.1.3 im Kampf der Geschlechter kennen gelernt.

Wir stellen nun einen neuen Ansatz vor, mit welchen wir einige (aber leider nicht alle) unvorteilhaften Gleichgewichte eliminieren können. Dieser Ansatz des perfekten Gleichgewichtes geht auf *Selten* zurück.

Definition 3.3.1

Sei $\Gamma = (A, B)$ ein $m \times n$ Bimatrix Spiel. Weiter seien

$$\sigma \;=\; (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \qquad \text{und} \qquad \tau \;=\; (\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

so gewählt, dass $\sigma_i > 0$ sowie $\tau_j > 0$ und dass

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma_i \;<\; 1 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{n} \tau_j \;<\; 1$$

gilt.

Die Vektoren σ und τ heißen ***Störvektoren*** und das Spiel $\hat{\Gamma} = (A, B, \sigma, \tau)$ heißt das $\Gamma = (A, B)$ zugeordnete ***gestörte Spiel***, in dem die Spieler nur Strategien $x \in X$ und $y \in Y$ mit

$$x_i \;\geq\; \sigma_i \qquad \text{und} \qquad y_j \;\geq\; \tau_j$$

wählen dürfen.

Dabei sollten die Bezeichnungen σ und τ nicht mit reinen Strategien in Verbindung gebracht werden. Die Idee dieser Definition ist die Annahme, dass Spieler nie komplett fehlerfrei sind, sie wählen jede Strategie mit positiver Wahrscheinlichkeit.

Satz 3.3.2

Jedes gestörte Spiel $\hat{\Gamma} = (A, B, \sigma, \tau)$ besitzt mindestens ein Gleichgewicht.

Der Beweis zu diesem Satz verläuft ähnlich zum Beweis von Satz 3.1.5 über den Fixpunktsatz.

Für spätere Betrachtungen ist vor allen auch der folgende Satz wichtig:

Satz 3.3.3

Sei (x, y) ein Gleichgewicht im gestörten Spiel $\hat{\Gamma} = (A, B, \sigma, \tau)$. Weiter existiere eine Zeile k mit

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j \;<\; \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \qquad \Leftrightarrow \qquad A_{k\cdot} y \;<\; \max_{i=1,\ldots,m} A_{i\cdot} y.$$

Dann folgt $x_k = \sigma_k$.

Dieser Satz gilt natürlich auch analog für Spalten und damit für Spieler 2. Die Wahrscheinlichkeit für ungünstige Strategien wird also möglichst klein gehalten.

Damit kommen wir zur nächsten Definition eines Gleichgewichtes:

Definition 3.3.4

Sei $\Gamma = (A, B)$ ein Bimatrix Spiel.

Ein Gleichgewicht (x^*, y^*) in gemischten Strategien heißt ***perfekt***, wenn es eine gegen $(0_m, 0_n)$ konvergierende Folge von Störvektoren (σ^k, τ^k) gibt, so dass eine Folge (x^k, y^k) von Gleichgewichten der zugehörigen gestörten Spiele $\hat{\Gamma}^k = (A, B, \sigma^k, \tau^k)$ gegen (x^*, y^*) konvergiert.

Satz 3.3.5

Jedes Bimatrix Spiel hat mindestens ein perfektes Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Wir wollen nun zwei Beispiele diskutieren. Im ersten Beispiel können wir ein unvorteilhaftes Gleichgewicht eliminieren, im zweiten Beispiel ist ein unvorteilhaftes Gleichgewicht sogar leider auch ein perfektes Gleichgewicht.

Beispiel 3.3.6

Wie betrachten das Bimatrix Spiel $\Gamma = (A, B)$ mit

$$A \;=\; B \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gibt es hier zwei Gleichgewichte, nämlich

$$(x^*, y^*) \;=\; ((0,1),\, (0,1)) \qquad \text{und} \qquad (x', y') \;=\; ((1,0),\, (1,0)).$$

Dabei ist das zweite Gleichgewicht wenig zufrieden stellend. Wir wollen nun zeigen, dass dieses kein perfektes Gleichgewicht ist, das erste jedoch schon:

Dazu untersuchen wir die gestörten Spiele $\hat{\Gamma}^k = (A, B, \sigma^k, \tau^k)$. Damit gilt

$$A_{2\cdot}y \;=\; 1 \;>\; 0 \qquad \text{und} \qquad A_{1\cdot}y \;=\; 0,$$

nach Satz 3.3.3 folgt also $x_1^k = \sigma_1^k$. Aus Symmetriegründen folgt natürlich auch $y_1^k = \tau_1^k$. Damit bilden

$$x^k \;=\; (\sigma_1^k,\, 1-\sigma_1^k) \qquad \text{und} \qquad y^k \;=\; (\tau_1^k,\, 1-\tau_1^k)$$

ein Gleichgewicht im gestörten Spiel $\hat{\Gamma}^k$. Für $(\sigma^k, \tau^k) \to (0,0)$ folgt

$$(x^k, y^k) \;\longrightarrow\; ((0,1),\,(0,1)),$$

somit ist (x^*, y^*) tatsächlich ein perfektes Gleichgewicht, (x', y') hingegen nicht.

Beispiel 3.3.7

Wir untersuchen nun das Bimatrix Spiel

$$(A,B) \;=\; \begin{pmatrix} (10,10) & (0,10) \\ (10,0) & (1,1) \end{pmatrix}.$$

Auch hier sind

$$(x^*, y^*) \;=\; ((0,1),\,(0,1)) \qquad \text{und} \qquad (x', y') \;=\; ((1,0),\,(1,0)).$$

zwei Gleichgewichte und ähnlich zum vorherigen Beispiel ist (x^*, y^*) ein perfektes Gleichgewicht, (x', y') jedoch nicht.

Diese beiden Beispiele haben also gezeigt, dass perfekte Gleichgewichte weiterhin unvorteilhaft sein können.

Das Konzept des perfekten Gleichgewichtes können wir noch ein wenig verfeinern:

Definition 3.3.8

Sei $\Gamma = (A, B)$ ein Bimatrix Spiel.

Ein Gleichgewicht (x^*, y^*) in gemischten Strategien heißt ***streng perfekt***, wenn für jede gegen $(0_m, 0_n)$ konvergierende Folge von Störvektoren (σ^k, τ^k) eine Folge (x^k, y^k) von Gleichgewichten der zugehörigen gestörten Spiele $\hat{\Gamma}^k = (A, B, \sigma^k, \tau^k)$ existiert, die gegen (x^*, y^*) konvergiert.

Natürlich ist jedes streng perfekte Gleichgewicht auch ein perfektes Gleichgewicht. Nur leider müssen streng perfekte Gleichgewichte in Bimatrix Spielen nicht mehr existieren. Dies zeigt das folgende Beispiel:

Beispiel 3.3.9

Wir betrachten das Bimatrix Spiel

$$(A, B) \;=\; \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt für Spieler 2, dass Spalte 1 die Spalten 2 und 3 dominiert. Für jedes gestörte Spiel $\hat{\Gamma}^k = (A, B, \sigma^k, \tau^k)$ wird Spieler 2 also

$$y^k \;=\; (1 - \tau_2^k - \tau_3^k,\, \tau_2^k,\, \tau_3^k)$$

wählen. Für $\tau_2^k > \tau_1^k$ zieht Spieler 1 damit Zeile 1 vor, er wählt in diesem Falle

$$x^k \;=\; (1 - \sigma_2^k,\, \sigma_2^k).$$

Gilt $\tau_2^k < \tau_1^k$, so würde Spieler 1

$$x^k \;=\; (\sigma_1,\, 1 - \sigma_1^k)$$

wählen. Für einige Folgen von (σ^k, τ^k) konvergiert (x^k, y^k) also gegen das (perfekte) Gleichgewicht $((1,0),\, (1,0,0))$, für andere gegen das (perfekte) Gleichgewicht $((0,1),\, (1,0,0))$.

Somit finden wir kein streng perfektes Gleichgewicht.

3.4 Evolutorische Gleichgewichte

Diese zweite alternative Definition von Gleichgewichten in Bimatrix Spielen geht auf eine biologische Idee von *John Maynard Smith* zurück.

Die Idee hierbei ist die Untersuchung von Häufigkeitsverteilungen innerhalb von Populationen und den Einfluss von Mutation. Der stabile Endzustand *evolutorischen* Abläufen liefert dabei eine neue Verfeinerung von Gleichgewichten.

Wir betrachten zwei Tiertypen, den aggressiven und den friedlichen. Dies entspricht nach Aufgabe 1.4.2 zum Beispiel den Falken (aggressiv) und den Tauben (friedlich). Die Tiertypen sind dabei nicht unterscheidbar und sie können ihr Wesen nicht ändern, es kann also kein friedliches Tier plötzlich aggressiv werden und umgekehrt. Treffen zwei Tiere vor einer Beute aufeinander, so gibt es drei Möglichkeiten:

(1) Zwei Falken kämpfen gegeneinander um die Beute.

(2) Zwei Tauben teilen sich die Beute.

(3) Bei einem Falken und einer Taube wird die Taube dem Falken die Beute überlassen.

Beispiel 3.4.1

Wir erhalten als Bimatrix Spiel zum Beispiel die Spielmatrizen

$$(A,B) \;=\; \begin{pmatrix} (10,10) & (0,30) \\ (30,0) & (-10,-10) \end{pmatrix}.$$

In dieser Situation haben wir drei Gleichgewichte:

$$\begin{aligned} (x^1,y^1) &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \\ (x^2,y^2) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \\ (x^3,y^3) &= \left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Bei den ersten zwei Gleichgewichten trifft damit immer ein Falke auf eine Taube, daher sind diese Gleichgewichte aus evolutionistischer Sichtweise unbrauchbar. Beim dritten Gleichgewicht (x^3, y^3) besteht die Population zu einem Drittel aus Tauben und zu zwei Dritteln aus Falken. Treffen hier zufällig zwei Individuen aufeinander, ist jedes mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 eine Taube und mit 2/3 ein Falke.

Darauf wollen wir nun aufbauen und die für uns wichtigen *symmetrischen* Gleichgewichte definieren:

Definition 3.4.2

Ein Bimatrix Spiel $\Gamma = (A, B)$ heißt ***symmetrisch***, wenn $B = A^T$ gilt.

Ein Gleichgewicht (x, y) heißt ***symmetrisch***, wenn $x = y$ gilt.

Satz 3.4.3

Jedes symmetrische Bimatrix Spiel $\Gamma = (A, A^T)$ besitzt ein symmetrisches Gleichgewicht.

Auch dieser Beweis verläuft ähnlich zum Beweis von Satz 3.1.5 über den Fixpunktsatz.

Wir betrachten im Folgenden nur symmetrische Bimatrix Spiele, da wir symmetrische Gleichgewichte sicherstellen wollen.

Damit stellen wir uns die Frage, ob sich ein symmetrisches Gleichgewicht (x, x) in einer Population einstellt und ob es stabil bleibt. Dies betrachten wir am vorherigen Beispiel.

Beispiel 3.4.4

Wir untersuchen wieder das Beispiel mit den Spielmatrizen

$$A = B^T = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 30 & -10 \end{pmatrix}$$

und betrachten das symmetrische Gleichgewicht (x, x) mit $x = (1/3, 2/3)$, die Population besteht also zu einem Drittel aus Tauben und zu zwei Dritteln aus Falken. Als Wert des Spiels erhalten wir

$$x^T Ax = \frac{10}{3}.$$

Mutation 1

Zunächst wird ein *mutiertes Gen* $y = (0, 1)$ eingeschleust, dass nur Falken produziert. Wegen

$$y^T Ax = \frac{10}{3} = x^T Ax$$

kann y überlegen, denn in Konfrontation mit x schneidet y nicht schlechter ab als x selbst. Wir betrachten nun eine Mischung z aus x und y:

$$z = \lambda y + (1 - \lambda)x \qquad \text{für} \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Wählen wir zum Beispiel $\lambda = 1/100$, dann gilt

$$z = \left(\frac{99}{300}, \frac{201}{300}\right).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} x^T Az &= \frac{97}{30} = 3,23\ldots < \frac{10}{3}, \\ y^T Az &= \frac{16}{5} = 3,2 < \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Dies zeigt uns, dass sich y auf lange Sicht nicht gegen die gemischte Population durchsetzen wird, da y schlechter abschneidet als x.

Mutation 2

Nun führen wir das mutiertes Gen $y = (1, 0)$ ein, dass nur Tauben produziert. Wegen

$$y^T Ax \;=\; \frac{10}{3} \;=\; x^T Ax$$

kann auch dieses y wieder überlegen. Wir betrachten nun eine Mischung z aus x und y mit $\lambda = 1/100$:

$$z \;=\; \left(\frac{102}{300}, \frac{198}{300}\right).$$

Damit erhalten wir

$$x^T Az \;=\; \frac{53}{15} \;=\; 3,53\ldots \;>\; \frac{10}{3}, \tag{3.1}$$

$$y^T Az \;=\; \frac{17}{5} \;=\; 3,4 \;>\; \frac{10}{3}. \tag{3.2}$$

Hier schneidet y zwar gegen z besser ab als zuvor x gegen x, allerdings verhält sich x gegen z noch besser als y gegen z. Es wird sich also auch hier y nicht durchsetzen können.

Tatsächlich gilt für alle $y \neq x$, dass y nicht bestehen wird.

Definition 3.4.5

Sei A eine $m \times m$ Matrix.

Ein ***evolutorisches System*** ist das Bimatrix Spiel $\Gamma = (A, A^T)$.

Eine gemischte Strategie $x \in X$ heißt ein ***Genotyp***.

Eine gemischte Strategie $x \in X$ heißt ***evolutorisch stabil***, wenn für jedes $y \neq x$ ein $1 \geq \delta > 0$ existiert, so dass für alle $0 < r < \delta$

$$x^T A(ry + (1-r)x) \;>\; y^T A(ry + (1-r)x)$$

gilt. Das heißt eine bestehende Strategie x kann jede Mutation y vertreiben, wenn der Anteil r der Mutation nur klein genug ist.

Satz 3.4.6

Eine evolutorisch stabile Strategie x erzeugt ein symmetrisches Gleichgewicht (x, x).

Umgekehrt gibt es aber symmetrische Gleichgewichte (x, x), die von keiner evolutorische stabilen Strategie x erzeugt wird.

Der folgende Satz liefert schließlich eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine evolutorisch stabile Strategie:

Satz 3.4.7

Wir betrachten ein evolutorisches System $\Gamma = (A, A^T)$.

Eine Strategie $x \in X$ ist genau dann eine evolutorisch stabile Strategie, wenn gilt:

(1) (x, x) ist ein symmetrisches Gleichgewicht.

(2) ***Stabilitätsbedingung***: Für ein $y \neq x$, für das $y^T Ax = x^T Ax$ gilt, folgt
$$x^T Ay \; > \; y^T Ay.$$

Eine evolutorisch stabile Strategie x ist lokal definiert, damit ist sie in einer Umgebung von x stabil. Außerhalb dieser Umgebung ist es mögliche, dass eine Mutation einen ursprünglichen Tiertypen verdrängen kann.

Beispiel 3.4.8

Wir betrachten das evolutorische System zu der Spielmatrix
$$A \; = \; A^T \; = \; \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hier gibt es drei symmetrische Gleichgewichte:
$$x^1 \; = \; y^1 \; = \; (1, 0), \quad x^2 \; = \; y^2 \; = \; (0, 1) \quad \text{und} \quad x^3 \; = \; y^3 \; = \; (1/3,\, 2/3).$$

Es gilt $(x^1)^T Ax^1 = 10$ und
$$y^T Ax^1 \; = \; y^T \cdot (10,\, 0) \; < \; 10 \qquad \text{für} \qquad y \neq x^1,$$

somit gibt es kein $y \neq x^1$ mit $y^T Ax^1 \; = \; (x^1)^T Ax^1$ und damit ist x^1 eine evolutorisch stabile Strategie.

Analog ist auch x^2 eine evolutorisch stabile Strategie.

Mit x^3 gilt $(x^3)^T Ax^3 = 10/3$. Betrachten wir $y = (1, 0)$, so ist auch $y^T Ax^3 = 10/3$ und da
$$y^T Ay \; = \; 10 \; > \; \frac{10}{3} \; = \; (x^3)^T Ay$$

gilt, ist x^3 keine evolutorisch stabile Strategie.

Insgesamt ist x^1 der zweiten evolutorisch stabilen Strategie x^2 vorzuziehen. Sobald die Population aber ausschließlich aus x^2 besteht, hat x^1 keine Chance. Andererseits kann x^2 vertrieben werden, wenn eine genügend große Menge Mutationen von x^1 eingeschleust wird.

Die Existenz von evolutorisch stabilen Strategien in reinen Strategien ist ebenso wie die Existenz von Gleichgewichten in reinen Strategien im Allgemeinen nicht gegeben. Es lässt sich jedoch eine leicht zu überprüfende hinreichende, aber leider nicht notwendige, Bedingung für eine reine evolutorisch stabile Strategie formulieren.

Lemma 3.4.9

Sei (A, A^T) ein evolutorisches System und es gebe ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_{kk} > a_{ik}$ für alle $i \neq k$.

Dann ist $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ eine reine evolutorisch stabile Strategie.

Es muss also nur geprüft werden, ob es eine Spalte k gibt, bei der das Element a_{kk} den größten Eintrag hat.

Leider gibt es keine leicht zu überprüfende (algorithmische) notwendige Bedingung für eine reine evolutorisch stabile Strategie. Auch die Existenz von evolutorisch stabilen Strategien in gemischten Strategien ist ebenso nicht gesichert. Beim evolutorischen System zur Spielmatrix

$$A = A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist jedes (x, x) mit $x \in X$ ein Gleichgewicht, keine Strategie davon ist jedoch evolutorisch stabil.

3.5 Aufgaben

Aufgabe 3.5.1

Gib alle Gleichgewichte im folgenden Bimatrix Spiel an:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Für Spieler 1 haben wir

$$\max\{4y_1 + 1,\ -2y_1 + 4\}$$

zu untersuchen. Wir erhalten einen Schnittpunkt bei $y_1 = 1/2$ und damit ergeben sich die folgenden besten Antworten für Spieler 1:

$$\begin{cases} x = (0,1) & \text{für} \quad y_1 < 1/2 \\ x \in X & \text{für} \quad y_1 = 1/2 \\ x = (1,0) & \text{für} \quad y_1 > 1/2 \end{cases}.$$

Für Spieler 2 erhalten wir analog mit

$$\max\{-x_1 + 3,\ 2x_1 + 1\}$$

einen Schnittpunkt bei $x_1 = 2/3$. Die besten Antworten von Spieler 2 sind damit

$$\begin{cases} y = (1,0) & \text{für} \quad x_1 < 2/3 \\ y \in Y & \text{für} \quad x_1 = 2/3 \\ y = (0,1) & \text{für} \quad x_1 > 3/3 \end{cases}.$$

Diese Ergebnisse wurden in Abbildung 3.3 zusammengetragen.

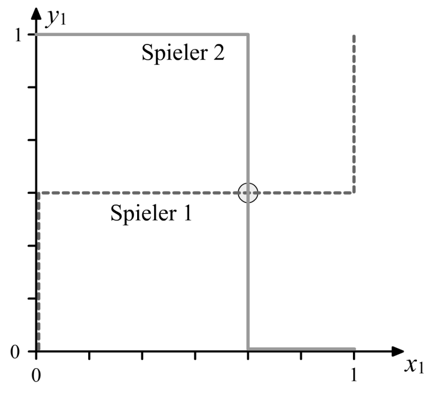


Abbildung 3.3: Beste Antworten Abbildung.

Wir erhalten nur einen Schnittpunkt, nach Satz 3.2.3 finden wir damit auch nur ein Gleichgewicht, nämlich für die gemischten Strategien

$$x = (2/3,\ 1/3) \qquad \text{und} \qquad y = (1/2,\ 1/2).$$

Aufgabe 3.5.2

Zeige, dass das gemischte Gleichgewichte

$$(x^3, y^3) \;=\; \left(\begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} \right)$$

zum Bimatrix Spiel $\Gamma = (A, B)$ mit

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

perfekt ist.

Lösung

Nochmals untersuchen wir die gestörten Spiele $\hat{\Gamma}^k = (A, B, \sigma^k, \tau^k)$. Zum Gleichgewicht (x^3, y^3) gilt

$$A_{1\cdot}y^1 \;=\; A_{2\cdot}y^1 \;=\; \frac{5}{2} \qquad \text{sowie} \qquad (x^3)^T B_{\cdot 1} \;=\; (x^3)^T B_{\cdot 2} \;=\; \frac{8}{5}.$$

Gilt für die Störvektoren

$$\sigma_1^k \;\leq\; \frac{3}{5} \qquad \text{und} \qquad \sigma_2^k \;\leq\; \frac{2}{5}$$

sowie

$$\tau_1^k \;\leq\; \frac{1}{4} \qquad \text{und} \qquad \tau_2^k \;\leq\; \frac{3}{4},$$

so ist $(x^k, y^k) = (x^3, y^3) = ((3/5, 2/5), (1/4, 3/4))$ auch ein Gleichgewicht im gestörten Spiel $\hat{\Gamma}^k$. Für $(\sigma^k, \tau^k) \to (0, 0)$ folgt dann trivialer Weise

$$(x^k, y^k) \;\longrightarrow\; (x^3, y^3),$$

somit ist auch (x^3, y^3) ein perfektes Gleichgewicht.

Aufgabe 3.5.3

Wir untersuchen wieder das evolutorisches System aus Beispiel 3.4.4 mit

$$A \;=\; B^T \;=\; \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 30 & -10 \end{pmatrix}$$

und betrachten das symmetrische Gleichgewicht (x, x) mit $x = (1/3, 2/3)$.

Zeige, dass sich keine Mutation $y \in X$ mit $y \neq x$ gegen x durchsetzten kann.

Lösung

Wir schleusen also das mutiertes Gen $y = (y_1, 1 - y_1)$ ein mit $y_1 \neq 1/3$. Auch hier gilt

$$y^T Ax = \frac{10}{3} = x^T Ax,$$

y kann also überlegen, denn in Konfrontation mit x schneidet y nicht schlechter ab als x selbst.

Wir betrachten nun die folgende Mischung z aus x und y:

$$z = \lambda y + (1 - \lambda)x \qquad \text{für} \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Mit $x = (1/3, 2/3)$ und $y = (y_1, 1 - y_1)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x^T Az &= \frac{10}{3} \cdot (1 + \lambda \cdot (9y_1 - 3)), \\ y^T Az &= \frac{10}{3} \cdot \left(1 + \lambda \cdot (15y_1 - 4 - 9y_1^2)\right). \end{aligned}$$

Die beiden Funktionen

$$f(y_1) = 9y_1 - 3 \qquad \text{und} \qquad g(y_1) = 15y_1 - 4 - 9y_1^2$$

haben im Intervall $[0, 1]$ die einzige gemeinsame Schnittstelle $y_1 = 1/3$. Für alle $y_1 \neq 1/3$ gilt $f(y_1) > g(y_1)$. Somit folgt für jedes $y_1 \neq 1/3$ auch gerade

$$y^T Az < x^T Az.$$

Dies zeigt uns, dass sich y auf lange Sicht für kein $x_1 \neq 1/3$ gegen die gemischte Population durchsetzen wird, da y schlechter abschneidet als x.

Aufgabe 3.5.4

Im Beispiel 3.4.8 haben wir festgestellt, dass $x^2 = (0, 1)$ eine evolutorisch stabile Strategie für das evolutorisches System $\Gamma = (A, A^T)$ mit

$$A = A^T = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ist. Bestimme nun das größte $\delta > 0$, so dass x^2 die Bedingung für eine evolutorisch stabile Strategie aus Definition 3.4.5 erfüllt.

Lösung

Zunächst einmal gilt $(x^2)^T A x^2 = 5$ und

$$y^T A x^2 \ = \ y^T \cdot (0,\, 5) \ < \ 5 \qquad \text{für} \qquad y \neq x^2,$$

somit gibt es kein y mit $y^T A x^2 = (x^2)^T A x^2$ und damit ist x^2 eine evolutorisch stabile Strategie.

Nun sei

$$w \ := \ ry + (1-r)x^2$$

für $0 < r < \delta$ und wir wollen untersuchen, wir groß das δ maximal werden darf, damit die Strategie x^2 für alle r mit $0 < r < \delta$ evolutorisch stabil bleibt. Dazu muss

$$(x^2)^T A w \ > \ y^T A w \qquad \text{für alle} \qquad y \neq x^2$$

gelten. Wir haben

$$\begin{aligned}
(x^2)^T A w &= (0,5)^T w \ = \ (0,5)^T \cdot \begin{pmatrix} r y_1 \\ r(1-y_1) + (1-r) \end{pmatrix} \\
&= 5 r y_2 + 5(1-r) \ =: \ f(r), \\
y^T A w &= (y_1, y_2)^T \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot w \ = \ (10y_1,\, 5y_2)^T w \\
&= (10y_1,\, 5y_2)^T \cdot \begin{pmatrix} r y_1 \\ r(1-y_1) + (1-r) \end{pmatrix} \\
&= 10r(1-y_2)^2 + 5ry_2^2 + 5(1-r)y_2 \ =: \ g(r).
\end{aligned}$$

Wir müssen nun das größte mögliche r finden, so dass $f(r) > g(r)$ für alle $0 \le y_2 < 1$ gilt. Dazu reicht es, wenn wir $y_2 = 0$ setzen. Denn gilt $f(r) \le g(r)$ für ein $0 \le y_2 < 1$, dann für $y_2 = 0$ erst recht.

Wir erhalten mit $y_2 = 0$

$$f(r) \ > \ g(r) \qquad \Leftrightarrow \qquad 5(1-r) \ > \ 10r \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{3} \ > \ r.$$

Somit ist das gesuchte δ gerade $\delta = 1/3$. Ab einem Anteil von $1/3$ einer Mutation x^1 in der Population von x^2 wird die Mutation x^1 die ursprüngliche evolutorisch stabile Strategie x^2 verdrängen.

4 Kooperative Spiele

Kooperative Spiele erlauben Absprachen. Dabei wird Kooperation zum Beispiel in Form von Verträgen oder durch Übertragung von Gewinnen zwischen den Spielern erlaubt.

Wir beschäftigen uns zunächst mit Zwei Personen Spielen, den so genannten ***Verhandlungsproblemen*** und gehen später zu mehreren Spielern über.

4.1 Verhandlungsprobleme

Im Verhandlungsproblem werden nicht mehr nur die Auszahlungen, sonder auch der ***Nutzen*** der Spieler untersucht. Dieser beschreibt, welchen persönlichen Wert eine Spielsituation für einen Spieler hat. So hat zum Beispiel ein Gewinn von 100 Geldeinheiten für einen mittellosen Spieler mehr Nutzen als für einen Millionär.

In Verhandlungsproblemen ist der persönliche Nutzen gegeben. Dies kann zum Beispiel als Ordnung der Ereignisse in einem Spiel der Fall sein. Diese Ordnung muss gewissen Axiomen genügen, die wir später definieren. Die Theorie zu diesen Axiomen ist ein wenig fragwürdig, für eine exakte Definition muss zur *Utility Theory* übergegangen werden. Dies werden wir hier aber nicht tun.

Definition 4.1.1

Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^2$ heißt ***zulässige Menge*** eines kooperativen Zwei Personen Allgemeinsummenspiels, wenn für jedes $s = (u, v) \in S$ durch Kooperation und ein paar gemischter Strategien $(x, y) \in X \times Y$ Nutzen u für Spieler 1 und Nutzen v für Spieler 2 erzielt werden kann.

Es ist klar, dass Spieler 1 nur dann kooperieren wird, wenn sein Nutzen über dem Nutzen u^* liegt, den er im Alleingang erzielen könnte. Analog kooperiert Spieler 2 nur dann, wenn dessen Nutzen über dem Nutzen v^* liegt, den dieser im Alleingang erzielen könnte.

Definition 4.1.2

Gegeben sei ein Bimatrix Spiel $\Gamma = (A, B)$. Dann ist

$$u^* := \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y$$

der ***Maximinwert*** von Spieler 1 und

$$v^* := \max_{y \in Y} \min_{x \in X} x^T B y$$

der ***Maximinwert*** von Spieler 2.

Ausgehend von der zulässigen Menge S und den Maximinwerten u^* und v^* suchen wir eine Regel, die diesem Tripel eine ***Verhandlungslösung***

$$(\overline{u}, \overline{v}) = \varphi(S, u^*, v^*)$$

zuordnet. Dabei soll φ einigen Axiomen genügen, die auf *J.F. Nash* zurückgehen. Dabei sind die Axiome **(4)** bis **(6)** diskussionswürdig, einige Autoren schlagen hier andere Axiome vor.

Axiome zur Verhandlungslösung nach Nash

Die Funktion φ soll die folgenden Axiome erfüllen:

(1) ***Rationales Handeln***: $(\overline{u}, \overline{v}) \geq (u^*, v^*)$.

(2) ***Zulässigkeit***: $(\overline{u}, \overline{v}) \in S$.

(3) ***Pareto Optimalität***: Gilt $(u, v) \in S$ und $(u, v) \geq (\overline{u}, \overline{v})$, dann folgt $(u, v) = (\overline{u}, \overline{v})$.

(4) ***Unabhängigkeit unwichtiger Alternativen***: Gilt $(\overline{u}, \overline{v}) \in T \subset S$ und $(\overline{u}, \overline{v}) = \varphi(S, u^*, v^*)$, dann folgt $(\overline{u}, \overline{v}) = \varphi(T, u^*, v^*)$.

(5) ***Unabhängigkeit affin linearen Transformationen***: Gegeben sei die Abbildung

$$\begin{aligned} T : S &\rightarrow T(S) \subset \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (\alpha u + \beta, \gamma v + \delta). \end{aligned}$$

Gilt nun $\varphi(S, u^*, v^*) = (\overline{u}, \overline{v})$, dann folgt

$$\varphi(T(S), \alpha u^* + \beta,\ \gamma v^* + \delta) \;=\; (\alpha\overline{u} + \beta,\ \gamma\overline{v} + \delta) \;:=\; T(\overline{u}, \overline{v}).$$

(6) ***Symmetrie***: Gilt $(u, v) \in S$ sowie $(v, u) \in S$ und gilt weiterhin $u^* = v^*$ sowie $\varphi(S, u^*, v^*) = (\overline{u}, \overline{v})$, dann folgt $\overline{u} = \overline{v}$.

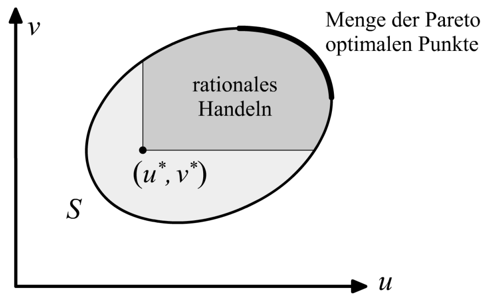


Abbildung 4.1: Zur Verdeutlichung der ersten drei Axiome von Nash.

Wie bereits erwähnt sind diese Axiome diskussionswürdig und stoßen auf Kritik. Das Axiom **(6)** zum Beispiel ist nur dann sinnvoll, wenn beide Spieler gleichwertig sind, wenn sie also zum Beispiel den gleichen Nutzen haben. Dies muss aber nicht immer gegeben sein.

Für unsere Zwecke sind die Axiome jedoch sinnvoll, da sie sicherstellen, dass die Verhandlungslösung wohldefiniert und eindeutig ist. Dies ist die Hauptaussage dieses Abschnitts, für die wir zuvor zwei Lemmata benötigen. Wir müssen für unser Ziel leider auch Voraussetzen, dass die Menge S konvex ist.

Lemma 4.1.3

Sei S kompakt und konvex und es existiere ein $(u, v) \in S$ mit $u > u^*$ sowie $v > v^*$. Weiter sei

$$g(u, v) \;:=\; (u - u^*) \cdot (v - v^*).$$

Dann gibt es ein eindeutiges $(\overline{u}, \overline{v}) \in S$ mit

$$g(\overline{u}, \overline{v}) \;=\; \max_{\substack{(u,v)\in S \\ u \geq u^*}} g(u, v).$$

Lemma 4.1.4

Sei S kompakt und konvex und sei $(\overline{u}, \overline{v}) \in S$ so gewählt, dass

$$g(\overline{u}, \overline{v}) \;=\; \max_{\substack{(u,v)\in S \\ u \geq u^*}} g(u, v)$$

mit der Funktion $g(u,v)$ aus dem vorherigen Lemma 4.1.3. Weiter sei

$$h(u,v) \;:=\; (\overline{v} - v^*) \cdot u + (\overline{u} - u^*) \cdot v.$$

Dann gilt für alle $(u,v) \in S$ gerade

$$h(u,v) \;\leq\; h(\overline{u},\overline{v}).$$

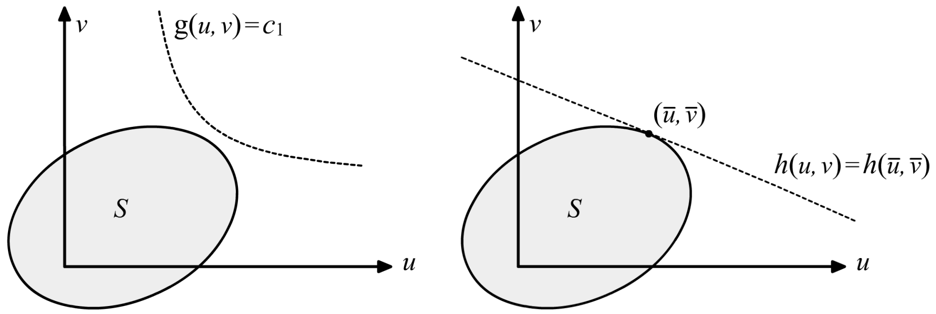


Abbildung 4.2: Veranschaulichung von Lemma 4.1.3 (links) und Lemma 4.1.4 (rechts).

Mit diesen Vorbereitungen lässt sich nun das Hauptergebnis beweisen:

Satz 4.1.5

Sei S kompakt und konvex.

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Funktion φ, die über allen Verhandlungsproblemen (S, u^*, v^*) definiert ist, und die die Axiome **(1)** bis **(6)** erfüllt.

Beispiel 4.1.6

Wir betrachten ein Verhandlungsproblem mit zwei Spielern. Spieler 1 besitzt ein sehr großes Kapital K, Spieler 2 hingegen ein geringes Kapital von 100 EUR. Die Spieler erhalten nun gemeinsam 100 EUR, wenn sie sich über die Aufteilung der 100 EUR einigen können. Kommt es zu keiner Einigung, gehen beide Spieler leer aus.

Der Nutzen der Spieler sei der natürliche Logarithmus seines Kapitals, je mehr Kapital ein Spieler hat, desto weniger interessant ist also dessen Zuwachs. Sei x der Teil von 100 EUR, der an Spiele 1 geht. Für Spieler 1 haben wir

$$u^+ \;=\; \log(K) \qquad \text{und} \qquad u \;=\; \log(K + x)$$

und für Spieler 2 analog

$$v^+ \;=\; \log(100) \qquad \text{und} \qquad v \;=\; \log(100 + (100 - x)).$$

Um nun $(\overline{u}, \overline{v})$ zu berechnen, müssen wir die folgende Funktion g maximieren:

$$\begin{aligned} g(u,v) &= (u - u^+) \cdot (v - v^+) \\ &= (\log(K + x) - \log(K)) \cdot (\log(200 - x) - \log(100)) \\ &= \log \frac{K + x}{K} \cdot \log \frac{200 - x}{100} \;\approx\; \frac{x}{K} \cdot \log\left(2 - \frac{x}{100}\right), \end{aligned}$$

dabei haben wir verwendet, dass für sehr große K die Beziehung

$$\log \frac{K + x}{K} \;\approx\; \frac{x}{K}$$

gilt. Um nun das Maximum zu erhalten, berechnen wir die Ableitung von g nach x:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(u,v) \;=\; \frac{1}{K} \cdot \log\left(2 - \frac{x}{100}\right) - \frac{x}{K} \cdot \frac{1}{200 - x}.$$

Als Nullstelle ergibt sich $x \approx 54,52$.

Somit gehen ca. $54,52\,\text{EUR}$ an Spieler 1 und $45,48\,\text{EUR}$ an Spieler 2, obwohl Spieler 1 sehr viel mehr Kapital besitzt.

4.2 Kooperative n-Personen Spiele

Zum Schluss wollen wir noch kurz auf kooperative n-Personen Spiele eingehen. Dazu untersuchen wir Koalitionen von Spieler und betrachten die Aufteilung der Auszahlungen der Spieler. Wir sind dabei wie immer an stabilen Situationen, hier also stabilen Koalitionen, interessiert.

Definition 4.2.1

Sei $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ die Spielermenge eines kooperative n-Personen Spiels. Jede nicht leere Teilmenge $K \subset N$ heißt ***Koalition***.

Seien K und $N \setminus K$ zwei Koalitionen. Dann beschreibt die ***charakteristische Funktion***

$$\begin{aligned} v : \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\} &\;\to\; \mathbb{R} \\ K &\;\mapsto\; v(K) \end{aligned}$$

den Maximinwert der Koalition K im Zwei Personen Nullsummenspiel gegen $N \setminus K$. Dabei ist $\mathcal{P}(N)$ die Potenzmenge von N.

Genauer haben wir also folgende Situation, angelehnt an stark kämpferische Spiele aus Kapitel 2:

Seien die Kreuzprodukte

$$\Sigma_K := \prod_{k\in K} \Sigma_k \qquad \text{und} \qquad \Sigma_{N\setminus K} := \prod_{k\in N\setminus K} \Sigma_k$$

die Strategiemengen der Koalitionen K und $N \setminus K$. Weiter sei $\pi_k(x, y)$ die Auszahlung an Spieler k für ein $x \in \Sigma_K$ und ein $y \in \Sigma_{N\setminus K}$. Dann gilt

$$v(K) = \max_{x\in\Sigma_K} \min_{y\in\Sigma_{N\setminus K}} \sum_{k\in K} \pi_k(x, y).$$

Diese Gleichung sieht mächtig kompliziert aus, ist im Grunde aber recht einfach. Wir nehmen dabei auch an, dass $v(K)$ für alle x, y und K existiert, dass $\pi_k(x, y)$ also für alle Spieler k beschränkt ist.

Definition 4.2.2

Ein kooperatives n-Personen Spiel in ***charakteristischer Form*** wird gegeben durch (N, v).

Lemma 4.2.3

Charakteristische Funktionen sind superadditiv. Für alle $K_1, K_2 \subset N$ mit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ gilt also

$$v(K_1) + v(K_2) \leq v(K_1 \cup K_2).$$

Definition 4.2.4

Ein Spiel (N, v) in charakteristischer Form heißt ***Konstantsummenspiel***, wenn für alle $K \subset N$

$$v(K) + v(N \setminus K) = v(N)$$

gilt.

Die Idee dabei ist, dass eine feste Summe Geld auf beide Koalitionen aufgeteilt wird.

Definition 4.2.5

Sei (N, v) ein Spiel in charakteristischer Form.

Eine ***Imputation*** oder ***Zuteilung*** im Spiel (N, v) wird gegeben durch einen Vektor $z = (z_1, \ldots, z_n)$, für den gilt:

(1) ***Individuelle Rationalität***: Für alle $i \in N$ gilt $z_i \geq v(\{i\})$.

(2) ***Kollektive Rationalität***: Es gilt $\sum_{i \in N} z_k = v(N)$.

Die Menge aller Imputationen sei $I(v)$.

Imputationen ordnen den Spielern nach dieser Definition deren Auszahlungen zu. Dabei ist gerade die zweite Bedingung problematisch für Konstantsummenspiele, da nicht klar ist, ob K und $N \setminus K$ sich soweit verständigen können, dass sie tatsächliche zusammen $v(N)$ erzielen.

Aus der Superadditivität von v erhalten wir

$$\begin{aligned} v(N) &\geq v(N \setminus \{1\}) + v(\{1\}) \\ &\geq v(N \setminus \{2\}) + v(\{2\}) + v(\{1\}) \\ &\vdots \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}). \end{aligned}$$

Angenommen hier gilt Gleichheit, so folgt, dass $z_i = v(\{i\})$ sein muss. Somit gäbe es nur eine Imputation im Spiel. Die nächste Definition soll diesen langweiligen Fall ausschließen:

Definition 4.2.6

Ein Spiel (N, v) in charakteristischer Form heißt ***essentiell***, wenn gilt

$$v(N) > \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}).$$

Ähnlich wie bei den Zwei Personen Spielen ohne Absprache sind wir auch hier an Situationen, also an Koalitionen, interessiert, die stabil sind. Dies führt uns zum Begriff des Kerns:

Definition 4.2.7

Sei (N, v) ein Spiel in charakteristischer Form und seien z sowie z' zwei Imputationen.

(1) z ***dominiert*** z' durch ein festes $K \subset N$, wenn für alle $k \in K$

$$z_k \; > \; z'_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k \in K} z_k \; \leq \; v(K)$$

gilt. Wir schreiben dafür $z \succ_K z'$.

(2) z ***dominiert*** z', wenn es ein $K \subset N$ gibt mit $z \succ_K z'$. Wir schreiben dafür $z \succ z'$.

Die Menge $C(v)$ aller nicht dominierten Imputationen nennen wir nun den ***Kern*** des Spiels (N, v).

Lemma 4.2.8

Sei (N, v) ein Spiel in charakteristischer Form, sei $z' \in I(v)$ und sei $K \subset N$ beliebig.

Dann gibt es genau dann ein $z \in I(v)$ mit $z \succ_K z'$, wenn

$$\sum_{k \in K} z'_k \; < \; v(K)$$

gilt.

Mit den Kernen können wir also stabile Koalitionen gefunden, allerdings ist auch diese Definition fragwürdig, da es auch Spiele mit leeren Kernen gilt:

Satz 4.2.9

Ist (N, v) ein essentielles Konstantsummenspiel in charakteristischer Form, so gilt $C(v) = \emptyset$.

Dennoch liefert die Definition der Kerne einen großen Vorteil:

Satz 4.2.10

Sei (N, v) ein Spiel in charakteristischer Form.

Der Kern $C(v)$ von (N, v) ist ein Polyeder. Es gilt

$$C(v) \;=\; \left\{ z \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{k \in K} z_k \geq v(K) \text{ für alle } K \subset N, \; \sum_{i \in N} z_i = v(N) \right\}.$$

Abschließend wollen wir noch ein Beispiel betrachten:

Beispiel 4.2.11

Wir betrachten drei Spieler:

(1) Spieler 1 möchte ein Pferd verkaufen, welches für ihn wertlos ist, wenn er es nicht verkauft.

(2) Spieler 2 möchte das Pferd kaufen, sein Nutzen beim Kauf des Pferdes wäre 90 EUR.

(3) Spieler 3 möchte das Pferd kaufen, sein Nutzen beim Kauf des Pferdes wäre 100 EUR.

Spieler 1 verkauft das Pferd jedoch nur, wenn er sich mit Spieler 2 oder Spieler 3 einigen kann, wenn er also in einer Koalition mit mindestens einem der anderen Spieler befindet. Wir haben nun die folgenden Möglichkeiten:

(1) Für $i = 1, 2, 3$ gilt $v(\{i\}) = 0$, es findet also kein Verkauf statt.

(2) Verkauft Spieler 1 an Spieler 2 zum Preis von x, so hat Spieler 1 den Nutzen x und Spieler 2 den Nutzen $90 - x$.

Es gilt also $v(\{1, 2\}) = 90$.

(3) Verkauft Spieler 1 an Spieler 3 zum Preis von x, so hat Spieler 1 den Nutzen x und Spieler 3 den Nutzen $100 - x$.

Es gilt also $v(\{1, 2\}) = 100$.

(4) Sind nur Spieler 2 und 3 in einer Koalition, so fühlt sich Spieler 1 hintergangen und verkauft sein Pferd nicht: $v(\{2, 3\}) = 0$.

(5) Gibt es eine Koalition aus allen Spielern, so haben wir $v(\{1, 2, 3\}) = 100$ und das Pferd wird an Spieler 3 verkauft.

Wenden wir nun den vorherigen Satz über den Kern des Spiels an, so enthält $C(v)$ alle (z_1, z_2, z_3), für die gilt:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &\geq 90, \\ z_1 + z_3 &\geq 100, \\ z_1 + z_2 + z_2 &= 100 \\ z_1, z_2, z_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Bedinungen leiten wir ab, dass $z_1 \geq 90$, $z_2 = 0$ und $z_3 = 100 - z_1$ sein muss. Als Kern erhalten wir also das Polyeder

$$C(v) = \{z = (z_1, 0, 100 - z_1) \mid 90 \leq z_1 \leq 100\}.$$

Auch wenn Spieler 2 hier immer leer aus geht, so drückt er den Preis x für das Pferd auf mindestens 90 EUR.

5 Anhang

5.1 Quellcode zu den Übungsaufgaben

Quellcode zur Bestimmung von Sattelpunkten

Das folgende *Mathematica*-Programm kann zur Bestimmung von Sattelpunkten in Zwei Personen Nullsummenspielen herangezogen werden:

```
In[1]:= A = {{5, 1, 3}, {3, 2, 4}, {-3, 0, 1}};
        n = Min[Length[A], Length[A[[1]]]];
        B = Table[0, {n}, {n}];

        For[i=1, i<=n, i++,
            For[j=1, j<=n, j++,
              If[A[[i,j]] == Max[Transpose[A][[j]]] &&
                 A[[i,j]] == Min[A[[j]]], B[[i,j]] = 1];
              ];
            ];

        A // MatrixForm
        B // MatrixForm

Out[5]:= {{5, 1, 3}, {3, 2, 4}, {-3, 0, 1}}

Out[6]:= {{0, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 0}}
```

Quellcode zu Aufgabe 2.6.11

Wir wollen an dieser Stelle noch einmal den *Mathematica* Quellcode zu Aufgabe 2.6.11 angeben:

Spieler 2

```
In[1]:= A = {
              {-20, -40, -30, -25, -50, -27, -30, 1},
              {-40, -20, -25, -40, -20, -35, -25, 1},
```

```
        {-10, -35, -25, -50, -10, -15, -35, 1},
        {-40, -15, -20, -12, -27, -30, -10, 1},
        {-30, -30, -27, -20, -60, -22, -15, 1},
        {-15, -40, -25, -30, -45, -25, -20, 1},
        {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0}
      };

        cA = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1};

        LinearProgramming[cA, A,
         {{0,1},{0,1},{0,1},{0,1},{0,1},{0,1},{1,0}}]
Out[3]:= {1/5, 0, 1/5, 0, 0, 0, 3/5, 28}
```

Spieler 1

```
In[4]:= B = {
        {-20, -40, -10, -40, -30, -15, 1},
        {-40, -20, -35, -15, -30, -40, 1},
        {-30, -25, -25, -20, -27, -25, 1},
        {-25, -40, -50, -12, -20, -30, 1},
        {-50, -20, -10, -27, -60, -45, 1},
        {-27, -35, -15, -30, -22, -25, 1},
        {-30, -25, -35, -10, -15, -20, 1},
        {1, 1, 1, 1, 1, 1, 0}
      };

        cB = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1};

        LinearProgramming[-cB, B,
         {{0,-1},{0,-1},{0,-1},{0,-1},{0,-1},{0,-1},{0,-1},{1,0}}]
Out[6]:= {3/5, 2/5, 0, 0, 0, 0, 28}
```

5.2 Ausblick

Natürlich haben wir nur ganz spezielle Probleme der Spieltheorie untersucht. Drei weitere wichtige Klassen von Spielen in der Spieltheorie sind die folgenden:

Indefinite Spiele

Hierbei werden Spiele untersucht, bei denen die Spieler unendlich viele Wahlmöglichkeiten haben. Ein Beispiel hierzu wäre das Aufstellen einer Werbetafel entlang einer langen Straße.

Spiele mit unendlich vielen Spielern

Auch möglich sind Spiele mit unendliche vielen Spielern. Derartige Situationen finden man zum Beispiel bei der Verkehrsplanung auf Straßen mit unendlich vielen Fahrzeugen.

Lernprozesse

Gerade bei klassischen extensiven Spielen wären auch Lernprozesse der Spieler denkbar. Auch hierauf sind wir niemals eingegangen.

Literaturverzeichnis

[1] BINMORE, K. : *Fun and Games.* 1. Auflage. D. C. Heath and Company, 1992

[2] OWEN, G. : *Game theory.* 2. Auflage. Acad. Press San Diego, 1982

[3] SCHOLZ, D. : *Spieltheorie.* – Vorlesungsmitschrift im Wintersemester 2006 / 2007 zur Vorlesung von S. Schwarze, Universität Göttingen

[4] SCHWARZE, S. : *Übungen zur Spieltheorie.* – Übungszettel zur Vorlesung im Wintersemester 2006 / 2007 von S. Schwarze, Universität Göttingen

Stichwortverzeichnis